

CONSTRUCCIÓN DE RELACIONES GRÁFICAS INTUITIVAS EN EL ESTUDIO DE LA VARIACIÓN Y LA ACUMULACIÓN APOYADAS CON TECNOLOGÍA DIGITAL

Armando Hernández Solís – Marco Antonio Santillán Vázquez
armandhs@gmail.com – marcoantoniosantillan012@gmail.com
CINVESTAV-IPN, México – CCH-UNAM, México

Núcleo temático: VII Investigación en educación matemática

Modalidad: CB

Nivel educativo: Bachillerato

Palabras clave: Variación, acumulación, tecnología digital, gráficas ligadas dinámicas.

Resumen

Esta investigación se desarrolla a través de un estudio cualitativo, en proceso, que aborda la enseñanza del Cálculo, al cual entendemos de acuerdo al currículo de bachillerato, como el estudio de la variación y la acumulación. En el diseño experimental recolectamos datos aplicando cuestionarios y analizando videos de las actividades aplicadas. Se trabaja con alumnos de bachillerato de 15 y 16 años utilizando tecnología digital: un sensor de movimiento y applets de gráficas ligadas dinámicas. Nuestros propósitos son: estudiar que conexiones son esenciales en el estudio de la variación y la acumulación; explorar su viabilidad para la enseñanza en bachillerato. Nuestros principales resultados indican que se puede favorecer la construcción de relaciones entre pares: acumulación o área bajo una curva y distancia recorrida; pendiente y velocidad; continuidad y tiempo; gráfica de distancia tiempo con picos y su imposibilidad de reproducir los picos caminando frente al sensor, dando de éste último par evidencia experimental; pares entre elementos geométricos y físicos, con los cuales nos valemos de un elemento del par para hacer sentido del otro.

INTRODUCCIÓN

Entendemos al Cálculo como el estudio de la variación y la acumulación, ideas esenciales de la matemática del bachillerato. Sin embargo muchos alumnos de este ciclo escolar terminan sus estudios sin haber cursado Cálculo, por lo que su formación matemática será incompleta al egresar. Ese hecho nos llevó a estudiar la viabilidad de enseñar conceptos fundamentales de Cálculo con un fuerte enfoque gráfico, enfocando la actividad de los estudiantes en la construcción de relaciones entre variación y acumulación con la mediación de un sensor de movimiento y software dinámico.

1. REVISIÓN DOCUMENTAL

Hay dos espacios en donde buscamos literatura acerca del tema: lo hecho en tesis de maestría y doctorado del Departamento de Matemática Educativa (DME) del Cinvestav, y las investigaciones nacionales e internacionales sobre elementos históricos, epistemológicos y problemas ligados a la enseñanza y aprendizaje del Cálculo.

1.1 Antecedentes en el Departamento de Matemática educativa

Desde su origen el DME ha cultivado, junto con el álgebra, la temática del Cálculo. De esto dan cuenta diversas publicaciones internas, tesis de maestría, y doctorado, de las cuales están muy relacionadas con nuestro estudio las de (Salat, 1993; Zubieta, 1996; Benítez, 2012; Sánchez, 2014).

1.2 Otros trabajos importantes

En el trabajo Thompson (1994), se investiga el concepto de razón de cambio y el cambio infinitesimal, los cuales son fundamentales para entender el teorema fundamental del cálculo. Un resumen de la problemática en la enseñanza del cálculo se encuentra en (Kidron, 2014; Rasmussen, Marrongelle & Borba, 2014). En el artículo de (Kirsch, 2014), se da una propuesta visual de la enseñanza aprendizaje del teorema fundamental del Cálculo, y en (Moreno-Armella, 2014) se hace una investigación teórica sobre la tensión entre la intuición y la formalización en la enseñanza de las matemáticas, siendo el Cálculo un caso paradigmático de esta tensión.

2. EL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

El trabajo está enfocado a alumnos de bachillerato de primer semestre en donde la asignatura de Cálculo es optativa y generalmente los alumnos que la eligen, estudiarán alguna ingeniería o elegirán carreras con una formación amplia en matemáticas, como actuaría, físico, o matemático. Por lo que es posible que los alumnos que no vayan a esas carreras al terminar el bachillerato no tendrán conocimientos, o ni idea de los temas o conceptos de éste campo de conocimientos.

Como vemos, la problemática del Cálculo enraíza en el currículo, pues a diferencia del álgebra escolar, no es un tema universal y obligatorio, generando que un gran número de egresados de bachillerato y universidades, en todo el mundo, desconozcan los conceptos fundamentales de esta rama de la matemática, circunstancia que llevó a (Kaput, 1994), a

promover la *democratización del cálculo*, esto es: acercar los conocimientos del Cálculo a la mayor cantidad de personas posibles sin la estructura previa obligatoria de habilidades en álgebra y geometría y argumentando sobre su importancia en la formación matemática y en la cultura general. Kaput también promovió el diseño y construcción de mediadores computacionales (Sim-Calc) con el fin de facilitar la presentación de los conceptos asociados con el Cálculo. Es en esta corriente donde ubicamos nuestra investigación:

Nos proponemos estudiar que conexiones son esenciales entre variación y acumulación, explorar su viabilidad para la enseñanza en bachillerato. Para lo cual nos concentraremos en las siguientes preguntas de investigación.

Preguntas de investigación: ¿Qué relaciones son fundamentales en un enfoque gráfico-intuitivo? ¿Qué elementos son centrales en estas relaciones? ¿Qué dificultades son centrales? ¿Qué papel desempeña la TD?

3. MARCO TEÓRICO

En nuestro estudio es muy importante el movimiento, como medio para estudiar la variación, así como sus diferentes representaciones, entre las que se encuentran las gráficas cartesianas.

3.1 El movimiento y la cognición humana

El movimiento es permanente y omnipresente. Lo podemos reconocer en las más diversas manifestaciones del mundo material y del mundo sociocultural en donde transcurren nuestras vidas. Para investigadores como Llinás (2001, p. 35), eso que llamamos pensar es el resultado de la internalización, en tiempo evolutivo, del movimiento. Solo aquellos organismos que se mueven tienen cerebro afirma Llinás. Un árbol, por ejemplo, no tiene necesidad de un sistema nervioso porque no va a ninguna parte, pero un animal necesita ver a dónde se dirige y no solamente eso, necesita además predecir el destino de su viaje. Ideas como estas han ido apareciendo gradualmente en los últimos años del siglo pasado y durante la primera década del presente. El movimiento se ha convertido en una de las llaves para intentar abrir la caja fuerte que guarda los secretos más antiguos de la mente humana.

3.2 El cuerpo como referente del movimiento

Los seres humanos percibimos, *sentimos* el mundo primordialmente en el cuerpo, con él nos vemos en el mundo y lo representamos. Investigadores como (Damasio, 1996; Pozo, 2001), entre muchos, señalan que nuestra representación del mundo está mediada por la

representación mental que nos formamos de nuestro propio cuerpo. **El cuerpo es el referente básico de la mente para interactuar con el mundo externo.** La mente está corporizada, es una *mente encarnada* (Damasio, 1996).

Por otra parte, salvo excepciones, la forma de existir del cuerpo es el movimiento. Antes de nacer nos movemos y mientras vivimos el movimiento no cesa. El cuerpo humano evolucionó moviéndose, adaptándose al entorno y este cuerpo en movimiento impulsó el desarrollo de la mente y de la inteligencia. La mente humana interactúa con el mundo externo a través de cuerpo que habita. Los seres humanos interactuamos con el mundo a través del cuerpo y lo interpretamos a través de los cambios que produce en nuestro cuerpo (Damasio, 1996).

La mente habita un cuerpo, esto es, está encarnada y la mejor forma que tiene ésta para representarse el mundo es a partir de una representación del propio cuerpo (Pozo, 2001, p. 115). “...**la forma en que nuestro cuerpo...interactúa con el mundo condiciona en gran medida, si no determina, los contenidos esenciales de nuestras representaciones en ciertos dominios específicos**” (Pozo, 2001, p. 121).

3.3 Mediación instrumental

Hay un rasgo fundamental de la cognición humana, y es que **la cognición humana funciona mediada por un artefacto.** El proceso de interacción del ser humano con su entorno se da con la mediación de un artefacto. Los artefactos guían y son guiados por los humanos. La transformación del medio material, y la transformación de los conocimientos de un humano, lo expresa muy bien (Wertsch, 1991, p. 29): “El argumento central que deseo seguir es el que la acción típicamente humana emplea <<instrumentos mediadores>>, tales como las herramientas o el lenguaje, y que estos instrumentos mediadores dan forma a la acción de manera esencial”. Esto lo podemos interpretar en el contexto de la cognición, diciendo que **las maneras de conocer que podemos tener los humanos están en dependencia profunda de los artefactos que hemos ido elaborando a lo largo de nuestra existencia.** Las tecnologías digitales, o simbólicas, son a su vez artefactos. Los artefactos simbólicos, o las tecnologías simbólicas están encaminadas a transformar la inteligencia humana, como lo señalaba Vygostky, a diferencia de las tecnologías materiales, que están diseñadas para interactuar o transformar el medio externo.

4. DISEÑO EXPERIMENTAL

Se ha diseñado un estudio cualitativo, en el que se trabajó con alumnos de bachillerato de 15 y 16 años. Su asistencia a las actividades fue opcional, y se tenía una asistencia entre 8 y 22 estudiantes, de los cuales se consideraron para el análisis de datos a los más constantes.

Para las actividades con el sensor de movimiento, se necesita montar un escenario experimental, con una computadora personal, el sensor de movimiento, y un cañón (anexo 1). Se debe tener un espacio donde el estudiante se mueva frente al sensor y observe su movimiento a través de una gráfica cartesiana que genera el sensor y que se proyecta con el cañón en una pantalla frente al alumno. Se construyeron y usaron applets de **gráficas ligadas dinámicas**, hechas con software de geometría dinámica (anexo 2).

Se diseñaron secuencias de actividad, de acuerdo a una interpretación libre de una trayectoria hipotética de aprendizaje (Simon, 1995), que incluían preguntas abiertas, que dependiendo de la secuencia, se contestaban únicamente en forma escrita, o únicamente en forma verbal, y en forma verbal y escrita. Las secuencias que requerían respuestas verbales fueron registradas en video.

Se estructuraron cinco fases, que agruparon secuencias de actividades aplicadas en sesiones cuya duración fue de 1° 20' cada una (anexo 3). A continuación se dan los datos recolectados, y su discusión, de la aplicación de una secuencia de actividad de la fase 2.

5. RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Presentamos una transcripción de una secuencia de actividad de la fase 2, como evidencia de que el estudio ha permitido a los alumnos establecer una relación entre una gráfica con picos, y la imposibilidad de reproducir exactamente los picos. La intervención de los estudiantes da certeza del papel que juega el sensor como mediador que favorece el entendimiento de los estudiantes.

SECUENCIA DE ACTIVIDAD 2-2: Dada una gráfica d/t , generada aleatoriamente por el software del sensor, la cual contiene picos, se solicita a los alumnos reproducirla caminando frente al sensor.

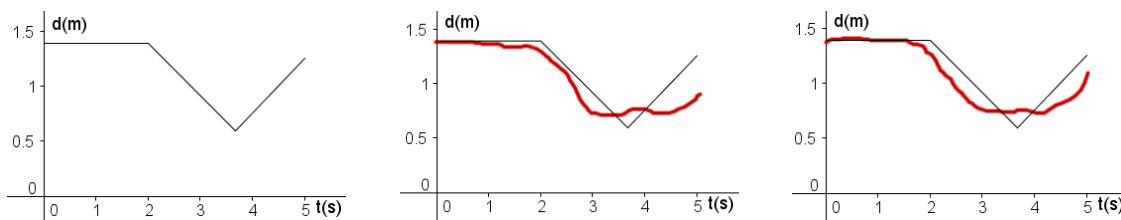
Al llegar a esta etapa los alumnos ya identifican cómo pueden generar segmentos paralelos al eje horizontal (tiempo en segundos), segmentos de pendientes positiva o negativa y a qué distancia deben colocarse al inicio para empalmar la gráfica de su movimiento con la

solicitada, por ejemplo una gráfica d/t , semejante a la gráfica de d/t de la figura 1 del anexo 2. Además de la acción, tratando de generar una gráfica que se *empalme* con la solicitada, se abre un diálogo con los alumnos a partir de preguntarles ¿Cómo lo hicieron?, esto es, cómo entendieron la gráfica solicitada y ¿qué hacen?, ¿cómo se movieron para generarla? A continuación utilizamos la letra P para referirnos al profesor, C para Christopher, y U para Uriel.

P: ¿Listo? ¿Ya?

Christopher (C) camina y trata de reproducir la gráfica solicitada (figura 1, izquierda) con su movimiento frente al sensor, obteniendo la gráfica de la figura 1, centro.

Figura 1. Gráfica solicitada, y dos intentos de reproducirla.



P: Haber, una más, ponte abusado.

C camina nuevamente y obtiene la gráfica mostrada en la figura 1, derecha.

P: ¿Cuál es el pico más difícil de construir, el primero o el segundo?

Todos los participantes: *El segundo.*

P: ¿Por qué?

C: Porque... tiene que ir..., cambia..., bueno, más bien tiene que cambiar una velocidad, de ir hacia adelante, ..., tiene que regresar en seguida.

C balbucea, duda, en realidad está pensando cómo expresar lo que se le pregunta. Identifica correctamente que en un pico las pendientes (velocidades) cambian bruscamente de signo, de + a - o viceversa o de + o - a cero.

P: ¿En cuánto tiempo tienes que hacer ese cambio para generar el pico?

C: En cero segundos.

Esta respuesta de C, *en cero segundos*, nos dice que C capta la naturaleza puntual del pico.

Una función que describa la gráfica de la figura 1, izquierda, debe ser continua en el pico

pero, el balbuceo de C tiene que ver con el hecho, desconcertante para él, de no saber qué signo tiene la pendiente en el pico. A la izquierda del pico la pendiente tiene un signo o es cero y a la derecha tiene otro signo o es cero, entonces tiene sentido, mucho sentido, dado que la gráfica-función es continua, preguntarse: ¿qué signo tiene la pendiente en el pico? Una cuestión crucial para el trabajo con las gráficas ligadas porque en ellas los picos se asocian indisolublemente con las discontinuidades, como se muestra en la gráfica 1 del anexo 2, en donde la parte superior está representada una gráfica de d/t y abajo la correspondiente gráfica v/t . En este caso el conflicto es: si a la izquierda del pico hay una velocidad y a la derecha otra de signo diferente, ¿qué signo tiene la velocidad en el pico?

La respuesta de C: *en cero segundos*, es repetida por el profesor.

P: En cero segundos, instantáneamente.

El profesor observa que otro de los participantes, Uriel (U), levanta la mano.

P: U, ¿dime?

U: Eh, como llevas una velocidad, también cuesta trabajo, este, como invertirla, y en una velocidad, bueno, un tiempo tan corto.

U argumenta físicamente, esto es, si alguien se mueve en cierta dirección y cambia de dirección necesita un *espacio de tiempo*, para hacerlo. No se puede cambiar de dirección (de pendiente + a - o viceversa) instantáneamente, o, *en un intervalo tan corto*, tan corto que matemáticamente no en un intervalo cortísimo, sino en un punto.

¿Cómo entienden el tiempo los participantes? intuitivamente como un continuo, en donde el tiempo existe en todo instante, no hay agujeros en el tiempo. Sin embargo, un pico existe en un instante, en un valor puntual del tiempo y a la vez ¿la velocidad en un pico no está definida! En una gráfica cartesiana ligada esto genera el par: pico \leftrightarrow discontinuidad.

Tanto Christopher como Uriel casi llegan a entender que es imposible reproducir el segundo pico, o cualquier pico, y su argumento está basado en tomar a su cuerpo como referente, porque han sentido la imposibilidad de hacer un cambio instantáneo de velocidad, y están asociando correctamente la velocidad con la pendiente de un segmento que corresponde a un intervalo del movimiento.

Estos dos alumnos son brillantes, sí, pero es la primera vez que se acercan a los conceptos pendiente-velocidad y continuidad-discontinuidad en gráficas cartesianas. Es la primera vez que interaccionan con un sensor de movimiento y es evidente que con la mediación de este

instrumento están construyendo significados que enraízan en las relaciones entre variación y acumulación. Además, las gráficas ligadas, una arriba y otra abajo, que comparten los mismos valores del eje horizontal, abren una relación entre pico y discontinuidad.

Los datos experimentales muestran, hasta ahora, que la investigación es viable, y que podemos acercar a más alumnos que estudian el bachillerato a conocimientos del Cálculo de forma intuitiva, auxiliándonos de la tecnología digital. Pero esto no quiere decir que no haya problemas, las fases 4 y 5 son difíciles de trabajar. En la fase 4, cuando se quiso establecer la relación del área bajo un escalón en la gráfica v/t , o el significado del área total bajo todos los escalones, con la gráfica d/t , no se entendía por qué el área es la distancia recorrida. En la fase 5, en la construcción de la gráfica de d/t teniendo la de v/t , se olvida que la distancia se va acumulando algebraicamente conforme transcurre el tiempo.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Benítez, A. F. (2012). *Estudio sobre la variación y el cambio: Mediación del sensor de movimiento* (Tesis doctoral inédita). Cinvestav-IPN, Cd. México.
- Damasio, A. (1996). *El error de Descartes*. Barcelona: Ed. Crítica.
- Kaput, J. J. (1994). Democratizing access to calculus: new routes using old roots. En A. Schoenfeld (Ed.), *Mathematical thinking and problem solving*, Capítulo 4, pp. 77–156. Hillsdale: Erlbaum.
- Kidron, I. (2014). Calculus teaching and learning. En S. Lerman (Ed.). *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp. 69-75). doi: 10.1007/978-94-007-4978-8.
- Kirsch, A. (2014). The fundamental theorem of calculus: visually? *ZDM Mathematics Education*, 46(4), 691-695.
- Llinás, R. (2001). *I of the vortex*. Massachusetts:MIT Press.
- Moreno-Armella, L. (2014). An essential tension in mathematics education. *ZDM Mathematics Education*, 46(4), 621-633.
- Pozo, J. I. (2001). *Humana mente, El mundo, la conciencia y la carne*. Madrid: Morata.
- Rasmussen, C., Marrongelle, K. & Borba, M. C. (2014). Research on calculus: what do we know and where do we need to go? *ZDM Mathematics Education*, 46(4), 597-615.
- Salat, R. S. (1993). *Elaboración, prueba y análisis de un modelo infinitesimal del Cálculo* (Tesis doctoral inédita). Cinvestav-IPN, Cd. México.

- Sánchez, L. (2014). *La praxis cognitiva y el SimCalc: significado del movimiento rectilíneo* (Tesis doctoral inédita). Cinvestav-IPN, Cd. México.
- Simon, M. (1995). Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective. *Journal for Research in Mathematics Education*, 26(2), 114-145.
- Thompson, P. W. (1994). Images of rate and operational understanding of the fundamental theorem of calculus. *Educational Studies in Mathematics*. 26(2-3), 229-274.
- Wertsch, J. (1991). *Voces de la Mente, Un enfoque sociocultural para el Estudio de la Acción Mediada*. Madrid: Visor.
- Zubieta, G. (1996). *Sobre número y variación: antecedentes del cálculo* (Tesis doctoral inédita). Cinvestav-IPN, Cd. México.

ANEXO 1

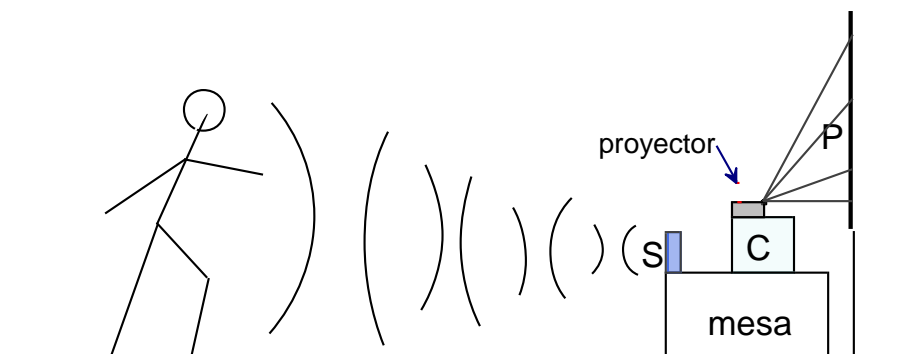
ARREGLO EXPERIMENTAL CON EL SENSOR DE MOVIMIENTO

Los instrumentos utilizados en este caso son, figura 1:

- 1) Sensor de movimiento (S)
- 2) Computadora (C)
- 3) Proyector (proyector)
- 4) Pantalla (P)

En un salón, un sujeto/objeto (S/O) se mueve frente al sensor de movimiento, éste emite pulsos de ultrasonido que pegan sobre los S/O frente a él. Si un objeto se mueve, los pulsos que pegan en él, al rebotar los registra el sensor, los manda a la computadora, los procesa y envía al proyector que muestra el resultado en la pantalla, frente al sujeto que la observa, figura 1.

Figura 1



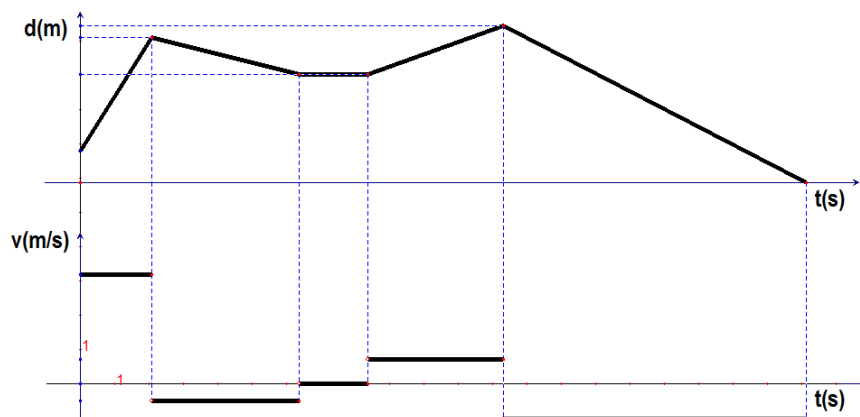
La computadora procesa el movimiento y lo muestra en la pantalla en formato de una gráfica cartesiana de distancia/tiempo, con una tabla numérica de tres columnas: tiempo (s); distancia (m) y velocidad (m/s).

ANEXO 2

GRÁFICAS LIGADAS DINÁMICAS

Se diseñaron construyeron y usaron applets de **gráficas ligadas dinámicas**, creadas con software de geometría dinámica, que nos dan gráficas como la mostrada en la figura 1.

Figura 1. Graficas ligadas dinámicas.

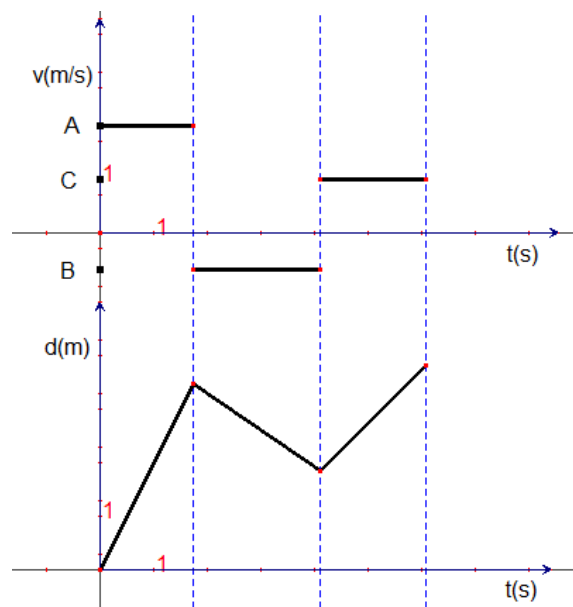


La gráfica ligada dinámica tiene una componente arriba y otra abajo, a este tipo de gráfico lo llamamos **gráficas ligadas dinámicas**, en éstas, los ejes horizontales tienen el mismo valor, de tiempo en este caso; en la figura 1, en la gráfica superior el eje vertical representa la distancia en metros, en la gráfica inferior, el eje vertical representa velocidad, en metros por segundo (m/s). Desde el punto de vista geométrico en la parte superior hay segmentos de recta caracterizados por su pendiente, la cual puede ser cero, en la parte inferior o gráfica de v/t está graficada la pendiente en cada intervalo. La gráfica de arriba está formada por segmentos de recta, cada segmento se puede manipular para variar su pendiente arrastrando cualquier punto de sus extremos y que es a la vez un pico de la gráfica, lo cual crea cambios en las alturas con respecto al eje horizontal, en los segmentos correspondientes de la gráfica de abajo.

Si ahora la gráfica de v/t está en la parte de arriba, y la de d/t está abajo, se tienen otras graficas ligadas dinámicas, como la de la figura 2, en la que la gráfica de arriba está formada por segmentos de rectas horizontales, los cuales se pueden manipular para variar su altura (velocidad), creando cambios en las pendientes de los segmentos correspondientes de la

gráfica de d/t . La altura o velocidad de cada segmento se puede manipular, moviendo al segmento hacia arriba o hacia abajo con los puntos de control A, B, C, que están sobre el eje vertical, o eje de la velocidad, creando los cambios correspondientes en la gráfica de d/t .

Figura 2.



ANEXO 3

FASES DE LA APLICACIÓN DE LAS SECUENCIAS DE ACTIVIDAD

Se constituyeron cinco fases, que agruparon secuencias de actividades aplicadas en sesiones cuya duración fue de 1° 20' cada una. Para cada fase se da su secuencia de actividad (S) o secuencias y objetivos, así como el número de sesiones.

Fase 1. Velocidad y pendiente. Dos sesiones.	
S	Objetivos
1-1	Operar el sensor de movimiento; caminar frente al sensor; interpretar la gráfica de su movimiento.
1-2	Caminar con velocidad constante frente al sensor; establecer como equivalentes la velocidad del movimiento y la pendiente de la recta de su gráfica; distinguir gráficamente tres rasgos (alejarse al sensor: /, acercarse: \, permanecer en reposo: -)
Fase 2. Imposibilidad de reproducir un pico. Dos sesiones.	
2-1	Reproducir una gráfica dada con picos caminando frente al sensor;
2-2	Conjeturar si es posible o no reproducir los picos de forma exacta.
Fase 3. Invariancia de la pendiente de una recta. Dos sesiones.	
3-1	Usar la geometría dinámica para llegar a la invariancia de la pendiente de una recta o segmento.
3.2	Relacionar la imposibilidad de formar un pico en la gráfica de d/t , de la fase 2, con la inexistencia de la pendiente en ese pico.
Fase 4. Relaciones entre las gráficas ligadas dinámicas, distancia-tiempo (d/t), y velocidad-tiempo (v/t). Dos sesiones.	
4-1	Manipular la gráfica d/t y encontrar las relaciones con la gráfica v/t : relacionar un segmento con rasgo / con un segmento arriba del eje horizontal en la gráfica v/t . relacionar los segmentos \, - , con sus respectivos segmentos en la gráfica v/t . describir que sucede en la gráfica v/t , si dos segmentos se alinean en la gráfica d/t ; relacionar un pico en la gráfica d/t con una discontinuidad en la gráfica v/t .
4-2	Manipular la gráfica v/t para obtener relaciones en la gráfica d/t ; entender que sucede cuando un segmento está sobre, debajo o sobre el eje horizontal; entender el significado del área bajo un escalón, y el significado del área sobre todos los escalones.
Fase 5. Construir ambas gráficas ligadas $d/t \rightarrow v/t$, $v/t \rightarrow d/t$ con software de geometría dinámica. Tres sesiones.	
5-1	Favorecer las relaciones vistas; construir la gráfica v/t si se tiene la gráfica d/t .
5-2	Entender que el área bajo un escalón es la distancia recorrida, cuando se tiene la gráfica v/t y se dese construir la gráfica de d/t , recordando que $v = dt$; construir el segmento asociado a ese escalón; entender el significado de áreas negativas.
5-3	Entender que la suma algebraica de áreas nos da la distancia del origen al final del recorrido, pero no necesariamente el total de la distancia recorrida; construir la gráfica completa d/t .