

## LA FENOMENOLOGÍA Y EL LENGUAJE DEL AZAR EN EDUCACIÓN SECUNDARIA OBLIGATORIA

Elena Hernández-Salmerón<sup>1</sup> – María del Mar López-Martín<sup>2</sup> – Carmen Batanero<sup>2</sup>  
elena.hernandez.salmeron@gmail.com - mariadelmarlopez@ugr.es - batanero@ugr.es

<sup>1</sup> IES Mediterráneo de La Línea de la Concepción, España <sup>2</sup> Universidad de Granada, España

Núcleo temático: Enseñanza y aprendizaje de la Matemática en las diferentes modalidades y niveles educativos.

Modalidad: Comunicación Breve (CB).

Nivel educativo: Medio o Secundario (12 a 15 años).

Palabras clave: Azar, Probabilidad, Educación secundaria, Lenguaje matemático.

### Resumen

*En este trabajo presentamos un estudio orientado a evaluar la comprensión de la fenomenología y el lenguaje del azar y la probabilidad en una muestra de 89 alumnos de primero y segundo curso de la Educación Secundaria Obligatoria. Los resultados muestran algunos errores en la distinción de fenómenos aleatorios y deterministas y dificultades, para ofrecer ejemplos de fenómenos aleatorios fuera de los juegos de azar y para ofrecer sinónimos de expresiones probabilísticas. Por último algunos estudiantes tratan los términos imposible e improbable como sinónimos. Observamos mejores resultados en los estudiantes de segundo curso, lo que evidencia la influencia de la enseñanza.*

### 1. Introducción

En el Decreto de Enseñanzas Mínimas para la Educación Secundaria los contenidos de probabilidad son incluidos en el bloque, denominado *Estadística y Probabilidad*, (MEC, 2006, pp. 754-760) desde primer curso, pero no es hasta tercero donde son trabajados con mayor detalle. El paso de la LOE a la LOMCE ha supuesto un cambio tanto en los contenidos a tratar como en los cursos donde se aborda la Probabilidad. En concreto, se incluye el tema de probabilidad en el segundo curso y, entre las dos posibles orientaciones de la enseñanza en tercer curso, sólo se introduce el tema en las matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas. En los primeros dos cursos de Educación Secundaria Obligatoria (en adelante ESO), las normativas curriculares incluyen los siguientes contenidos:

Fenómenos deterministas y aleatorios. Formulación de conjeturas sobre el comportamiento de fenómenos aleatorios sencillos y diseño de experiencias para su comprobación. Frecuencia relativa de un suceso y su aproximación a la probabilidad mediante la simulación o experimentación. Sucesos elementales equiprobables y no equiprobables. Espacio muestral en experimentos sencillos. Tablas y

diagramas de árbol sencillos. Cálculo de probabilidades mediante la regla de Laplace en experimentos sencillos (MECD, 2015, p. 413).

Dentro de este tema destacamos el importante papel dado al lenguaje y otras representaciones de los objetos matemáticos por Duval (1993), no sólo son indispensables para la comunicación del trabajo matemático, sino también para el desarrollo de la misma actividad matemática. Esta normativa ponen de manifiesto la importancia de que el estudiante pueda “comunicarse con las Matemáticas y sobre las Matemáticas” (p.407) y “[...] leer de forma comprensiva los enunciados y comunicar los resultados obtenidos” (p.408). Con el fin de asegurar un correcto conocimiento sobre probabilidad, es necesario que el estudiante adquiera de una forma adecuada el lenguaje y la fenomenología asociada a los fenómenos aleatorios y la probabilidad.

La doble función, representacional e instrumental, del lenguaje matemático es también resaltada por Godino, Batanero y Font (2007), pues el lenguaje permite designar objetos abstractos que no podemos percibir y además ayuda a operar con ellos. Por ello, los alumnos deben tener suficiente dominio del lenguaje para entender los problemas que se les plantean, resolver las tareas, comunicar las soluciones encontradas y justificarlas a otras personas o al profesor. Este dominio, en el caso particular de la probabilidad elemental, es el que tratamos de evaluar para los estudiantes de nuestra muestra.

El presente trabajo está enfocado en evaluar el nivel del lenguaje del azar de los estudiantes de los dos primeros cursos de ESO, que han seguido la normativa LOE. Concretamente se analiza, a través de un cuestionario, si los alumnos cuentan con vocabulario probabilístico, comprenden expresiones numéricas de la probabilidad e identifican, junto a las características que asignan a los sucesos aleatorios y deterministas, la graduación de las probabilidades asociadas a dichos sucesos.

Nos basamos en trabajos previos de síntesis, desarrollados por Green (1983) y Cañizares (1997), que recurrieron al uso de cuestionarios escritos. Dichos autores desarrollan un cuestionario con un contenido más amplio de la probabilidad para estudiantes con edades comprendidas entre 10 y 14 años, los cuales no habían recibido ninguna formación en el tema a evaluar. En el presente trabajo, se ha propuesto un ítem no tenido en cuenta por estos autores y por tal motivo, el trabajo que aquí se presenta contribuye a ampliar las investigaciones que se han llevado a cabo alrededor de este tema.

## 2. Fundamentos

Son numerosas las investigaciones que se han realizado sobre los principales elementos que favorecen el aprendizaje de los contenidos probabilísticos. En el desarrollo de la idea de azar en los niños destacamos las investigaciones de Fischbein (1987) e Inhelder y Piaget (1955). Inhelder y Piaget (1955) identifican cuatro fases por las que pasan los niños para desarrollar ese razonamiento en relación a diferentes contenidos de Ciencias y Matemáticas: Periodo sensorio-motor (0-2 años); Periodo pre operacional (2-7 años); Periodo de las operaciones concretas (7-11 años) y Período de las operaciones formales (11-15 años). Sin embargo, estas investigaciones han sido discutidas por Fischbein (1987), creando el autor su propio marco teórico mediante el concepto de intuición. Concretamente, el autor divide las intuiciones en *primarias* (proviene a partir de la experiencia) y *secundarias* (se forman a través de la formación en los centros educativos). Nótese que las ideas de Fischbein contrastan con las de Piaget e Inhelder, en cuanto al momento de desarrollo de los conceptos de aleatoriedad y probabilidad. Puede que un niño en edades anteriores a los 11 años no conozca todavía contenidos matemáticos suficientes como para establecer el valor de probabilidad de un suceso, o como para diferenciar los fenómenos aleatorios y los deterministas, pero es posible que intuya y compare la probabilidad de dos sucesos por simple experiencia, como intuición primaria. Fischbein sitúa esta intuición previa en relación a la aleatoriedad a los 7 años de edad, algo que contrasta fuertemente con los estudios de Piaget e Inhelder, que lo centran en edades a partir de los 11 años. En nuestro estudio, los alumnos con los que se está llevando a cabo la investigación se encontrarían en etapa donde se supone que el estudiante tiene la madurez necesaria para comprender los contenidos abstractos relativos a la probabilidad, la combinatoria y la correlación.

Con respecto al desarrollo sobre la idea de probabilidad, tanto en las investigaciones de Piaget e Inhelder (1951) como en Fischbein (1975) se observó que en el período de operaciones concretas mejoraba el resultado de la estimación de la frecuencia relativa en los sucesos debido al desarrollo de su intuición, mientras que en el periodo de las operaciones formales se concluyó que los niños eran capaces incluso de pensar estrategias relacionadas con la diferente frecuencia e identificar la probabilidad como fracción.

Por otro lado, Shuard y Rothery (1984) distinguen tres categorías en el análisis del lenguaje probabilístico: 1) Términos o expresiones de la vida cotidiana, cuyo significado no varía al utilizarlos en matemáticas; 2) Aquellas expresiones o palabras usadas en la vida diaria, pero cuyo significado puede variar cuando se utilizan en las matemáticas; 3) Términos que sólo se utilizan en la matemática.

En nuestro estudio nos centramos en la segunda categoría, es decir, consideramos aquellos términos que aun formando parte del lenguaje cotidiano, también tienen un significado probabilístico bien marcado, y que muchas veces el alumnado confunde con el atribuido en la vida real. La dificultad ligada a la interpretación de estos términos ha sido remarcada por algunos investigadores. Ejemplo de ello son las investigaciones llevadas a cabo entre 1978 y 1981 por Green (1983) quien analizó el grado de conocimientos en conceptos probabilísticos e intuiciones aleatorias de estudiantes de 11 a 16 años. Como réplica de esta investigación, Cañizares (1997), identifica el grado de comprensión del lenguaje probabilístico de un grupo de alumnos de varios centros públicos de Jaén, obteniendo resultados peores a los de Green (1983) e identificando cierta dificultad al diferenciar entre “imposible” e “improbable” y entre “muy probable” y “seguro” o la comprensión de “sucede al azar”.

### **3. Metodología**

El estudio realizado se enmarca dentro de la investigación descriptiva y aplicada. El objetivo que se plantea es la evaluación de los conocimientos básicos que tienen los estudiantes con respecto al lenguaje y fenomenología del azar. Puesto que la muestra se ha seleccionado de una forma intencional, no se pretende confirmar estadísticamente hipótesis.

Para llevar a cabo la investigación se ha contado con la participación de 89 estudiantes (56 de primero y 33 de segundo), con edades comprendidas entre 12 y 15 años, de un centro público de Educación Secundaria de La Línea de la Concepción (Cádiz). Los alumnos del primer curso de ESO provienen de tres centros de Enseñanza de Educación Primaria distintos de la ciudad, y como consecuencia el nivel de conocimientos matemáticos ha sido muy diverso entre ellos. Por otro lado, aunque todos los estudiantes de segundo cursaron primero en el mismo instituto, algunos no llegaron a estudiar estadística y probabilidad puesto que tuvieron en primero distintos profesores.

Durante el proceso de recogida de datos se contó con la colaboración de los docentes de estos grupos y se les explicó a los estudiantes la importancia que tenía realizar de una forma adecuada el cuestionario. Además, en la sesión posterior a la realización del cuestionario, se discutió junto a los estudiantes los resultados obtenidos, sirviendo como actividad formativa.

### **3.1 Instrumento**

La herramienta empleada en la investigación ha sido elaborada en base a los trabajos de Batanero y Godino (2004), Cañizares (1997) y Green (1993). El cuestionario, en términos generales, se puede dividir en dos grandes bloques: un primer bloque centrado en abordar la discriminación de fenómenos aleatorios y deterministas e indirectamente las características y fenomenología que los alumnos atribuyen al azar y un segundo bloque donde se pretende conocer el lenguaje (palabras, expresiones verbales que se utilizan para plantear cuestiones, símbolos matemáticos, representaciones gráficas, diagramas y tablas) que los alumnos asocian a las situaciones aleatorias y la probabilidad. En este trabajo analizamos un ítem de cada uno de los bloques, que se recogen en la Figura 1.

El ítem 1 está dirigido a evaluar el reconocimiento de la aleatoriedad en distintos contextos, es decir, se espera que los estudiantes den algún ejemplo distinto a los ejemplos relacionados con el azar. Posteriormente clasificamos los contextos de los ejemplos propuestos de acuerdo a los contextos considerados en las Pruebas PISA (OCDE, 2013): Personal; Profesional; Social y Científico.

El segundo ítem ha sido adaptado de un ejercicio propuesto por Batanero y Godino (2004) y cuyo objetivo está centrado en que los estudiantes usen el vocabulario probabilístico (trabajado durante la realización de la prueba) para dar una valoración cualitativa de probabilidad. Señalamos que las respuestas ofrecidas vienen condicionadas por la época en la que se llevó a cabo el cuestionario (meses de abril y mayo) y por la climatología de la zona.

**Ítem 1.** Pon ejemplos de situaciones de tu vida diaria (distinta de juegos) en las que interviene el azar.

**Ítem 2.** El profesor ha pedido a Daniel que prepare un pronóstico del tiempo que hará mañana en La Línea de la Concepción ofreciéndole varias opciones: a) Lloverá todo el día; b) Lloverá solo un rato; c) La temperatura a mediodía será 40 grados o mayor; d) Habrá una temperatura a mediodía entre 10 y 20 grados; e) Mañana nevará en La Línea; f) Lloverá tanto que habrá inundaciones

Completa cada frase según la posibilidad que crees de que ocurra (o usando las frases del ítem 2). Usa como ejemplo la siguiente: **“Es poco probable que llueva todo el día”.**

a) \_\_\_\_\_ que llueva solo un rato.  
 b) \_\_\_\_\_ que la temperatura a mediodía sea 40 grados o mayor.  
 c) \_\_\_\_\_ que haga una temperatura a mediodía entre 10 y 20 grados.  
 d) \_\_\_\_\_ que mañana nieve en La Línea.  
 e) \_\_\_\_\_ que llueva tanto que haya inundaciones.

Figura 1. Ejemplos de algunas de las tareas propuestas en el cuestionario

**4. Resultados**

A partir del análisis del ítem 1 (Tabla 1), se ha observado que el número de respuestas correctas por el alumnado es similar en ambos cursos con un número medio de ejemplos (0,94 en 1º y 0,93 en 2º curso) que no llega a la unidad. Aunque en el ítem se ha indicado que los ejemplos debían ser distintos del azar, son muchos los alumnos que han contestado con ejemplos de este tipo.

Tabla 1. *Resumen de respuestas al ítem 1*

	1º curso (n=56)	2º curso (n=33)
Número de ejemplos correctos	52	31
Número de ejemplos incorrectos	14	2
No responden	15 alumnos	10 alumnos

Por otro lado, señalamos el alto porcentajes de estudiantes de primero (27%) y de segundo (30%) que no han sabido responder con algún ejemplo de su vida cotidiana. Este hecho es destacable ya que sería importante que los alumnos lleguen a reconocer situaciones aleatorias de su vida diaria, diferentes a los juegos de azar, donde puede aplicarse el cálculo de probabilidades. Entre los ejemplo correctos destacamos una variedad de ellos relacionados con los contextos “Personales” o “Escolares”, la mayoría indica situaciones obtenidas de su propia experiencia y en la que claramente inferimos que comprenden el significado del azar (Figura 2).

3. Pon ejemplos de situaciones de tu vida diaria (distinta de juegos) en las que interviene el azar.
1. Cuando se elige quien friega los platos.
  2. Cuando el maestro elige un alumno para salir a pizarra.
  3. Cuando se sortea algo.
  4. Cuando se elige quien cocina.

Figura 2. Respuesta al ítem1 de la alumna 20 (1ºESO B)

Tras una primera lectura de las respuestas del ítem 2 (Tabla 2) observamos que los alumnos diferencian principalmente tres niveles de probabilidad: “Probable”, “Imposible” o “Seguro”. Las expresiones más empleadas han sido “Puede” y “Es imposible”, además, destacamos la asociación de las expresiones “Seguramente que no” y “Es poco probable” como expresiones cercanas a imposible.

Tabla 2. Porcentaje de alumnos que califica cada suceso con diferente probabilidad

	Imposible		Poco probable		50%		Muy probable		Seguro	
	1º	2º	1º	2º	1º	2º	1º	2º	1º	2º
Llover un rato	13,7	18,2	21,6	30,3	52,9	48,5	9,8	3,0	0,0	0,0
Más de 40º	54,9	48,5	29,4	24,2	5,9	27,3	0,0	0,0	5,9	0,0
10º-20º	5,9	9,1	11,8	9,1	54,9	57,6	19,6	15,2	7,8	9,1
Nevar	88,2	100,0	9,8	0,0	0,0	0,0	2,0	0,0	0,0	0,0
Inundaciones	45,1	51,5	35,3	18,2	13,7	30,3	2,0	0,0	3,9	0,0

Se ha observado que más de la mitad del alumno de ambos cursos han asignado la probabilidad de 50% a los sucesos “Llover un rato” y “10-20 grados”, por lo que se deduce que no han sabido precisar el grado de probabilidad asociada a cada uno de los sucesos (véase Figura 3).

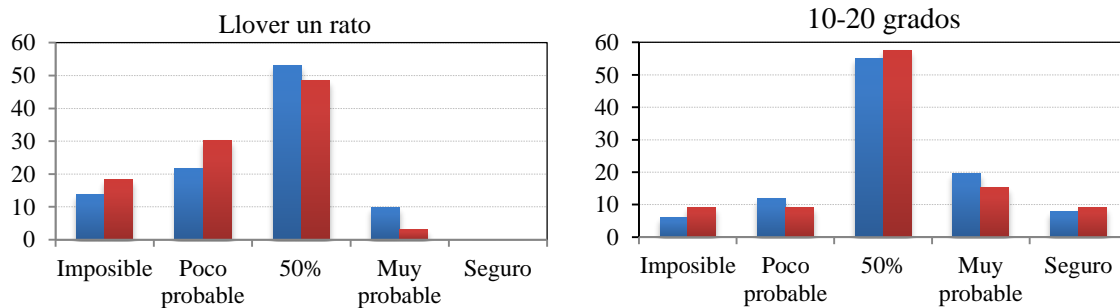


Figura 3. Sucesos considerados equiprobables (en azul 1º ESO y en rojo 2º ESO)

Por otro lado, los sucesos “Más de 40 grados” y “Nevar” han sido clasificados por la mayoría de los estudiantes como una situación “Imposible” (véase Figura 4). Este último resultado,

pone de manifiesto la confusión de suceso imposible por suceso improbable, conclusión también obtenida por Cañizares (1997).

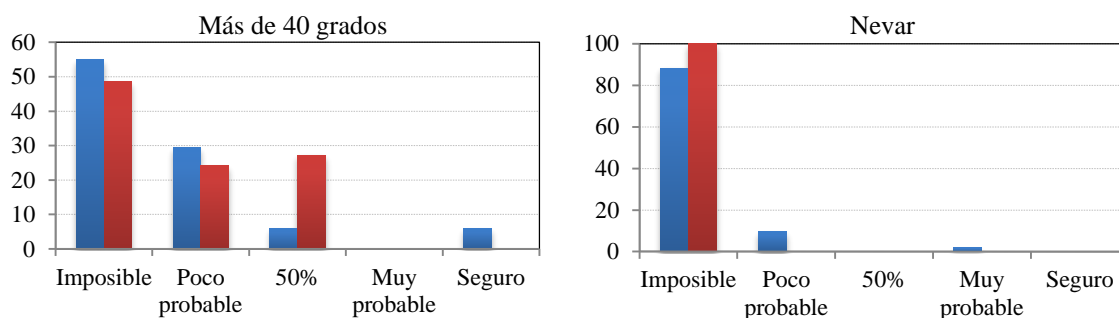


Figura 4. Confusión entre suceso improbable e imposible (azul 1º ESO y rojo 2º ESO)

Por último, en el caso del suceso “Inundaciones” la mayoría de los alumnos de 2º ESO colocan la situación como “Imposible” (de nuevo confusión con muy poco probable) y casi la mitad de los alumnos de primero así lo corroboran. Sin embargo, debido a la situación específica del campo de Gibraltar y que en algunas ocasiones llueve con mucha fuerza, hay alumnos que lo sitúa como una situación “Muy probable” o “Segura”.

## 5. Conclusiones e implicaciones docentes

La herramienta utilizada en la investigación nos ha permitido evaluar los conocimientos presentes en el alumnado participante sobre la fenomenología del azar y el lenguaje de la probabilidad, así como las carencias que éstos tienen principalmente en lo que a lenguaje probabilístico se refiere. Los resultados en general han sido buenos, ya que los alumnos han mostrado conocimientos de la fenomenología del azar, más allá de los juegos. Por otro lado, las principales carencias detectadas han sido: 1) Errores en la distinción de fenómenos aleatorios y deterministas; 2) Carencia de vocabulario relativo al azar y dificultad en la búsqueda de sinónimos de expresiones relacionadas con la probabilidad a distintos niveles; 3) Confusión entre los términos “Imposible” e “Improbable”, coincidiendo con los resultados obtenidos por Cañizares (1997). Los resultados presentados en este trabajo pueden ser tenidos en cuenta con el fin de mejorar la enseñanza de la probabilidad.

**Agradecimiento:** Proyecto EDU2016-74848-P (AEI, FEDER) y grupo FQM126 (Junta de Andalucía).



## Referencias bibliográficas

- Batanero, C. y Godino, J. D. (2004). *Estocástica y su didáctica para maestros*. Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada.
- Cañizares, M. J. (1997). Influencia del razonamiento proporcional y combinatorio y de creencias subjetivas en las intuiciones probabilísticas primarias. Tesis doctoral. Universidad de Granada.
- Duval, R. (1993). *Semiosis et noesis*. México: Sección de Matemática Educativa del CINVESTAV-IPN.
- Fischbein, E. (1987). *Intuition in science and mathematics*. Dordrecht: Reidel.
- Fischbein, E. (1975). *The intuitive sources of probabilistic thinking in children*. Dordrecht: Reidel.
- Green, D. R. (1983). A survey of probabilistic concepts in 3000 pupils aged 11-16 years. En D. R. Grey et al. (Eds.), *Proceedings of the First International Conference on Teaching Statistics* (Vol.2, pp.766-783). Sheffield: Teaching Statistics Trust.
- Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education*, 39(1-2), 127-135.
- Inhelder, B. y Piaget, J. (1955). *De la logique de l'enfant à la logique de l'adolescent*. París: Presses Universitaires de France.
- MEC, Ministerio de Educación y Ciencias (2006). Real Decreto 1513/2006, de 7 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas de la Educación Primaria. España: Ministerio de Educación y Cultura.
- MECD, Ministerio de Educación, Cultura y Deporte (2015). Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato. Madrid: Autor.
- OCDE (2013). *PISA 2012 Assessment and Analytical Framework: Mathematics, Readings, Science, Problem Solving and Financial Literacy*, OECD Publishing.
- Piaget, J. e Inhelder, B. (1951). *La genése de l'idée de hasard chez l'enfant*. París: Presses Universitaires de France.
- Shuard, H. y Rothery, A. (Eds.) (1984). *Children reading mathematics*. London: Murray.