

EXPLORANDO GRÁFICO E DOMÍNIO DE FUNÇÕES DE DUAS VARIÁVEIS EM AMBIENTES INFORMATIZADOS

Fabio Luiz de Oliveira
professorfabio.oliveira@gmail.com
Faculdade Pres. A. C.de Cons. Lafaiete

Regina Helena de O. Lino Franchi
regina.franchi@ufabc.edu.br
Universidade Federal do ABC
Brasil

Núcleo temático: Recursos para o ensino e aprendizagem das matemáticas

Modalidade: CB

Nível educativo: 4 Terciario

Palavras chave: Ensino de Cálculo, Funções de duas variáveis, Tecnologias Digitais, Seres-humanos-com-mídias.

Resumo

Este trabalho tem como objetivo apresentar parte dos resultados de uma pesquisa que buscou investigar a produção de ideias matemáticas acerca de funções de duas variáveis em ambientes informatizados. A pesquisa, de cunho qualitativo, é fundamentada no constructo teórico seres-humanos-com-mídias, descrito por Marcelo Borba e Monica Villarreal. Foi desenvolvida com alunos de um curso de engenharia, na disciplina Cálculo Diferencial e Integral III. Neste trabalho apresentamos e discutimos atividades relativas à exploração do gráfico e do domínio de funções de duas variáveis, utilizando o software MAXIMA. As atividades foram planejadas considerando-se as características do software, especialmente as possibilidades de visualização, buscando favorecer a transição do cálculo de uma para várias variáveis. Foram desenvolvidas de modo a estimular as interações no coletivo de seres-humanos-com-mídias e a exploração dos conceitos. Estes foram posteriormente formalizados a partir das ideias matemáticas produzidas pelos estudantes no coletivo. A análise dos dados fornece indícios de que existiu produção de conhecimento acerca de gráfico e domínio de funções de duas variáveis, sendo que cada mídia teve sua importância e influência nessa produção.

Introdução

Muitos são os desafios enfrentados por professores e estudantes no que diz respeito ao ensino e à aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral. São altos os índices de reprovação e desistências por parte dos estudantes. Entre as razões apontadas nas pesquisas para as

dificuldades estão: as características específicas dos processos envolvendo infinitos e infinitésimos e da abstração requeridos pelo Pensamento Matemático Avançado (Dreyfus, 1991; Tall, 1991), a forma como os conteúdos são trabalhados em sala de aula que enfatizam a repetição, memorização e as técnicas em detrimento da compreensão dos conceitos (Franchi, 1993; Villareal, 1999). Algumas pesquisas (Imafuku, 2008; Alves, 2010) destacam ainda as dificuldades relativas à transição do Cálculo de uma para várias variáveis tais como: visualização e representação simbólicas mais complexas, mudanças de significados conceituais, regras operatórias particulares, entre outras.

Já na década de 1980 um movimento, conhecido no cenário internacional como a Reforma do Cálculo, indicava que os problemas e conceitos deveriam ser abordados de forma algébrica, numérica e gráfica (o que era conhecido como “Regra dos Três”) e posteriormente incluiu-se a forma verbal ou descritiva (expandindo-se para a “Regra dos Quatro”) (Stewart, 2010). Um dos pontos sugeridos neste movimento foi o uso da tecnologia, como calculadoras gráficas e *softwares* educacionais, para a aprendizagem e resolução de problemas.

Vivenciando como professores muitas das dificuldades apontadas no contexto descrito e tendo interesse pelo uso da tecnologia para o ensino do Cálculo, realizamos uma pesquisa buscando responder a seguinte questão: ***“Que ideias matemáticas acerca de funções de duas variáveis são produzidas em um coletivo de seres humanos-com-mídias?”***. Descreveremos a seguir os fundamentos teóricos norteadores da pesquisa.

Tecnologias e Produção do conhecimento

O constructo teórico dos seres-humanos-com-mídias é apresentado por Borba e Villarreal (2005). Para os autores o conhecimento é sempre produzido por um coletivo de atores humanos e não humanos, ou seja, por um coletivo composto por seres-humanos-com-mídias, que constitui a unidade básica do conhecimento. Essa concepção se fundamenta na ideia de que o pensamento humano é reorganizado com a presença de diferentes mídias, como os computadores e suas diferentes interfaces (Tikhomirov, 1981). E também nas ideias de Lévy (1993, 1999) sobre pensar coletivamente e sobre a noção de tecnologias da inteligência caracterizando três técnicas que estão associadas ao conhecimento e consideradas como extensões de nossa memória: a oralidade, a escrita e a informática.

Borba e Villarreal (2005) enfatizam que precisamos entender que há mudanças no pensamento das pessoas, quando estas estão envolvidas em atividades em que os computadores estão disponíveis. Não se trata de julgar se há melhoria ou não, mas sim de identificar as transformações. Por isso, admitindo que o pensamento é reorganizado na presença das diferentes mídias (oralidade, escrita e informática), as consideram também como atores que constituem o coletivo pensante, tendo papel importante na produção do conhecimento.

Destacamos dois pontos que nos parecem relevantes ao considerarmos os softwares constituindo o coletivo: as possibilidades de experimentar e testar mudanças nos objetos estudados e a visualização. As estratégias com foco na visualização são favorecidas com o uso das tecnologias digitais, sendo esta o principal meio de *feedback* fornecido pelos computadores (Borba & Villareal, 2005). Para Machado (2008) as imagens provocam processos mentais como abstrações, associações e articulações, desta forma propiciando a descoberta. Ainda, a visualização através da tela do computador “dá possibilidade de se elaborar um conjunto de argumentos (conjecturas) e ainda utilizá-los para resolver problemas, permitindo aos estudantes construir e relacionar as várias representações da informação e construir os conceitos matemáticos” (p.107). Para Franchi (2007) a visualização facilitada pela informática torna possível testar mudanças nas características algébricas e observar variações no aspecto gráfico. “A comparação entre as representações gráficas, algébricas e numéricas, a observação e a reflexão sobre o observado podem levar à elaboração de conjecturas” (p. 184), o que pode contribuir para produção do conhecimento matemático.

Tendo sintetizado os fundamentos teóricos que nortearam a pesquisa, apresentamos a seguir o contexto em que se desenvolveu e seus procedimentos metodológicos.

Contexto e Metodologia

A pesquisa, de cunho qualitativo, envolveu 43 alunos da disciplina Cálculo Diferencial e Integral III de um curso de Engenharia em uma Instituição privada de Ensino Superior no Brasil. Teve o propósito de investigar a produção do conhecimento acerca de

funções de duas variáveis, num coletivo de seres-humanos-com-mídias, tendo como atores o *software* MAXIMA e os alunos em grupos, interagindo com o professor-pesquisador.

Optamos pelo MAXIMA por ser um *software* livre do tipo CAS (Computer Algebra System), que possibilita tratamento simbólico dos conteúdos, além de abordagens numéricas e gráficas, em especial o esboço e a manipulação de gráficos em três dimensões, com diferentes possibilidades de visualização.

Nas aulas regulares da disciplina desenvolvemos atividades de caráter exploratório, com questões abertas, com o intuito de possibilitar a discussão, a interação (aluno-aluno, aluno-computador, aluno-professor), a compreensão e conseqüentemente a produção do conhecimento acerca de funções de duas variáveis. Assim havia inicialmente a exploração orientada dos temas, permitindo aos alunos transitarem nas diferentes mídias e posteriormente as sistematizações teóricas dos conceitos. Os alunos trabalharam em pequenos grupos.

Os dados foram coletados por meio dos registros dos alunos das atividades realizadas, das avaliações escritas e das anotações do caderno de campo do pesquisador. A análise buscou indentificar o conhecimento matemático produzido pelos estudantes considerando a visualização, a transição do cálculo de uma para duas variáveis e o papel desempenhado pelas mídias no coletivo de seres-humanos-com-mídias.

Desenvolvimento e Resultados da Pesquisa

As atividades relativas ao gráfico e ao domínio de funções de duas variáveis, que abordamos neste artigo, foram desenvolvidas em três encontros de 100 minutos cada, sendo os dois primeiros em laboratório com uso do software e o último em sala de aula. Os conceitos foram introduzidos a partir da exploração de imagens obtidas por meio do MAXIMA e sistematizados de modo teórico no terceiro encontro. Os estudantes receberam um roteiro com sugestões de funções para serem trabalhadas e questões estimulando a observação e a manipulação das imagens obtidas como gráfico das funções, assim como da relação entre cada gráfico e a região plana obtida por sua projeção no plano xy , que posteriormente seria identificada como representação gráfica do domínio da função.

Inicialmente foram sugeridas as funções $f(x, y) = x^2 + y^2$ e $g(x, y) = \cos\left(\frac{x^2 + y^2}{100}\right)$

com domínio \mathbb{R}^2 . Foi solicitado aos alunos que esboçassem e explorassem o gráfico das funções considerando diferentes intervalos de variação das variáveis x e y . Foram escolhidas de modo a chamar a atenção para o fato de que, para determinadas funções, um único intervalo de variação pode mostrar apenas parte do gráfico, não dando nenhuma ideia sobre a função de modo amplo. A possibilidade de variar os intervalos foi bastante explorada pelos estudantes. Na figura 1 temos imagens produzidas pelos estudantes para a segunda função.

Figura 1: Gráfico da segunda função estudada

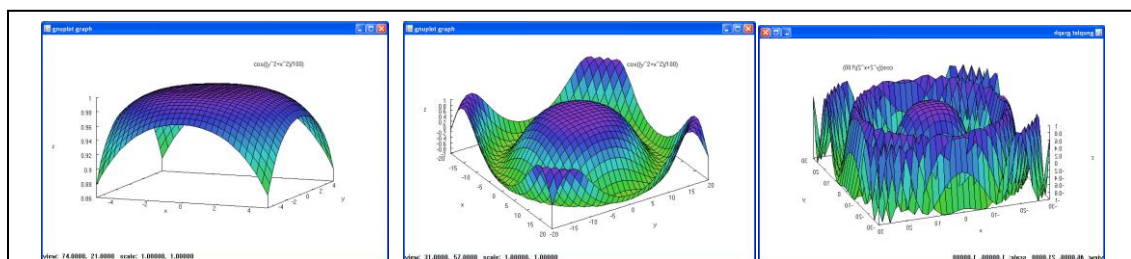


Figura 1: Imagens do gráfico da função $g(x, y) = \cos\left(\frac{x^2 + y^2}{100}\right)$ com diferentes intervalos de variação das variáveis x e y . As imagens foram produzidas pelos estudantes na pesquisa.

A visualização possível pelo uso do software e a análise das imagens obtidas a partir das variações dos intervalos de x e de y contribuíram para a produção de ideias matemáticas acerca dos gráficos, que se mostraram nos registros escritos e manifestações orais dos estudantes. Entre elas destacamos: “Os gráficos de funções de duas variáveis são superfícies em três dimensões”; “Um gráfico não muda quando modificamos os intervalos de variação das variáveis independentes, apesar das modificações da aparência do gráfico”.

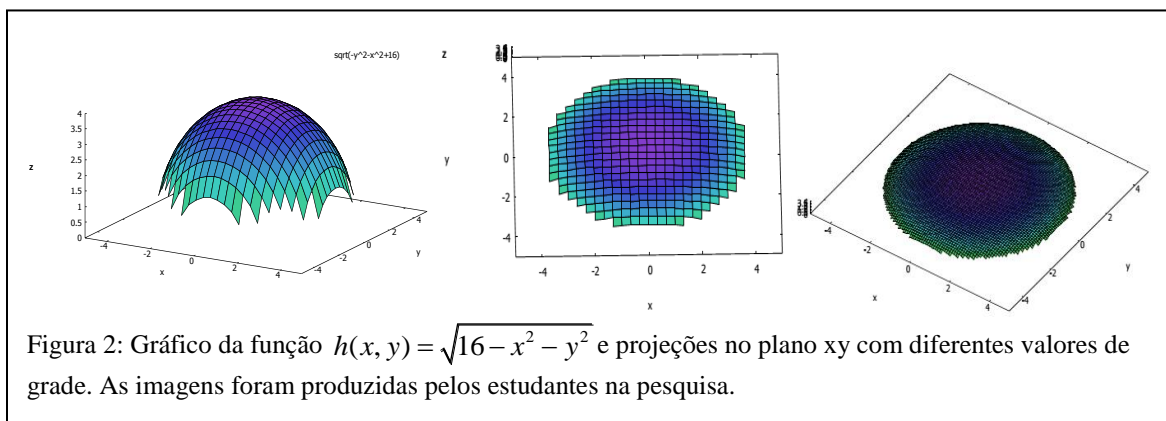
Borba e Villarreal (2005), citando Levy (1993), destacam o papel do computador no raciocínio matemático: “a possibilidade de ver os efeitos da mudança de um parâmetro em uma equação pode

contribuir para a geração de novas conjecturas. Este tipo de utilização do computador, na aquisição e processamento de informações, pode transformar o raciocínio matemático” (p. 87).⁴⁸

Indagamos se é possível calcular o valor da função e esboçar o gráfico para qualquer valor de x e de y . O domínio foi definido como o conjunto de valores para os quais é possível calcular o valor da função. Os alunos analisaram também outras funções sugeridas, fazendo uso de diferentes mídias: alguns usaram os recursos de cálculo algébrico do software e outros fizeram uso da mídia lápis-papel (escrita). Os resultados foram comparados e discutidos. Buscamos relacionar o domínio com a visualização da região plana obtida pela projeção do gráfico da função no plano xy .

Na figura 2 temos o gráfico da função $h(x, y) = \sqrt{16 - x^2 - y^2}$ e sua projeção no plano xy , sendo a terceira imagem a projeção obtida com maiores valores de grade, recurso que melhora a visualização da região e da definição de seu contorno.

Figura 2: Gráfico e projeção da função $h(x,y)$

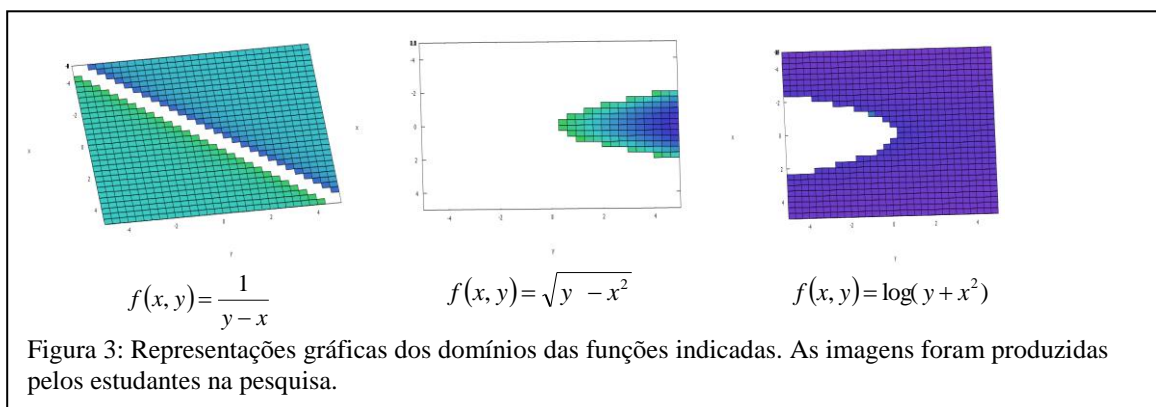


Machado (2008), ao discorrer sobre visualização, destaca que as imagens provocam processos mentais como abstrações, associações e articulações, dessa forma propiciando a descoberta. A associação das imagens da projeção do gráfico no plano xy com a localização dos pontos para os quais é possível calcular o valor real da função pode ter contribuído para a produção de conhecimento acerca do domínio de funções de duas variáveis. Na figura 3

⁴⁸ Tradução nossa de “the possibility of seeing the effects of changing a parameter in an equation may contribute to the generation of new conjectures. This kind of use of the computer, in the acquisition and processing of information, may transform mathematical reasoning”.

temos algumas imagens produzidas pelos estudantes para visualização da representação gráfica do domínio.

Figura 3: Representações Gráficas de domínios de funções



Embora os contornos não estejam bem delimitados, os estudantes não tiveram dificuldade em identificar que as regiões são delimitadas por curvas planas, embora estas não estejam visíveis como tal nas imagens obtidas, devido a limitações do software. Tinham consciência de que as imagens poderiam ser melhoradas com o aumento da grade. Nos diálogos dos estudantes sobre a determinação da fronteira da região do domínio identificamos aspectos da transição do cálculo de uma para duas variáveis. Os estudantes relacionaram os extremos dos intervalos reais, que são domínios de funções reais de uma variável, com as curvas que delimitam as regiões planas que são domínios de funções de duas variáveis.

As imagens obtidas pelas projeções dos gráficos no plano xy foram comparadas com as análises das possibilidades de cálculo dos valores das funções, a partir de suas expressões algébricas, feitas utilizando os recursos de cálculo do MAXIMA ou a mídia lápis-papel. Por meio dessa comparação (transitando entre a representação gráfica e algébrica, entre o visual e o calculado) as ideias matemáticas acerca do domínio de funções de duas variáveis foram produzidas, acreditamos que de forma diferente da que seria possível apenas usando a mídia lápis-papel ou apenas as imagens produzidas por meio do *software*.

Considerações Finais

Na pesquisa descrita buscamos identificar como se dá a produção de conhecimento acerca do gráfico e do domínio de funções de duas variáveis, em um coletivo de seres-humanos-com-mídias, tendo como atores o *software* MAXIMA, os computadores e os alunos em grupos, interagindo com o professor-pesquisador. Descrevemos e analisamos atividades nas quais os estudantes, com uso das Tecnologias Digitais e outras mídias, como o lápis-papel, constituindo um coletivo de seres humanos-com-mídias, puderam explorar conceitos matemáticos acerca de funções de duas variáveis, de modo a elaborar e testar conjecturas e produzir ideias matemáticas referentes ao tema. Para tanto buscamos aproveitar as características que as mídias utilizadas oferecem, como as possibilidades de trabalhar diferentes representações: gráficas, numéricas e algébricas.

Pode-se dizer que os recursos de visualização possibilitaram produção de conhecimento diferente do que seria produzido apenas com a oralidade ou escrita. Imagens de superfícies tridimensionais obtidas por meio de softwares são frequentemente encontradas nos livros de Cálculo. No entanto é significativamente diferente olhar uma imagem pronta ou produzi-la com a possibilidade de mudar expressões, variar parâmetros, elaborar conjecturas a partir do observado, testá-las e tirar conclusões. As ideias matemáticas produzidas pelos estudantes na exploração inicial foram fundamentais para a formalização e para a abordagem teórica dos conceitos de gráfico e domínio de funções de duas variáveis, feita posteriormente.

Referências bibliográficas

Alves, F. R. V. (2011) *Aplicações da sequência Fedathi na promoção do raciocínio intuitivo no cálculo a várias variáveis*. (Tese de Doutorado em Educação, Universidade Federal do Ceará). Disponível em <http://www.repositorio.ufc.br/handle/riufc/3166>

Borba, M. C. e Villareal, M. E. (2005) *Humans-with-media and the reorganization of mathematical thinking: Information and communication technologies, modeling, experimentation and visualization*. New York: Springer.

Dreyfus, T. (1991) Advanced Mathematical Thinking Processes. In: Tall, D. O. (Ed) *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 25-41). Londres: Kluwer Academic Publisher.

Franchi, R. H. O. L. (1993) *A modelagem matemática como estratégia de aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral nos cursos de Engenharia*. (Dissertação de Mestrado, Universidade Estadual Paulista) Rio Claro: UNESP.

Franchi, R. H. O. L. (2007) Ambientes de aprendizagem fundamentados na Modelagem Matemática e na informática como possibilidades para a Educação Matemática. In: J. C. Barbosa, A. D. Caldeira & J. L. Araújo (Orgs.) *Modelagem Matemática na Educação Matemática Brasileira: pesquisas e práticas educacionais* (pp. 177-193). Recife: SBEM.

Imafuku, R. S. (2008) *Sobre a passagem do estudo de uma variável real para o caso de duas variáveis* (Dissertação de Mestrado, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo). Disponível em <https://sapientia.pucsp.br/handle/handle/11354>

Lévy, P. (1993) *As tecnologias da inteligência: o futuro do pensamento na era da informática*. Rio de Janeiro: Editora 34.

Lévy, P. (1999) *Cibercultura*. São Paulo: Editora 34.

Machado, R. M. (2008) *A Visualização na resolução de problemas de Cálculo Diferencial e Integral no ambiente computacional MPP*. (Tese de Doutorado em Educação, Universidade Estadual de Campinas). Disponível em <http://www.bibliotecadigital.unicamp.br/document/?code=vtls000440070>.

Stewart, J. (2010). *Cálculo*. Cengage Learning. 2010.

Tall, D. O. (1991) The Psychology of Advanced Mathematical Thinking. In D. O. Tall (Ed.) *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 3-21). Londres: Kluwer Academic Publisher.

Tikhomirov, O. K. (1981) The psychological consequences of computerization. In J. V. Wertsch (Ed) *The concept of activity in soviet psychology*. New York: M. E. Sharpe.