

## PROSPECTIVA DE UNA INVESTIGACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA EN UN CONTEXTO DE TEORÍA DE GRAFOS

Angélica Martínez Zarzuelo – M<sup>a</sup> José Fernández Díaz – Eugenio Roanes Lozano  
[angelica.martinez@ucm.es](mailto:angelica.martinez@ucm.es) – [mjfdiaz@edu.ucm.es](mailto:mjfdiaz@edu.ucm.es) – [eroanes@mat.ucm.es](mailto:eroanes@mat.ucm.es)  
Universidad Complutense de Madrid, España

Núcleo temático: Investigación en Educación Matemática.

Modalidad: CB

Nivel educativo: Nivel educativo medio o secundario (12 a 15 años).

Palabras clave: estructuración de contenidos, teoría de grafos, educación matemática, prospectiva.

### Resumen

*Una estructuración adecuada de los contenidos objeto de enseñanza a cualquier nivel educativo es fundamental para el correcto desarrollo de todo proceso de enseñanza aprendizaje. Recientemente se ha llevado a cabo una investigación a este respecto en un contexto de teoría de grafos. Concretamente, se ha diseñado y puesto en práctica una metodología para la estructuración del conocimiento matemático haciendo uso de técnicas de análisis propias de la teoría de grafos y software especializado. Se han obtenido así conclusiones relevantes para la comunidad educativa y se han determinado nuevas líneas de investigación. Entre estas nuevas líneas se encuentran: la realización de análisis complementarios a los ya efectuados sobre la estructura de grafo; la modelización de la red de contenidos educativos mediante otro tipo de estructuras como el hipergrafo; la aplicación de la metodología en otras áreas de conocimiento diferentes a la matemática, en varias etapas educativas, así como en distintos sistemas educativos; el análisis y la comparación de concreciones curriculares como libros de texto; e incluso el diseño de propuestas curriculares concretas. Todo ello, junto con otros propósitos explícitos, dota a la investigación de una prospectiva viable ya en fase de desarrollo.*

### Introducción

Como es bien conocido, la estructuración del conocimiento es un proceso fundamental en todo ámbito del saber. Diferentes criterios de estructuración pueden determinar diversos tipos de estructura para un mismo campo de conocimiento. Una opción de interés para el estudio de esas posibles estructuras es una representación gráfica de las mismas. En este sentido cabe mencionar, entre otras muchas opciones, los mapas conceptuales (Novak & Gowin, 1988), los mapas mentales (Buzan & Buzan, 1996), los mapas semánticos (Pearson & Johnson,

1978; Johnson & Pearson, 1984; Fisher, 1990; Heimlich & Pittelman, 1990a; Heimlich & Pittelman, 1990b; Heimlich & Pittelman, 1991; Heimlich & Pittelman, 2001), los mapas cognitivos (Kitchin, 1994; de Castro, 1999), los mapas de pensamiento (Hyerle, 1996; Hyerle & Alper, 2011), los mapas de conocimiento (Howard, 1989; O'Donnell, Dansereau & Hall, 2002), los mapas de ideas (Armbruster & Anderson, 1982), los diagramas de flujo (Geva, 1985), las redes conceptuales (Galagovsky, 1993, 1996), las redes asociativas pathfinder (Schvaneveldt, 1990), etc.

La opción que se ha empleado en la investigación, cuya prospectiva aquí se presenta, se corresponde exactamente con la estructura de grafo. El uso de esta estructura conlleva, entre otras ventajas, la posibilidad de llevar a cabo diversos análisis fundamentados en diferentes técnicas inherentes a la teoría de grafos (Kaufmann, 1976; Abellanas & Lodaes, 1990; Kocay & Kreherv, 2005; Balakrishnan & Ranganathan, 2012).

### **Investigación**

El objetivo general de la investigación realizada (Martínez-Zarzuelo, 2015) se centra en proponer y aplicar una metodología que permita el análisis de nuevas formas de estructuración del conocimiento, fundamentadas, además, en el aprendizaje significativo.

Tras realizar los primeros pasos (Martínez-Zarzuelo, Roanes-Lozano & Fernández-Díaz, 2013) y desarrollar una propuesta teórica ampliamente fundamentada, se ha llevado a cabo una aplicación de la misma al ámbito matemático. Las particularidades de la estructura interna de esta disciplina, en relación a la complejidad con la que se relaciona el conocimiento que la constituye, hacen que su proceso de estructuración sea de una gran riqueza de análisis. Concretamente, se ha enfocado la investigación al estudio de la estructuración del conocimiento matemático propio de la etapa de Educación Secundaria Obligatoria del sistema educativo español actual.

Se ha considerado de interés analizar la estructura subyacente de esta parte del conocimiento desde un punto de vista epistemológico. Para ello se ha definido un criterio preciso de estructuración del conocimiento que permite la determinación de una relación entre pares de contenidos, acorde a la fundamentación de unos contenidos en otros. Este criterio, basado en

el aprendizaje significativo, proporciona así una forma de organización de contenidos en una estructura de carácter no lineal (Martínez-Zarzuelo, 2016a).

Este criterio se ha definido de forma precisa y se ha aplicado a una gran cantidad de contenidos completamente diferentes, extraídos de una amplia muestra de libros de texto de matemáticas de diversas editoriales de la etapa de Educación Secundaria Obligatoria.

Tal información se ha modelizado en una estructura de grafo considerando los nodos del mismo como contenidos y las aristas como elementos correspondientes de la relación establecida. Sobre este grafo se han realizado una serie de procesos que garantizan una modelización objetiva del contexto de estudio. Ello ha dado lugar a un grafo de orden y tamaño elevados, concretamente de 814 nodos y 2.220 aristas. Uno de los procesos aplicados relacionado con la detección y eliminación de circuitos del grafo ha resultado ser de especial interés para el ámbito educativo ya que ha revelado de forma objetiva y precisa la posibilidad de tratar un determinado contenido matemático desde diferentes puntos de vista (Martínez-Zarzuelo, Roanes-Lozano & Fernández-Díaz, 2016).

La envergadura de los datos ha llevado al tratamiento de los mismos mediante un tipo de software especializado en el análisis de redes (Batagelj & Mrvar, 1998, 2004; Bastian, Heymann & Jacomy, 2009; de Nooy, Mrvar & Batagelj, 2011; Cherven, 2013; Batagelj & Mrvar, 2014; Heymann, 2014; Cherven, 2015) y, según la exhaustiva consulta de la literatura realizada al respecto, no empleado con anterioridad para ningún propósito similar al aquí presentado.

Las técnicas propias de teoría de grafos, junto con este software especializado, han permitido llevar a cabo diversos análisis de interés sobre la estructura de grafo creada (Martínez-Zarzuelo, 2016d). En concreto, se han realizado análisis contextualizados en procesos de selección, organización y secuenciación de contenidos. Uno de los más destacables se corresponde con la detección y estudio de clusters, identificando y analizando particiones del conjunto de nodos del grafo acorde a la densidad de las aristas que los unen (Martínez-Zarzuelo, 2016c; Martínez-Zarzuelo, Roanes-Lozano & Fernández-Díaz, 2017). Mencionar también, entre otros, los análisis desarrollados que revelan el carácter espiral del currículo de

Matemáticas en la Educación Secundaria Obligatoria del Sistema educativo español (Martínez-Zarzuelo, 2016b).

### Prospectiva

En relación a la prospectiva de la investigación realizada, se distinguen diversas líneas perfectamente factibles de desarrollo.

Una de las primeras líneas que se está estudiando es la modelización de la misma red de contenidos, tratada en este estudio, mediante otro tipo de estructura como es la de hipergrafo. Se cree que esta estructura puede ofrecer un importante valor añadido a la investigación realizada, ya que mediante ella podría tratarse desde otro punto de vista el hecho de precisar el conocimiento de más de un contenido educativo para la correcta comprensión de otro. En la Figura 1 puede observarse una posible representación gráfica de una estructura de grafo (izquierda) e hipergrafo (derecha), que indica la necesidad del conocimiento de los números racionales e irracionales para la comprensión de los números reales.

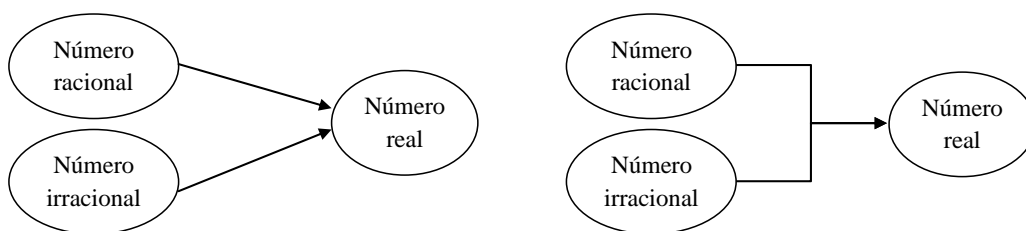


Figura 1.- Una representación gráfica de un grafo (izquierda) y un hipergrafo (derecha)

Por otro lado, debido a que la metodología propuesta y aplicada en este estudio es perfectamente transferible a otras áreas y niveles educativos distintos de los aquí contemplados y a otros campos de ámbito general de conocimiento, puede resultar de interés su ampliación, entre otros, a por ejemplo:

- Contenidos matemáticos propios de otra etapa educativa diferente a la Educación Secundaria Obligatoria, lo que permitiría analizar la estructuración del conocimiento matemático de esa otra etapa educativa.

- Contenidos matemáticos propios de varias etapas educativas, lo que posibilitaría analizar en conjunto la estructuración del conocimiento matemático de esas etapas.
- Contenidos propios de otra disciplina científica diferente a la matemática, para los dos casos anteriores.
- Otro tipo de contenidos diferentes a los casi puramente conceptuales tratados en esta investigación, propósito para el que sería necesario adecuar al nuevo tipo de contenido el criterio de estructuración considerado en este estudio.

Otra de las posibles líneas de investigación que se derivan de este estudio está relacionada más directamente con concreciones curriculares como los libros de texto. El análisis de la estructura subyacente a los contenidos educativos considerados en un determinado libro de texto, en el sentido aquí establecido, es perfectamente viable con la metodología propuesta. Además, el análisis individual con esta metodología de diferentes libros de texto de un mismo curso y área y diferente editorial, por ejemplo, permitiría una posterior comparación de los enfoques de presentación de determinados contenidos educativos según la editorial analizada.

Además de lo anterior, se pretende profundizar en el diseño de propuestas curriculares concretas de utilidad en los procesos de planificación de la enseñanza. Los análisis realizados sobre el grafo creado, relativos a procesos de selección, organización y secuenciación de contenidos, permitirían crear propuestas educativas concretas en base a los contenidos que se quisieran considerar.

Estas posibles líneas aquí presentadas, junto con otras derivadas de las mismas, dotan a esta reciente investigación de una prospectiva factible y, creemos firmemente, de interés para la comunidad educativa.

### **Referencias bibliográficas**

- Abellanas, M. & Lodares, D. (1990). *Análisis de algoritmos y teoría de grafos*. RA-MA.
- Armbruster, B. B. & Anderson, T. H. (1982). Idea-mapping: the technique and its use in the classroom or simulating the " ups" and" downs" of reading comprehension. *Reading education report* (36).

Balakrishnan, R. & Ranganathan, K. (2012). *A Textbook of Graph Theory*. New York: Springer Science & Business Media.

Bastian, M., Heymann, S. & Jacomy, M. (2009). Gephi: an open source software for exploring and manipulating networks. *International Conference on Weblogs and Social Media (ICWSM)*, 8, 361-362.

Batagelj, V. & Mrvar, A. (1998). *Pajek-program for large network analysis*. *Connections*, 21(2), 47-57.

Batagelj, V. & Mrvar, A. (2004). Pajek—analysis and visualization of large networks. En M. Jünger y P. Mutzel, *Graph Drawing Software* (págs. 477-478). Springer Berlin Heidelberg.

Batagelj, V. & Mrvar, A. (2014). Pajek. En R. Alhajj y J. Rokne, *Encyclopedia of Social Network Analysis and Mining* (págs. 1245-1256). Springer New York.

Buzan, T. & Buzan, B. (1996). *El libro de los mapas mentales: cómo utilizar al máximo las capacidades de la mente*. Ediciones Urano.

Cherven, K. (2013). *Network graph analysis and visualization with Gephi*. Packt Publishing Ltd.

Cherven, K. (2015). *Mastering Gephi Network Visualization*. Packt Publishing Ltd.

de Castro, C. (1999). *Mapas cognitivos. Qué son y cómo explorarlos*. Scripta Nova.

de Nooy, W., Mrvar, A. & Batagelj, V. (2011). *Exploratory social network analysis with Pajek* (Vol. 27). Cambridge University Press.

Fisher, K. M. (1990). Semantic networking: The new kid on the block. *Journal of Research in Science Teaching*, 27(10), 1001-1018.

Galagovsky, L. R. (1993). Redes conceptuales: base teórica e implicaciones para el proceso de enseñanza-aprendizaje. *Enseñanza de las Ciencias*, 11, 301-307.

Galagovsky, L. R. (1996). *Redes conceptuales. Aprendizaje, comunicación y memoria*. Buenos Aires: Lugar Editorial.

Geva, E. (1985). Mejora de la comprensión lectora mediante diagramas de flujo. *Infancia y Aprendizaje*, 8(31-32), 45-66.

Heimlich, J. E. & Pittelman, S. D. (1990a). *Los mapas semánticos*. Madrid: Visor.

Heimlich, J. E. & Pittelman, S. D. (1990b). *Mapas semánticos: estrategias de aplicación en el aula*. Ministerio de Educación y Ciencia.

Heimlich, J. E. & Pittelman, S. D. (1991). *El mapa semántico*. Argentina: Aique.

Heimlich, J. E. & Pittelman, S. D. (2001). *Elaboración de mapas semánticos como estrategia de aprendizaje: aplicaciones para el salón de clases*. Trillas.

Heymann, S. (2014). Gephi. En R. Alhajj & J. Rokne, *Encyclopedia of Social Network Analysis and Mining* (págs. 612-625). Springer New York.

Howard, R. A. (1989). Knowledge maps. *Management science*, 35(8), 903-922.

Hyerle, D. (1996). Thinking Maps: Seeing Is Understanding. *Educational leadership*, 53(4), 85-89.

Hyerle, D. & Alper, L. (2011). *Student successes with thinking maps: school-based research, results, and models for achievement using visual tools*. Corwin Press.

Johnson, D. D. & Pearson, P. D. (1984). *Teaching reading vocabulary*. Holt Rinehart & Winston.

Kaufmann, A. (1976). *Puntos y flechas: teoría de los grafos*. Barcelona: Marcombo.

Kitchin, R. M. (1994). Cognitive maps: What are they and why study them? *Journal of environmental psychology*, 14(1), 1-19.

Kocay, W. & Kreherv, D. L. (2005). *Graphs, Algorithms, and Optimization*. CRC Press.

Martínez-Zarzuelo, A. (2015). Selección, organización y secuenciación del conocimiento matemático mediante teoría de grafos (Tesis doctoral). Universidad Complutense de Madrid, Madrid.

Martínez-Zarzuelo, A. (2016a) Organización de contenidos para un aprendizaje significativo en matemáticas. En *II Seminario Internacional "Investigación en Educación para el siglo XXI"*, Segovia (Spain).

Martínez-Zarzuelo, A. (2016b) Un análisis del carácter espiral del currículo de Matemáticas en la Educación Secundaria Obligatoria del Sistema educativo español mediante software de análisis de redes. En *XVI Congreso Nacional y VII Congreso Iberoamericano de Pedagogía: Democracia y Educación en el siglo XXI. La obra de John Dewey 100 años después*, Madrid (Spain).

Martínez-Zarzuelo, A. (2016c) Una propuesta innovadora para la estructuración del conocimiento matemático educativo. En *II Congreso Virtual Iberoamericano sobre recursos educativos innovadores*.

Martínez-Zarzuelo, A. (2016d) Grafos en un contexto educativo: Una nueva forma de organizar contenidos usando TIC. En REDINE (Ed.), *I Congreso Virtual Internacional de Educación, Innovación y TIC*.

Martínez-Zarzuelo, A., Roanes-Lozano, E. & Fernández-Díaz, M.J. (2013) About Organizing and Structuring the Contents of Mathematical Subjects using Graph Theory, in 366

Cavalcante, A. (eds.) *Graph Theory: New Research*, New York: Nova Science Publishers, Inc.

Martínez-Zarzuelo, A., Roanes-Lozano, E., & Fernández-Díaz, M. J. (2016). A computer approach to mathematics curriculum developments debugging. *Eurasia Journal of Mathematics, Science & Technology Education*, 12(12).

Martínez-Zarzuelo, A., Roanes-Lozano, E. & Fernández-Díaz, M.J. (2017). Grouping mathematical contents using network analysis software. An application to the Spanish Secondary Education case. *The International Journal for Technology in Mathematics Education*, 24 (3).

Novak, J. D. & Gowin, D. B. (1988). *Aprendiendo a aprender*. Barcelona: Martínez Roca.

O'Donnell, A. M., Dansereau, D. F. & Hall, R. H. (2002). Knowledge maps as scaffolds for cognitive processing. *Educational Psychology Review*, 14(1), 71-86.

Pearson, P. D. & Johnson, D. D. (1978). *Teaching reading comprehension*. Harcourt School.

Schvaneveldt, R. W. (1990). *Pathfinder associative networks: Studies in knowledge organization*. New Jersey: Ablex Publishing.