

LA GEOMETRÍA INTERDISCIPLINAR DEL NONÁGONO MUDÉJAR

Antonia Redondo Buitrago
aredondo@sabuco.com
IES Bachiller Sabuco, Albacete, España

Núcleo temático: VI. Matemáticas y su integración con otras áreas

Modalidad: CB

Nivel educativo: 4: Terciario o Bachillerato (16 a 18 años)

Palabras clave: Nonágono, escuadras, mudéjar, gótico

Resumen

Los techos de madera por carpintería de lazo son característicos de la arquitectura mudéjar (España y Portugal, siglo XII-XVI), Elementos destacables en su diseño son las “ruedas”, rosetas islámicas poligonales con simetría rotacional, que fueron construidas por los carpinteros castellanos mediante la rotación de especiales juegos de tres escuadras, herencia de la tradicional carpintería visigoda. La construcción de las escuadras que generan la rueda de 9 es especialmente relevante, ya que el ángulo de $360^\circ/9=40^\circ$ no es exactamente construible solo con “regla y compás”. Los dos tratados conservados (Siglo XVI-XVII) sobre carpintería mudéjar muestran la misma aproximación del ángulo de 40° , que se ha descubierto que también subyace en algunas realizaciones del arte Islámico oriental de los siglos XI-XVI. Por otro lado, la rotación de las escuadras es en esencia la utilizada en el diseño de las escaleras de caracol góticas (Geometría fabrorum). Inspirados en este procedimiento, los alumnos podrían construir un nonágono regular aproximado por plegado de una tira de papel. El diseño y construcción de una escalera de caracol de nueve peldaños involucra el concepto de aproximación racional de un número real y contenidos de trigonometría y mosaicos, que podrían ser integrados en un proyecto multidisciplinar “Historia-Arte-Arquitectura- Matemáticas”.

El estilo Mudéjar desarrollado en la Península Ibérica (Siglos XII al XVI) es el más representativo estilo de la arquitectura medieval hispana, resultado de siete siglos de coexistencia de las culturas islámica y cristiana. Caracterizado por la mutua influencia de los estilos islámicos (Califal, Almohade, Almorávide, Nazarí) y cristianos (Románico, Gótico, Renacimiento) de la época, para algunos historiadores representa la última etapa del arte desarrollado durante la dominación musulmana (periodo Nazarí 1238-1492); para otros, significa el inicio del arte en la península después de la Reconquista en los territorios musulmanes. En el ámbito de la carpintería aplicada a la arquitectura, se funden las

habilidades de la tradicional carpintería castellana con la estética geométrica musulmana para originar sus característicos techos de madera por *carpintería de lazo* (Fig. 1, arriba). Elementos destacables en su diseño son las *ruedas*, rosetas islámicas poligonales con simetría rotacional (Fig. 1, abajo) centradas en los vértices de rejillas o tramas triangulares (isométricas), cuadradas y rómbicas. La Figura 1 muestra a la derecha un diseño sobre malla rómbica de ruedas de 10, y a la izquierda uno basado en malla triangular de ruedas de 9.

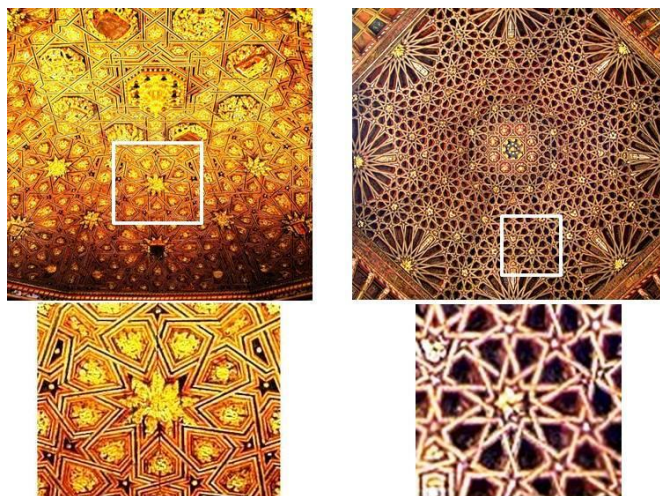


Fig. 1: Ruedas de 9 en Monasterio de San Antonio el Real, Segovia, España, S. XV (izquierda) y ruedas de 10 en la Iglesia de Santiago, Baza, España, S. XVI (derecha).

(Fotos: [https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Artesonado_en_la_iglesia_de_Santiago_\(Baza\).jpg](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Artesonado_en_la_iglesia_de_Santiago_(Baza).jpg) y [https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Segovia - Monasterio de San Antonio el Real 49.jpg](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Segovia_-_Monasterio_de_San_Antonio_el_Real_49.jpg)) (Recortes de la autora)

La evidente “estética” islámica de la ruedas, y la complejidad geométrica pueden sugerir que fueron construidos según las reglas y uso de la geometría islámica en sus tradicionales intrincados dibujos. Sin embargo, los únicos tratados de carpintería mudéjar que han llegado hasta nosotros fueron escritos por cristianos ya en los siglos XVI y XVII y en ellos se muestra como esos techos de madera fueron realizados sin dibujos previos, por adición de sus elementos (ruedas), que directamente eran construidos mediante la hábil combinación y rotación de juegos de tres escuadras, especialmente diseñadas para cada tipo de rueda, herencia de la tradicional carpintería visigoda (Nuere, 2001, p.68). El procedimiento se basa en el hecho de que todos los ángulos involucrados en la construcción de la rueda se pueden

obtener por adición o sustracción de los ángulos de las escuadras. En la Figura 2 mostramos en el centro la escuadra básica y a ambos lados las dos derivadas de ella.

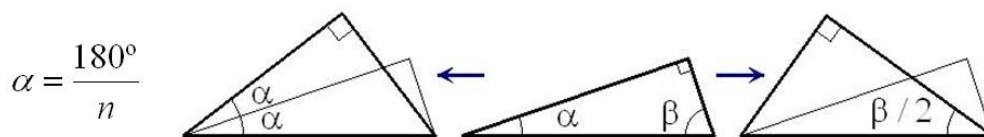


Fig.2: Juego de escuadras mudéjares que generan la rueda de n . En el centro la básica (“escuadra de n ”) de la que se derivan las otras dos

Cada rueda de “ n ” ($n=6, 8, 9, 10, 12$ y 16) aparece vinculada al correspondiente polígono regular de “ n ” lados, por tanto el diseño de las escuadras desemboca necesariamente en el histórico problema geométrico de la construcción exacta de los polígonos regulares. Nos centraremos en el caso de $n=9$, especialmente interesante ya que el ángulo de $360^\circ/9=40^\circ$ no es exactamente construible solo con “regla y compás”. Todos los tratados conservados utilizan escuadras con los mismos ángulos, En la Figura 3, a la derecha, mostramos su construcción geométrica interpretando el dibujo (Fig, 3, izquierda) y las explicaciones que aparecen en el primer manuscrito de Diego López de Arenas (López de Arenas, 1633, p.41). Vemos la escuadra básica FAB, y las dos derivadas EAB y GAB inscritas en una semicircunferencia de centro O. La primera de las derivadas nos proporciona la aproximación del ángulo de 40° como $2\alpha = \angle EAB$. Teniendo en cuenta que la común hipotenusa AB determina el diámetro de medio hexágono regular ACDB, inscrito en la circunferencia completa, y que el punto M es el punto medio del segmento CD, tenemos que $2\alpha = \arctan(\sqrt{3}/2) = 40.893^\circ$.

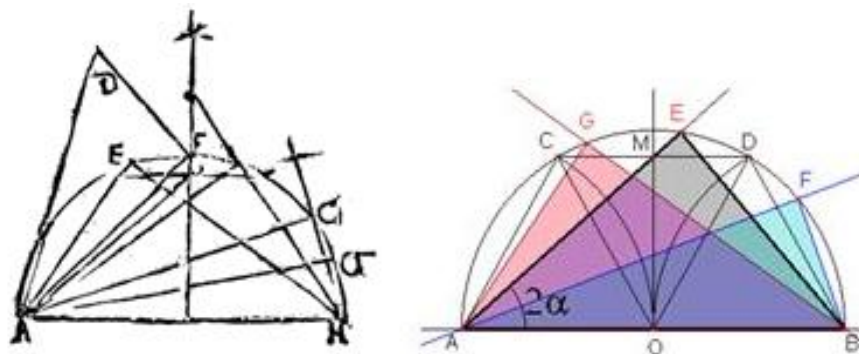


Fig. 3: Dibujo de López de Arenas (izquierda). Interpretación de la autora (derecha).

Puede sorprender que una aproximación con un error de casi 1° pudiera producir tan buenos resultados, pero la clave está en que las ruedas no se construían según un dibujo previo, sino que después del imprescindible cepillado de las piezas de madera, pétalo a pétalo se iban encajando obteniendo en la práctica una roseta *prácticamente regular*.

Volviendo a la construcción de 2α , descubrimos que es la misma aproximación de 40° que encontramos en Redondo y Huylebrouck 2015, p.20, donde se analiza la geometría de los paneles, frisos y celosías de Santa Sofía (Estambul) cuyos diseños presentan nonágonos, aparentemente regulares centrados en los vértices de una trama de hexágonos regulares (Fig. 4).



Fig. 4: Decoraciones de Santa Sofía, Estambul, Turquía: Friso en el Muezzin Mahfil (izquierda). Celosía en la barandilla de la librería de Mahmum I (centro). Panel decorativo en la escalera del Mimbar (derecha). (Fotos: A. Redondo & D. Huylebrouck)

En ese artículo se concluye que los hexágonos no pudieron ser diseñados como regulares, sino que debieron ser construidos sobre la trama hexagonal por el procedimiento del “*punto medio del lado del hexágono*”, presentando en consecuencia simetría rotacional de orden 3 (Redondo & Huylebrouck 2015, p.21). Lo cual constata el origen islámico de la aproximación mudéjar del ángulo de 40° anteriormente descrito y que la aportación cristiana fue el uso de las escuadras góticas.

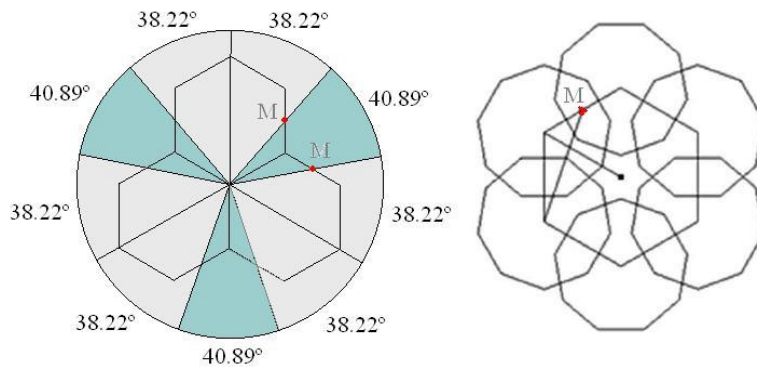


Fig. 5: Determinación de los ángulos del nonágono de Santa Sofía (izquierda). Esquema de la roseta de nonágonos de los diseños de la Figura 3

La construcción aproximada de polígonos regulares por rotación de escuadras fue procedimiento habitual de la *Geometría fabrorum*, nombre con el que se conoce la geometría práctica, la *geometría para los oficios*, de los artesanos, utilizada en las construcciones medievales. Para construir una escalera de caracol de n peldaños se requiere la división del círculo en n partes iguales, y por tanto la determinación del ángulo central $360^\circ/n$ del polígono regular de n lados inscrito en la circunferencia. Se sabe que el procedimiento utilizado era la rotación de una escuadra que al girar generaba una sucesión de triángulos rectángulos dispuestos de tal manera que en cada paso, la hipotenusa se apoyaba en el cateto del paso anterior (Lluís i Ginovart, 2016, p.4). En la Figura 6, puede verse la generación del pentágono regular por cuatro giros de la *escuadra ideal* de 72° (Fig. 6, derecha) y la *escuadra practica* OPA de catetos 1 y 3 (Fig. 6, centro). El pentágono es un polígono construible con exactitud con regla y compás, y por tanto la escuadra ideal de ángulo agudo 72° , “en teoría” podría ser dibujada, pero ¿estaríamos seguros de que el ángulo de la realización práctica del diseño tendría “exactamente” 72° ? En la vida real los segmentos son “siempre” rectángulos, de altura muy pequeña, pero nunca igual a cero, por tanto nuestra respuesta a nuestra pregunta es “no”. Ciertamente estas reflexiones parecen irrelevantes con un apropiado uso de la teoría de errores, pero en realidad lo eran para los carpinteros mudéjares, arquitectos y canteros medievales que sabían resolver sus problemas utilizando siempre escuadras aproximadas. En la Figura 6, a la derecha, se representan algunas escuadras históricamente utilizadas: La OQD para el hexágono ($360^\circ/6 \approx \arctan(7/4)$), la OQC para el heptágono ($360^\circ/7 \approx \arctan(5/4)$) y la OQB de catetos iguales para el octógono.

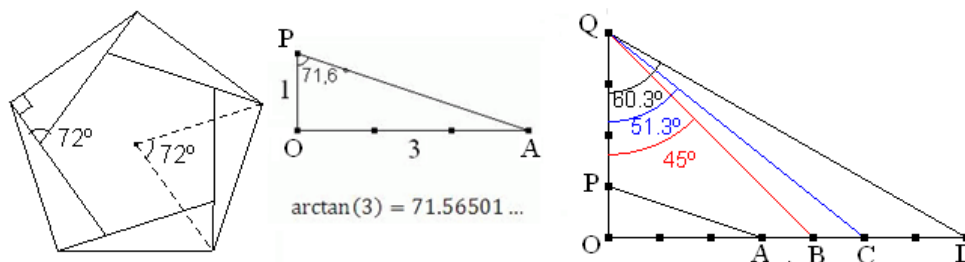


Fig. 6: Pentágono regular generado por la rotación de una escuadra de ángulo 72° (izquierda). Escuadra de catetos 1 y 3 (ángulo 71.6°) para la aproximación gótica de 72° (centro). Determinación de las escuadras para el pentágono, hexágono, heptágono y octógono (derecha)

En las trazas de escaleras de caracol de los tratados históricos y los proyectos de catedrales tanto góticas como tardogóticas, éstas aparecen inscritas en diferentes polígonos, entre ellos los de 10, 12, 15, 16, 18, 24, 28 lados, y en proyectos de catedrales encontramos incluso el polígono de 13 (Lluis i Ginovart, 2016, pp.5-8) pero no hemos encontrado documentación sobre una escuadra para el nonágono. Por tanto, basándonos en que $\arctan(5/6) \approx 39.8^\circ$, proponemos aquí una escuadra de catetos 5 y 6 para la construcción por rotación del nonágono (Fig. 7, izquierda) cuyo margen de error permitiría un ajuste similar al admitido por los constructores medievales.

Pero observemos que el triángulo rectángulo no es el único triángulo que proporciona por giros el nonágono. Aparte de la generación trivial mediante el triángulo isósceles de ángulos 20° - 40° - 40° (Fig. 7, centro), también el escaleno de ángulos 20° - 40° - 120° lo determina (Fig. 7 derecha).

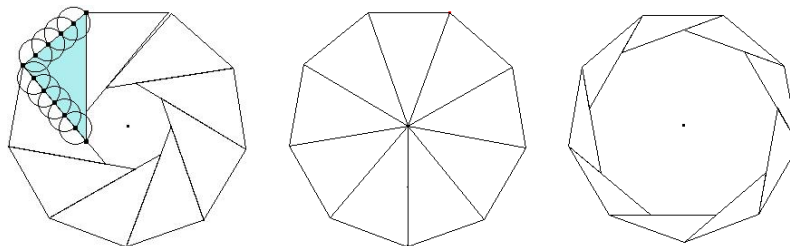


Fig. 7: Nonágono aproximado generado por la escuadra de catetos 5 y 6 (izquierda). Generación por el triángulo isósceles (centro). Nonágono regular generado por el giro del triángulo de ángulos 20° - 40° - 120° (derecha)

Este triángulo escaleno, ABC (Fig. 8, izquierda) es semejante al DEF determinado por el lado del nonágono ED, la primera diagonal FE y la segunda FD; y la razón de semejanza es por tanto igual a la razón entre la primera diagonal y el lado del nonágono regular, $\alpha=2\cos(20^\circ)=1.879\dots$, que es una de las razones generalización del número de oro para el nonágono (Redondo & Huylebrouck, 2015, p.10).

La obtención del nonágono por rotación del triángulo ABC puede ser simulada de manera muy sencilla por el plegado de una tira de papel formada por nueve rectángulos ANBM (Fig. 8, derecha). Tomando como unidad el lado del nonágono $AB=1$, el segmento MB será de longitud $\alpha/2=\cos(20^\circ)$, y en consecuencia, $AM=\sin(20^\circ)$, por lo que la razón de los lados de este rectángulo es $AM/MB=\tan(20^\circ)=0.363970234$.

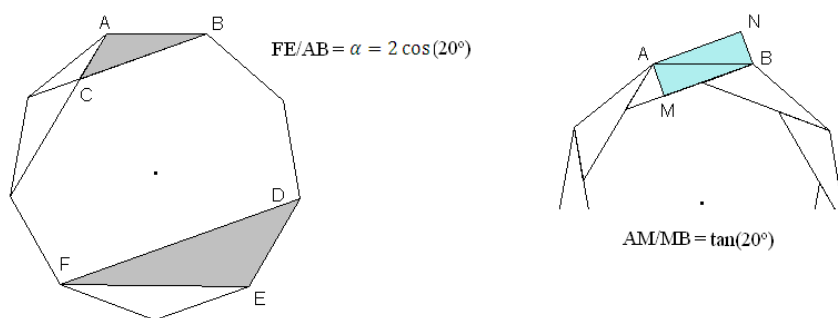


Fig. 8: Los triángulos semejantes ABC y DEF (izquierda). El rectángulo AMBN (derecha)

Los pasos del proceso de plegado se muestran en las fotografías de la Figura 9, donde se aproxima la tangente de 20° por el valor racional $4/11=0.3636\dots$. En una de las caras de la tira se ha marcado una cuadrícula para visualizar los rectángulos 4×11 . La otra cara se ha dejado en blanco para que se aprecie la diferencia el sentido del plegado (alternativamente hacia delante y hacia atrás) que siempre se hace a lo largo de la diagonal de los rectángulos. Se aconseja tomar 10 rectángulos en lugar de 9 para superponer o encajar el primero y el último en el enlace final del anillo de triángulos (paso 5 y 6).

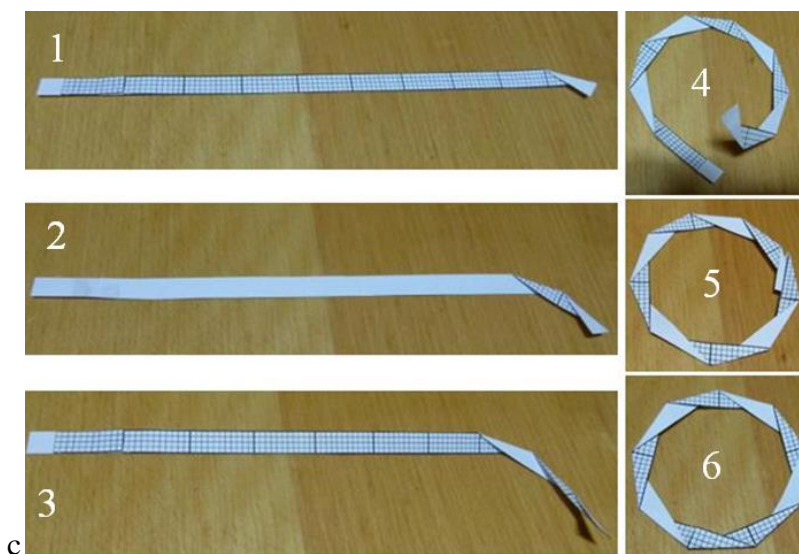


Fig. 9: Construcción paso a paso del nonágono aproximado por plegado de una tira de papel de anchura 4 y longitud $99(+11)$. (Fotos y realización de la autora)

Es relativamente fácil descubrir integraciones puntuales de las matemáticas en otras áreas, pero no es tan fácil encontrar temas que de forma natural permitan un verdaderamente significativo tratamiento interdisciplinar. En nuestra opinión este tema es uno de ellos.

Como justificación y muestra, esbozamos someramente algunas de sus muchas posibilidades didácticas:

- Estudio de los elementos y propiedades geométricas del *nonágono* (razones trigonométricas, proporciones,...). Simbolismos del nonágono y significado y presencia en otras *religiones* (musulmana, bahai,..), en la *literatura* (el infierno de Dante,..),...
- El *arte mudéjar* como reflejo de la sociedad medieval en la Península Ibérica (¿Convivencia/Tolerancia/Integración/asimilación?).
- *Dibujo* de rosetas islámicas. Manejo de *instrumentos de dibujo* (construcciones con “regla y compás” y manipulación de escuadras).
- Análisis y construcción de *mosaicos* por nonágonos regulares y no regulares, generación por capas y por *movimientos geométricos*. Decoraciones geométricas en la *arquitectura otomana*.
- Nonágono de *papel como modelo* de los movimientos en el plano: Pliegue a lo largo de la diagonal del rectángulo (*simetría*). Paso de un rectángulo a otro adyacente (*giro*)...

- *Construcción de maquetas* de escaleras de caracol nonagonales “cómodas” utilizando las escuadras góticas como plantillas de los escalones (Fig. 10) *Estimación* de la anchura y altura total mínima y máxima para una escalera de caracol de nueve escalones cómoda. (Nota: Una escalera de caracol es “cómoda” cuando la huella del pie puede inscribirse holgadamente en el triángulo rectángulo, y cuando la altura del escalón, llamada *contrahuella*, es tal que la escalera pueda ser subida y bajada sin esfuerzo).



Fig. 10: Proyección de una escalera de caracol de 9 (izquierda). Escalera del castillo de Peveril, Castleton, Reino Unido (S. XI) (derecha) (Foto https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Peveril_Castle_2015_43.jpg)

Desde nuestra convicción, entendemos que la consideración de los *contenidos* y *actividades* descritos propiciarían el desarrollo de *capacidades* y *competencias* propias de las matemáticas, pero sin duda alguna incidirá en una *significativa modificación* positiva de las *creencias* y *actitudes* hacia las matemáticas.

Referencias bibliográficas

Lluis i Ginovart, J. (2016). Geometría y traza de escaleras góticas. Las escuadras como ábacos en la construcción de los caracoles de la catedral de Tortosa. Informes de la construcción, 68, Nº 541. Edición electrónica. (<http://informesdelaconstruccion.revistas.csic.es/index.php/informesdelaconstruccion/articloe/view/4672/5433>)

López de Arenas, D, (1633). *Breve Compendio de la Carpintería de lo Blanco y Tratado de Alarifes*. Sevilla: Impreso por Luis Estupiñan.

Nuere, E. (2001) *Nuevo tratado de la carpintería de lo blanco*. Madrid: Ediciones Munilla-Leira

Redondo Buitrago, A. and Huylebrouck, D. (2015). Nonagons in the Hagia Sophia and the Selimiye Mosque. *Nexus Network Journal*, 17, N° 1, 157–181.