GRUPOS DE TRANSFORMACIONES DEL PLANO VIA LOS NUMEROS COMPLEJOS

Enzo R. Gentile

0. INTRODUCCION

El objeto de esta exposición es la determinación de ciertos grupos de transformaciones del plano utilizando la estructura adicional dada por identificación del plano coordenado R^2 con el cuerpo de los números complejos (Plano de Gauss). Más precisamente determinaremos el *grupo euclídeo* $E(R^2)$ de R^2, es decir el grupo de todas las transformaciones de R^2 que preservan la distancia euclídea:

$$x = (x_1, x_2) \quad , \qquad y = (y_1, y_2) \quad ,$$

$$d(x,y) = \sqrt{((x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2)}$$

O sea, $f \in E(R^2)$ si y sólo si cualesquiera sean x,y en R^2

$$d(x,y) = d(f(x), f(y))$$

Se suele decir que una tal transformación es "rígida". Las mismas consideraciones permitirán obtener un grupo más grande que el euclídeo, a saber el *grupo de similitudes* de R^2, $\mathrm{Sim}(R^2)$. Una similitud es, por definición, toda transformación f de R con la propiedad que existe $r \in R$, $r > 0$ tal que

$$d(f(x), f(y)) = r.d(x,y)$$

En otros términos, las similitudes son las composiciones de transformaciones rígidas y homotecias.

Recordemos que (de acuerdo con el famoso *Programa de Erlangen** de Felix Klein, octubre de 1872) cada grupo G de transformaciones de R^2 da lugar a una *geometría*, es decir, el estudio de las propiedades de subconjuntos de R^2 invariantes por G. Así $E(R^2)$, determinará la *geometría euclídea*. En esta geometría podemos por ejemplo analizar la

---

* Se refiere a la disertación inaugural del matemático alemán Felix Klein (1849-1925) al incorporarse como profesor en la Universidad de la ciudad de Erlangen (Alemania Federal). Su título: "Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen", en octubre de 1872. El "Programa" de Klein consiste en clasificar cada rama de la geometría como teoría de invariantes de un cierto grupo de transformaciones. Así la Geometría Euclídea es el estudio de los invariantes del grupo de transformaciones del plano que preservan la distancia, la *Geometría Proyectiva*, la *Topología*, etc. entran en este "programa".

noción de congruencia de polígonos. Dos polígonos P y P' son *congruentes* si existe $f \in E(R^2)$ tal que $f(P) = P'$. En particular, podemos analizar triángulos y obtener los conocidos criterios de igualdad (o mejor, congruencias). En cambio utilizando $Sim(R^2)$ podemos obtener los conocidos criterios de semejanza.

Este punto de vista, en nuestra opinión, reviste gran importancia pues todo se logra a través de los números complejos y además de elemental resulta natural.

1. GRUPO DE TRANSFORMACIONES

Sea X un conjunto no vacío. Se llama *transformación* sobre X (o en X, o de X) a toda aplicación $f : X \to X$ *biyectiva*. Por ejemplo Id_X ó Id ó 1_X definida por $Id_X(x) = x$, $\forall\ x \in X$, es una transformación, la llamada transformación *identidad*.

Con $Tran(X)$ denotaremos la totalidad de transformaciones de X.

Si $f, g \in Tran(X)$ podemos definir la composición de f con g:

$$f.g : X \to X$$
$$(f.g)(x) = f(g(x)) \quad , \quad \forall\ x \in X.$$

Además siendo cada $f \in Tran(X)$ biyectiva está definida la transformación inversa $f^{-1} \in Tran(X)$ por:

$$f^{-1}(y) = x \longleftrightarrow f(x) = y$$

La composición de aplicaciones es asociativa y define sobre $Tran(X)$ una estructura de grupo: el *grupo de transformaciones de* X. (Supondremos al lector familiar con la definición y propiedades básicas de grupos).

1.1. Ejemplos

1) Sea $X = \{1, 2, \ldots, n\}$. Entonces $Tran(X)$ se denomina el *grupo simétrico* de grado n y se denota por S_n. Los elementos de S_n suelen denotarse por matrices

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & i & \ldots & n \\ f(1) & f(2) & \ldots & f(i) & & f(n) \end{pmatrix}$$

Debajo de cada $i \in X$ está su imagen $f(i)$ por f. Por ejemplo si $f \in S_3$ es

$f(1) = 2, \quad f(2) = 1, \quad f(3) = 3$ escribimos

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Si además es $g = \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{matrix}$ resulta: $f \circ g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$,

$g \circ f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $f^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, $g^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Este ejemplo de grupo de transformaciones es de gran importancia en la teoría de grupos finitos.

2) Sea $X = \mathbf{R}^2$ el plano. Será nuestro propósito estudiar no $\mathrm{Tran}(\mathbf{R}^2)$ que es grupo demasiado grande y carente de interés geométrico, sino algunos subgrupos del mismo. (Por ejemplo es bien sabido de la teoría de números cardinales que es posible definir una biyección de un cuadrado con un lado del mismo. Esta biyección puede extenderse trivialmente a todo el plano, por lo tanto en esta "geometría" un cuadrado y un segmento son objetos equivalentes. Se ve entonces que no podremos ir muy lejos, o como diría Jarvis, esta Geometría no tiene porvenir).

En nuestro estudio $\mathbf{R}^2$ será un plano coordenado, identificado a la totalidad de números complejos $a + i.b$, a, $b \in R$ en la forma habitual: $(a,b) \to a + i.b$, que llamaremos *Plano de Gauss*.

1.2. Distancia en $\mathbf{R}^2$

La distancia euclidea entre dos puntos x,y de $\mathbf{R}^2$ es, luego de la identificación de $\mathbf{R}^2$ y $\mathbf{C}$, el valor absoluto $|x - y|$, la denotaremos también por

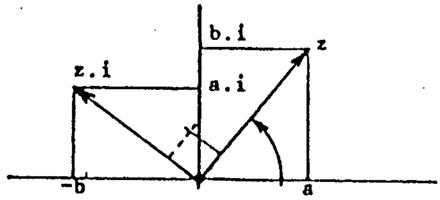
$$d(x,y) = |x - y|$$

Si $x = a + i.b$, $y = c + i.d$ se tiene

$$d(x,y) = \sqrt{((a - c)^2 + (b - d)^2)}$$

La teoría de números complejos nos permite dar una condición analítica de la noción de perpendicularidad.

Sabemos que si z es un número complejo entonces $i.z$ es el número complejo de argumento $\arg(z) + \frac{\pi}{2}$, por lo tanto es un vector perpendicular a z:



$(a + bi)\cdot i = -b + a\cdot i$

Esta observación nos lleva a formular el siguiente teorema:

TEOREMA 1. *Sean* $z_1 = a_1 + i\cdot b_1$, $z_2 = a_2 + i\cdot b_2$. *Las condiciones siguientes son todas equivalentes entre sí:*

i) $|z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2$

ii) $|z_1 - z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2$

iii) $z_1\cdot\bar{z}_2 + \bar{z}_1\cdot z_2 = 2\cdot(a_1\cdot a_2 + b_1\cdot b_2) = 0$

iv) $a_1\cdot a_2 + b_1\cdot b_2 = 0$

v) Existe $r \in R$ tal que $z_1 = r\cdot i\cdot z_2$ ó $z_2 = 0$.

DEMOSTRACION. Basta utilizar la siguiente relación:

$$|z_1 \pm z_2|^2 = (z_1 \pm z_2)\cdot(\overline{z_1 \pm z_2}) = (z_1 \pm z_2)\,(\bar{z}_1 \pm \bar{z}_2)$$

$$= z_1\cdot\bar{z}_1 + z_2\cdot\bar{z}_2 \pm (z_1\cdot\bar{z}_2 + \bar{z}_1\cdot z_2) =$$

$$= |z_1|^2 + |z_2|^2 \pm (z_1\cdot\bar{z}_2 + \bar{z}_1\cdot z_2)\ .$$

En base a este teorema definimos

1.3. DEFINICION. $z_1 \perp z_2$ (z_1 *es perpendicular* a z_2) si z_1 y z_2 verifican las condiciones equivalentes dadas en el teorema 1.

1.4. DEFINICION. Sean $z_1 \neq z_2$; $w_1 \neq w_2$ en C. Sea r_1 := recta determinada por z_1, z_2 y r_2 = recta determinada por w_1 y w_2. Se dice que r_1 es perpendicular a r_2 ($r_1 \perp r_2$) si $z_2 - z_1 \perp w_2 - w_1$.

<u>Notar</u> que, en general, si $z_i \neq 0$, $z_1\cdot\bar{z}_2 + \bar{z}_1\cdot z_2 = 2\cdot|z_1|\cdot|z_2|\cos\theta$

con θ el ángulo formado por los vectores z_1 , z_2 . En efecto, esto se sigue del Teorema del Coseno:

$$|z_1 - z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 - 2\cdot|z_1|\cdot|z_2|\cdot\cos\theta$$

y de la relación

$$|z_1 - z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 - z_1\cdot\bar{z}_2 - z_2\cdot\bar{z}_1 \quad .$$

Notemos también que

$$\frac{1}{2}\cdot(z_1\cdot\bar{z}_2 + z_2\cdot\bar{z}_1) = a_1\cdot a_2 + b_1\cdot b_2 = |z_1|\cdot|z_2|\cdot\cos\theta$$

si $\qquad z_1 = a_1 + i\cdot b_1 \quad , \quad z_2 = a_2 + i\cdot b_2$. ,

no es otra cosa que la expresión compleja del producto escalar ordinario en R^2 .

1.5. Ejercicio Preparatorio:
Interpretar el valor $\frac{1}{2}\cdot(z_1\cdot\bar{z}_2 - z_2\cdot\bar{z}_1)$.

1.6. Ejercicio
Sean z_1 , z_2 en C . Probar que $(z_1 - z_2)\perp(z_1 + z_2)$ si y sólo si $|z_1| = |z_2|$. Interpretar geométricamente.

2. RECTA Y CIRCUNFERENCIA

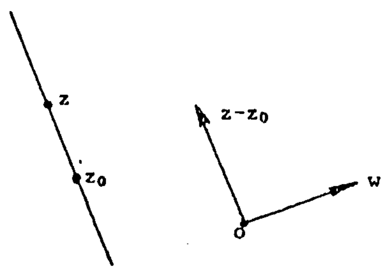
Hallemos la expresión compleja de las ecuaciones de la recta y la circunferencia en R^2 .

Sean $w \in C$, $w \neq 0$ y $\underline{r}$ la recta de R^2 determinada por el punto z_0 y de dirección perpendicular al vector w . Es claro que r coincide con la totalidad de z que satisfacen

$$(z - z_0) \perp w$$

o sea $\qquad (\overline{z - z_0})\cdot w + (z - z_0)\cdot\bar{w} = 0$

o sea $\qquad z\cdot\bar{w} + \bar{z}\cdot w - (z_0\cdot\bar{w} + \bar{z}_0\cdot w) = 0$



y en general

$$z\cdot\bar{u} + \bar{z}\cdot u + r = 0 \quad \text{con} \quad r \in R$$

es la expresión compleja de la ecuación de la recta en R^2 de dirección perpendicular al vector u y que pasa por (el afijo de) $-\frac{r}{2\cdot\bar{u}}$.

O también,

$$B\cdot\bar{z} + \bar{B}\cdot z + C + \bar{C} = 0$$

con B, C, complejos.

2.1. Ejercicios

i. Sean

$$r_1 \ : z\cdot\bar{u} + \bar{z}\cdot u + r = 0$$
$$r_2 \ : z\cdot\bar{v} + \bar{z}\cdot v + s = 0$$

con r, s en R , las ecuaciones de dos rectas r_1 y r_2 respectivamente. Probar que $r_1 \perp r_2$ si y sólo si $u\cdot\bar{v} + \bar{u}\cdot v = 0$.

ii. Tres puntos z_1, z_2, z_3 (o mejor, sus afijos en el plano) se dicen *colineales* o *alineados* si están contenidos en una misma recta. Probar la equivalencia de las condiciones siguientes:

a) z_1, z_2, z_3 son colineales.

b) Existen reales r_1, r_2, r_3 tales que: $(r_1, r_2, r_3) \neq (0,0,0)$, $r_1 + r_2 + r_3 = 0$ y $r_1\cdot z_1 + r_2\cdot z_2 + r_3\cdot z_3 = 0$.

c) El determinante

$$\begin{vmatrix} z_1 & \bar{z}_1 & 1 \\ z_2 & \bar{z}_2 & 1 \\ z_3 & \bar{z}_3 & 1 \end{vmatrix} = 0 .$$

iii. Probar que si z_1, z_2, z_3 son tres puntos *no colineales* entonces *para todo* $z \in \mathbb{C}$ existen reales r_1, r_2, r_3 (y además únicos) tales que $r_1 + r_2 + r_3 = 1$ y $z = r_1\cdot z_1 + r_2\cdot z_2 + r_3\cdot z_3$

Sean ahora $z_0 \in \mathbb{C}$ y $r \in \mathbb{R}_{>0}$. La circunferencia de centro z_0 y radio r es

$$\{ z \ / \ |z - z_0| = r \}$$

o sea,

$$(z - z_0)\cdot(\bar{z} - \bar{z}_0) = r^2$$

y podemos escribir

$$z\cdot\bar{z} + (\bar{z}\cdot -z_0 + z\cdot -\bar{z}_0) + z_0\cdot\bar{z}_0 - r^2 = 0$$

Más generalmente una ecuación del tipo

$$(A + \bar{A})\cdot z\cdot\bar{z} + B\cdot\bar{z} + \bar{B}\cdot z + C + \bar{C} = 0$$

con A, B, y C números complejos que satifacen la condición

$$B\cdot\bar{B} - (A+\bar{A})\cdot(C+\bar{C}) > 0 .$$

es la ecuación general de la circunferencia en forma compleja de centro $\frac{-B}{A+\bar{A}}$ y radio $\sqrt{\frac{B\cdot\bar{B} - (A+\bar{A})\cdot(C+\bar{C})}{(A+\bar{A})}}$ si $A+\bar{A} \neq 0$.

Si $A\ \bar{A} = 0$ se obtiene la ecuación de la recta como vimos más arriba.

3. ISOMETRIAS

Sea $\mathbf{R}^2$ (identificado con $\mathbf{C}$) dotado de la distancia euclidea:

$$d(x,y) = |x-y|$$

3.1. DEFINICION

Una *transformación* f de $\mathbf{R}^2$ se dice una *isometría* (o una transformación *rígida*) si

$$d(f(x),\ f(y)) = d(x,y)$$

o sea f preserva la distancia en $\mathbf{R}^2$. Por ejemplo $Id = Id_{R^2} = I$, la transformación identidad, es una isometría. También $-I : (-I)(x) = -x$ es una isometría. Sea $E(\mathbf{R}^2)$ la totalidad de isometrías de $\mathbf{R}^2$ (respecto de la distancia euclidea, bien entendido!!). Un sencillo ejercicio nos permite ver que $E(\mathbf{R}^2)$ *es un grupo* (subgrupo de $\mathrm{Tran}(\mathbf{R}^2)$), que llamaremos el *grupo euclideo* de $\mathbf{R}^2$ (respecto de $d(x,y) = |x-y|$).

3.2. Digresión y Ejercicio.

Lo de "sencillo ejercicio" es correcto, dado que nuestras transformaciones son *biyectivas*. Entonces, dada f en $E(\mathbf{R}^2)$ está claro que $f^{-1} \in \mathrm{Tran}(\mathbf{R}^2)$ y es muy fácil ver que $|f^{-1}(x) - f^{-1}(y)| = |x-y|$. Proponemos al lector en cambio probar que si $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ es una "aplicación" que satisface $|f(x) - f(y)| = |x-y|$, cualesquiera sean x,y en $\mathbf{R}^2$, entonces f es una biyección de $\mathbf{R}^2$.

3.3. Ejemplos

1. Traslaciones. Sea $a \in \mathbf{C}$ y denotemos con $\tau_a : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ la transformación

$$\tau_a(z) = z + a$$

Notar que $\tau_0 = Id$ y además

$$\tau_{a+b} = \tau_a \cdot \tau_b = \tau_b \cdot \tau_a$$

En particular

$$\tau_a \cdot \tau_{-a} = Id$$

A la transformación τ_a la denominamos la *traslación* de $\mathbf{R}^2$ *según* a . La totalidad de traslaciones forma un subgrupo conmutativo de $\mathrm{Tran}(\mathbf{R}^2)$. La denotamos con $T(R^2)$. Además τ_a preserva la distancia euclidea:

$$|\tau_a(x) - \tau_a(y)| = |x + a - (y + a)| = |x - y|$$

Se sigue entonces que $T(R^2)$ es un subgrupo de $E(R^2)$.

2. Rotaciones. Sea $0 < \theta < 2\Pi$. La multiplicación por el complejo $e^{i\theta}$ produce sobre cada complejo z una rotación de argumento θ , en sentido contrario a las agujas de un reloj de pared. Sea pues $\rho_\theta : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$

$$\rho_\theta(z) = e^{i\theta} \cdot z = (\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta) \cdot z$$

Notar que

$$\rho_\theta^{-1} = \rho_{2\Pi - \theta}$$

$$\rho_\theta(z_1 + z_2) = \rho_\theta(z_1) + \rho_\theta(z_2) \quad , \qquad \forall \; z_1 , z_2 \in C$$

$$\rho_\theta(r \cdot z) = r \cdot \rho_\theta(z) \qquad \text{si} \quad r \in R$$

Se ve fácilmente que la totalidad de rotaciones ρ_θ alrededor de (forman un subgrupo conmutativo de $E(R^2)$.

Se sigue que en $E(R^2)$ también viven las composiciones de los tipos anteriores

$$\rho_\theta \cdot \tau_a \qquad y \qquad \tau_a \cdot \rho_\theta$$

En general *no son* la misma transformación, vale la igualdad

$$\rho_\theta \cdot \tau_a = \tau_{\rho_\theta(a)} \cdot \rho_\theta$$

En efecto,

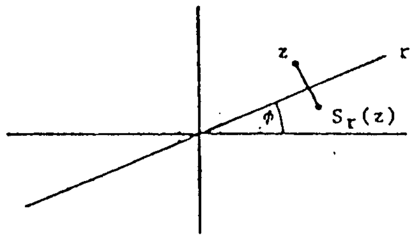
$$\forall \; x \in \mathbf{C}$$

$$(\rho_\theta \cdot \tau_a)(x) = \rho_\theta(a+x) = \rho_\theta(a) + \rho_\theta(x) = \tau_{\rho_\theta(a)}\rho_\theta(x)$$

Notar que si $f = \tau_a \cdot \rho$ entonces $f^2 = \tau_{a+\rho_\theta(a)} \cdot \rho_\theta^2$

$$f^3 = \tau_{a+\rho_\theta(a)+\rho_\theta^2(a)} \cdot \rho_\theta^3 \, , \dots \, .$$

3. Simetría respecto de una recta por el origen.



$$S_r : \; z \xrightarrow{(1)} z \cdot e^{-\phi i} \xrightarrow{(2)} \overline{z \cdot e^{-\phi i}} \xrightarrow{(3)} \bar{z} \cdot e^{\phi i} \cdot e^{\phi i} = \bar{z} e^{2\phi i}$$

$$S_r(z) = e^{2\phi i} \cdot \bar{z}$$

S_r se obtiene por composición de:

(1) rotación de $-\phi$ que lleva la recta a coincidir con el eje real.

(2) conjugación

(3) rotación de ϕ

Notar que en particular si $\phi = 0$ se obtiene la conjugación: $z \to \bar{z}$.

3.1. Ejercicio

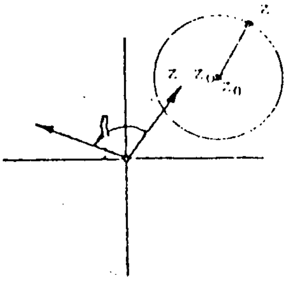
Sea $\alpha \neq 0$. Sea r la recta por el origen, perpendicular a α. Probar que

$$S_\alpha(z) = z - \frac{\bar{\alpha} \cdot z + \alpha \cdot \bar{z}}{\alpha \cdot \bar{\alpha}} \cdot \alpha$$

es la simetría de $\mathbf{R}^2$ respecto de la recta r. Hallar una expresión análoga para la simetría de $\mathbf{R}^2$ respecto de una recta determinada por dos puntos z_1, z_2, $z_1 \neq z_2$.

4. ROTACION ALREDEDOR DE UN PUNTO CUALQUIERA z_0

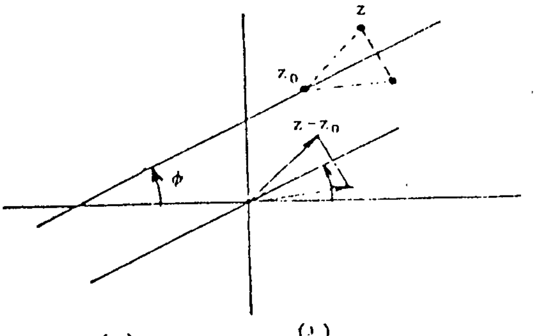
$$\rho_{\theta, z_0}: \quad z \to z - z_0 \to e^{i\theta} \cdot (z - z_0) \to e^{i\theta} \cdot (z - z_0) + z_0$$



o sea

$$\rho_{\theta, z_0}(z) = e^{i\theta} \cdot z + z_0 \cdot (1 - e^{i\theta})$$

5. SIMETRIA RESPECTO DE UNA RECTA DE PENDIENTE $\operatorname{tg}\phi$ Y QUE PASA POR z_0



$$z \xrightarrow{(1)} z - z_0 \xrightarrow{(2)} e^{2\phi i} \cdot (\overline{z - z_0}) \xrightarrow{(3)} e^{2\phi i} \cdot (\bar{z} - \bar{z}_0) + z_0$$

$$= e^{2\phi i} \cdot \bar{z} + z_0 - \bar{z}_0 \cdot e^{2\phi i}$$

(1) es una traslación que lleva la recta al origen

(2) es la simetría respecto de la recta trasladada.

(3) es la traslación al punto original z_0.

PROPOSICION: *Sean* $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, *con* $|\alpha| = 1$. *Las transformaciones*

I) $f(z) = \alpha z + \beta$

II) $f(z) = \alpha \bar{z} + \beta$

son isometrías. En particular las transformaciones precedentes 1 a 5 son isometrías.

DEMOSTRACION (Ejercicio)

Sea G la totalidad de isometrías de los tipos I y II. Probemos que G es un subgrupo de $E(R^2)$. Denotemos con I (resp. II) las transformaciones de los tipos I (resp. tipo II). Debemos verificar que:

$$\mathrm{I} \cdot \mathrm{I} \subset \mathrm{I}$$
$$\mathrm{II} \cdot \mathrm{I} \subset \mathrm{II}$$
$$\mathrm{I} \cdot \mathrm{II} \subset \mathrm{II}$$
$$\mathrm{II} \cdot \mathrm{II} \subset \mathrm{I}$$
$$\mathrm{I}^{-1} \subset \mathrm{I}$$
$$\mathrm{II}^{-1} \subset \mathrm{II}$$

Por esto entendemos que si, por ejemplo, $f_1 \in \mathrm{I}$ y $f_2 \in \mathrm{I}$ entonces $f_1 \cdot f_2 \in \mathrm{I}$; $f_1 \in \mathrm{I}$ y $f_2 \in \mathrm{II}$ entonces $f_1 \cdot f_2 \in \mathrm{II}$, etc.

Pero esta verificación es sencilla y la podemos dejar como ejercicio.

El resultado fundamental a probar es la igualdad

$$\boxed{G = E(R^2)}$$

que nos da una descripción completa y sencilla de $E(R^2)$.

4. Transformaciones ortogonales.

Sea $\sigma \in E(R^2)$

DEFINICION: Diremos que σ es una *transformación ortogonal* si $\sigma(0) = 0$, o sea, fija el cero.

La totalidad de tranformaciones ortogonales de R^2 la denotaremos con $O(R^2)$ u $O(2)$. Es claro que $O(R^2)$ es subgrupo de $E(R^2)$.

Se denomina el *grupo ortogonal* de $\mathbf{R}^2$.

LEMA PREPARATORIO: Sea $\sigma \in O(R^2)$. Se satisfacen las siguientes propiedades

i) $\forall \ z \in C$, $|\sigma(z)| = |z|$ (En particular $|\sigma(1)| = 1$).

ii) $\sigma(z_1) \cdot \overline{\sigma(z_2)} + \overline{\sigma(z_1)} \cdot \sigma(z_2) = z_1 \cdot \bar{z}_2 + \bar{z}_1 \cdot z_2$

iii) $z_1 \perp z_2 \longleftrightarrow \sigma(z_1) \perp \sigma(z_2)$

DEMOSTRACION

i) $|z| = |z-0| = |\sigma(z) - \sigma(0)| = |\sigma(z)|$.

ii) $|\sigma(z_1) - \sigma(z_2)|^2 = |z_1 - z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 - (z_1 \cdot \bar{z}_2 + \bar{z}_1 \cdot z_2)$.

Por otra parte, en forma análoga

$$|\sigma(z_1) - \sigma(z_2)|^2 = |\sigma(z_1)|^2 + |\sigma(z_2)|^2 - (\sigma(z_1)\cdot\overline{\sigma(z_2)} + \overline{\sigma(z_1)}\cdot\sigma(z_2)$$

$$= |z_1|^2 + |z_2|^2 - [\sigma(z_1)\cdot\overline{\sigma(z_2)} + \overline{\sigma(z_1)}\cdot\sigma(z_2)]$$

Comparando ambas expresiones resulta ii).

iii) Se sigue de ii) y Teorema 1.

TEOREMA 2.

$$\sigma \in O(R^2) \longrightarrow \sigma \quad \textit{es } R\textit{-lineal, o sea}$$

$$\sigma(z_1 + z_2) = \sigma(z_1) + \sigma(z_2)$$

$$\sigma(r \cdot z) = r \cdot \sigma(z) \qquad , \ \forall \ r \in R.$$

DEMOSTRACION: Puesto que $1 \perp i$ se sigue $\sigma(1) \perp \sigma(i)$ por lo tanto $\sigma(1)$ y $\sigma(i)$ *generan* **C** en forma análoga a como lo hacen 1 e i. Es decir $\forall\, u \in$ **C** existen *únicos reales* r y s tales que

$$u = r \cdot \sigma(1) + s \cdot \sigma(i) .$$

Sea entonces

$z = a + b\cdot i$; $a,b \in R$. Podemos escribir

$$\sigma(z) = r \cdot \sigma(1) + s \cdot \sigma(i) \quad , \qquad r, s \in R.$$

Es nuestra intención probar que $r = a$ y $s = b$.

Notemos que $1 \perp i \rightarrow \sigma(1)\cdot\sigma(1) + \sigma(1)\cdot\sigma(i) = 0$. Entonces

$$2a = 1 \cdot \bar{z} + 1 \cdot z = \sigma(1) \cdot \overline{\sigma(z)} + \overline{\sigma(1)} \cdot \sigma(z) =$$

$$= r + s\sigma(1) \cdot \overline{\sigma(i)} + r + s\overline{\sigma(i)} \cdot \sigma(i)$$

$$= 2r$$

Análogamente

$$2b = -[\,1\cdot(\overline{iz}) + 1\cdot(iz)] = -[\,\bar{i}\cdot\bar{z} + i\cdot z] = i\cdot\bar{z} + \bar{i}\cdot z =$$

$$= \sigma(i)\cdot\overline{\sigma(z)} + \overline{\sigma(i)}\cdot\sigma(z) = 2s$$

por lo tanto

$$a = r \quad y \quad b = s\ .$$

Probemos ahora la linealidad:

Sean $\qquad z_1 = a + bi \quad , \quad z_2 = c + di$

$$\sigma(z_1 + z_2) = \sigma((a+c) + (b+d)i) = (a+c)\,\sigma(1) + (b+d)\,\sigma(i)$$

$$= a\,\sigma(1) + c\,\sigma(1) + b\,\sigma(i) + d\,\sigma(i)$$

$$= \sigma(a+bi) + \sigma(c+di) = \sigma(z_1) + \sigma(z_2)\ .$$

Análogamente $\sigma(r\cdot(a+bi)) = r\cdot\sigma(a+bi)$. El teorema queda demostrado.

Volvamos ahora al estudio del grupo euclideo $E(R^2)$. Notemos que si $f \in E(R^2)$ existen $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ tales que

$$\tau_\alpha\cdot f \in O(R^2) \quad y \quad f\cdot\tau_\beta \in O(R^2)\ .$$

En efecto si $f(0) = \alpha$ entonces

$$\tau_{-\alpha}\cdot f \quad \text{satisface} \quad \tau_{-\alpha}f(0) = 0$$

y si $f(\beta) = 0$ se tiene

$$f\cdot\tau_\beta \quad \text{satisface} \quad f\cdot\tau_\beta(0) = 0\ .$$

Por lo tanto todo elemento de $f \in E(R^2)$ se escribe

$$f = \tau_\alpha\cdot\rho_1 \quad , \quad \rho_1 \in O(R^2)$$

ó

$$f = \rho_2\cdot\tau_\beta \quad , \quad \rho_2 \in O(R^2)\ .$$

Además en cada caso la escritura es única. En efecto de

$$f = \tau_\alpha \cdot \rho = \tau_{\alpha'} \cdot \rho' \qquad \rho, \rho' \in O(R^2)$$

se sigue

$$\alpha = \tau_\alpha(0) = \tau_\alpha \ \rho(0) = (\tau_\alpha \rho)(0) = (\tau_{\alpha'} \cdot \rho')(0) =$$

$$= \tau_{\alpha'}(0) = \alpha'$$

o sea $\tau_\alpha = \tau_{\alpha'}$ y obviamente $\rho = \rho'$.

CONCLUSION:

Todo elemento de $E(R^2)$ *es producto (o sea composición) de una traslación por una transformación ortogonal.*

Probamos ahora el resultado fundamental

TEOREMA 3. $f \in E(R^2)$ *si y sólo si existen* $\alpha, \beta \in C$, $|\alpha| = 1$ *tales que uno y sólo uno de los casos siguientes se verifica:*

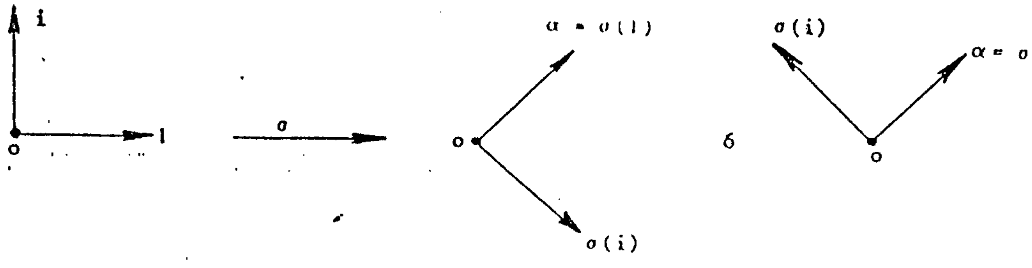
I) $f(z) = \alpha z + \beta \quad , \quad \forall \ z \in C$

II) $f(z) = \alpha \bar{z} + \beta \quad \forall \ z \in C$.

DEMOSTRACION: Sea primeramente $\sigma \in O(R^2)$. Sea $\sigma(1) = \alpha$.

Entonces $|\alpha| = |\sigma(1)| = 1$ y además $1 \perp i \Rightarrow \alpha \perp \sigma(i) \Rightarrow$

$$\begin{cases} \sigma(i) = i\alpha \\ \qquad ó \qquad\qquad \text{pues} \quad |\sigma(i)| = 1. \\ \sigma(i) = -i\alpha \end{cases}$$



Por lo tanto (según lo visto)

$$\sigma(z) = \sigma(a+bi) = a\sigma(1) + b\sigma(i) = \begin{cases} a\alpha + b\alpha i = \alpha \cdot z \\ \text{ó} \\ a\alpha - b\alpha i = \alpha \cdot \bar{z} \end{cases}$$

Volviendo al caso general, si $f(0) = \beta$ resulta

$$(\tau_{-\beta} \cdot f) \in O(R^2)$$

por lo tanto existe $\alpha \in C$, $|\alpha| = 1$ tal que

$$\tau_{-\beta} \quad f = \begin{cases} \alpha z \\ \text{ó} \\ \alpha \bar{z} \end{cases}$$

es decir

$$f(z) = \begin{cases} \alpha z + \beta \\ \text{ó} \\ \alpha \bar{z} + \beta \end{cases}$$

Quod Erat Demonstrandum (Q.E.D.).

DEFINICION: Sea $f \in E(R^2)$. Diremos que f es una *isometría directa* de R^2 si es del tipo I en el teorema e *inversa* en el caso II.

La totalidad de isometrías directas de R^2 forma un subgrupo de $E(R^2)$ que denotamos con $E(R^2)^+$.

5. ALGUNAS CONSECUENCIAS.

5.1. Toda isometría de R^2 preserva rectas y circunferencias. En efecto, basta tomar la expresión general hallada en la sección 2. y verificar que, reemplazando z por $f(z) = \alpha \cdot z + \beta$ ó $f(z) = \alpha \cdot \bar{z} + \beta$, se obtiene una expresión equivalente, Dejamos los detalles como ejercicio.

5.2. Sea $g \in Sim(R^2)$. Existe entonces $r \in R_{>0}$ tal que $|g(z_1) - g(z_2)| = r \cdot |z_1 - z_2|$. Observemos que la transformación f definida por $f(z) = r^{-1} \cdot g(z)$, $z \in C$ es una isometría. Por lo tanto tiene una de las formas halladas en 4. Podemos concluir que: $g \in Sim(R^2)$ si y sólo si existen α, β en C, $\alpha \neq 0$ tales $g(z) = \alpha \cdot z + \beta$ ó $g(z) = \alpha \cdot \bar{z} + \beta$. En el primer caso decimos que g es una similitud *directa* y en el segundo, *opuesta*.

5.3. Sean z_1, z_2 ; w_1, w_2 en C, tales que $|z_1 - z_2| = |w_1 - w_2| \neq 0$. Existe entonces una única isometría *directa* (resp. inversa) f tal que $f(z_i) = w_i$, $i := 1, 2$.
En efecto, basta resolver el problema lineal:

$$w_1 = \alpha \cdot z_1 + \beta$$

$$w_2 = \alpha \cdot z_2 + \beta$$

de donde

$$\alpha = \frac{w_1 - w_2}{z_1 - z_2} , \qquad \alpha = w_1 - \alpha \cdot z_1$$

Notar que la hipótesis implica $|\alpha| = 1$.
En forma análoga procedemos en el caso inverso.

5.4. Sean $z_1, \ldots, z_n \in C$ y sean $r_1, \ldots, r_n \in R$. Proponemos al lector a manera de ejercicio importante probar que: si $f \in E(R^2)$ y si $r_1 + \ldots + r_n = 1$ entonces

$$f(r_1 \cdot z_1 + \ldots + r_n \cdot z_n) = r_1 \cdot f(z_1) + \ldots + r_n \cdot f(z_n)$$

Decimos que f es una *transformación afín*.

Sean ahora z_1, z_2, z_3 tres puntos *no alineados* (Véase 2.1). Probaremos como aplicación del resultado precedente que si f,g son dos isometrías tales que $f(z_i) = g(z_i)$ si $i : 1, 2, 3$ entonces $f = g$. En otros términos, *toda isometría queda unívocamente determinada por los valores que toma en los vértices de un triángulo*. En particular si una isometría fija los tres vértices de algún triángulo, es la isometría identidad. El hecho que z_1, z_2, z_3 no estén alineados implica que *cualquiera* sea $z \in C$ existen reales r_1, r_2, r_3 tales que $r_1 + r_2 + r_3 = 1$ y $z = r_1 \cdot z_1 + r_2 \cdot z_2 + r_3 \cdot z_3$ (Véase 2.1). Podemos entonces aplicar el resultado precedente y obtener

$$\begin{aligned} f(z) &= r_1 \cdot f(z_1) + r_2 \cdot f(z_2) + r_3 \cdot f(z_3) = \\ &= r_1 \cdot g(z_1) + r_2 \cdot g(z_2) + r_3 \cdot g(z_3) = \\ &= g(z) \end{aligned}$$

cualquiera sea $z \in C$. Es claro que entonces $f = g$ como queríamos demostrar.

5.5. Sean z_1, z_2, z_3 distintos entre sí; w_1, w_2, w_3 en C, distintos entre sí. La condición necesaria y suficiente para la existencia de una similitud g tal que $g(z_i) = w_i$ si $i := 1, 2, 3$, es

$$\frac{w_2 - w_1}{z_2 - z_1} = \frac{w_3 - w_1}{z_3 - z_1} \qquad \text{ó} \qquad \frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1} = \frac{w_2 - w_1}{w_3 - w_1}$$

Dejamos su demostración como ejercicio para el lector. Observar que la condición precedente equivale a un conocido criterio de semejanza de triángulos, ¿cuál?

5.6. Sean a, b, c números complejos. Nos planteamos el problema de determinar en qué condiciones sobre a, b y c existe una isometría directa f tal que $f(a) = b$, $f(b) = c$, $f(c) = a$. Es claro que si una tal isometría existe, el triángulo de vértices los afijos de los complejos a, b, c, es equilátero:

$$|a - b| = |f(a) - f(b)| = |b - c| = |f(b) - f(c)| = |c - a| .$$

Podemos suponer sin pérdida de generalidad que $a \neq b \neq c \neq a$.

Escribamos $f(z) = \alpha \cdot z + \beta$. Se tienen las igualdades

$$b = \alpha \cdot a + \beta$$
$$c = \alpha \cdot b + \beta$$
$$a = \alpha \cdot c + \beta$$

y por lo tanto la relación

(1) $$\frac{b - c}{a - c} = \frac{a - b}{c - a}$$

equivalente a la vez a la identidad

(1') $$a^2 + b^2 + c^2 - a \cdot b - a \cdot c - b \cdot c = 0 .$$

Supongamos ahora recíprocamente, que los complejos a, b, c satisfacen la identidad (1') o su equivalente (1). Sea la transformación

$$f(z) = \frac{b - c}{a - c} \cdot z + \left(b - \frac{b - c}{a - b} \cdot a\right)$$

La f así definida es (a priori) una similitud, pero satisface

$$f(a) = b\ ,\quad f(b) = c \quad y \quad f(c) = a$$

como el lector puede comprobar. Puesto que $f^3 = Id.$ se sigue que el escalar

$$\frac{b-c}{a-c}$$

es una raíz cúbica de la unidad, luego tiene módulo 1 y f es entonces una isometría. Hemos probado que: Tres complejos a, b, c *determinan un triángulo equilátero si y sólo si satisfacen la condición:* $a^2 + b^2 + c^2 - a \cdot b - a \cdot c - b \cdot c = 0$.

Otras condiciones, equivalentes a la dada, aparecen en los ejercicios.

6. PUNTOS FIJOS.

En la teoría general de grupos de transformaciones siempre interesa considerar los subconjuntos dejados fijos por una transformación. O sea, nos interesa determinar para cada transformación $f \in E(R^2)$ la totalidad de puntos $z \in R^2$ tales que

$$f(z) = z.$$

Es claro que si f fija un único punto, f será una rotación alrededor del mismo, y si f fija exactamente una recta será una simetría respecto de la misma.

¿Qué pasa si f no fija ningún punto de R ?, o también, ¿qué transformaciones no fijan ningún punto?

Las traslaciones τ_α , $\alpha \neq 0$ no fijan ningún punto, pero veremos otras transformaciones que tampoco lo hacen.

6.1. Puntos fijos de una isometría directa.

Sea $\quad f(z) = \alpha z + \beta \quad , \quad |\alpha| = 1$

z es punto fijo $\leftrightarrow$ $z = f(z) = \alpha z + \beta$ $\leftrightarrow$ $(1-\alpha)z = \beta$.

Entonces si $1-\alpha \neq 0$, $z = \frac{\beta}{1-\alpha}$: *único punto fijo* de f, f es una rotación.

Si $1 = \alpha$, f es una traslación.

6.2. Puntos fijos de una isometría inversa.

$$f(z) = \alpha \bar{z} + \beta \qquad , \qquad |\alpha| = 1$$

z es punto fijo $\longleftrightarrow$ $z = \alpha \bar{z} + \beta \longleftrightarrow \bar{z} = \bar{\alpha} z + \bar{\beta}$.

Por lo tanto eliminando $\alpha \bar{z}$ resulta

$$\begin{array}{c} z = \alpha \bar{z} + \beta \\ \alpha \bar{z} = \alpha \cdot \bar{\alpha} z + \alpha \bar{\beta} \\ \hline \end{array}$$

$0 = (1 - \alpha\bar{\alpha}) z = \beta + \alpha\bar{\beta}$.

Si $\beta + \alpha\bar{\beta} \neq 0$ entonces f no tiene ningún punto fijo.

Si $\beta + \alpha\bar{\beta} = 0$, $\beta \neq 0$, $\alpha = -\frac{\beta}{\bar{\beta}}$ o sea, $0 = z - \alpha\bar{z} + \beta =$

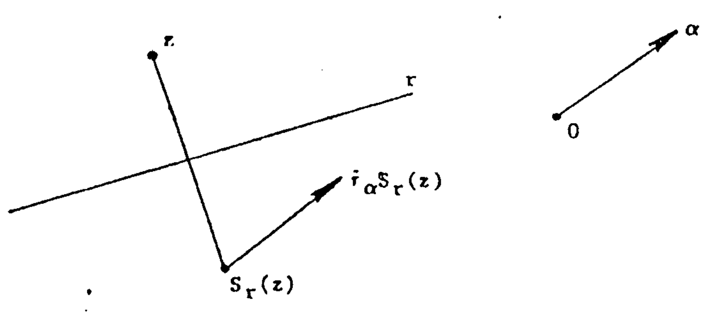
$= z + \frac{\beta}{\bar{\beta}} \bar{z} + \beta$ es decir $\boxed{\bar{\beta} z + \beta \bar{z} - \beta\bar{\beta} = 0}$ que es una *recta* de puntos fijos (ver 2.1). Se trata entonces de una simetría. Si

$\beta = 0$ escribimos $\alpha = -\frac{\gamma}{\bar{\gamma}}$ pues $|\alpha| = 1$, f fija la recta

$\boxed{\bar{\gamma} \cdot z + \gamma \cdot \bar{z} = 0}$ por el origen.

6.3. DEFINICION: Se denomina *reflexión deslizante* ("glide reflexión", en inglés) toda transformación f que es composición de una simetría (o reflexión) con una traslación

$$f := S_r \cdot \tau_\alpha \quad ó \quad \tau_\alpha \cdot S_r$$



Las transformaciones rígidas de R son pues de los tipos: *traslaciones, rotaciones, simetrías o reflexiones deslizantes*. En efecto sea f una isometría, entonces si f tiene puntos fijos ya sabemos que es rotación o simetría; si no tiene puntos fijos se puede componer con una traslación τ_β para fijar un punto

$$\tau_\beta \cdot f = g .$$

Como g fija un punto es rotación o reflexión, por lo tanto

$$f = \tau_{-\beta} \cdot g$$

es traslación o reflexión deslizante.

6.4. Ejemplo. Sean $\rho_1 = \rho_{\theta, z_1}$ $\rho_2 = \rho_{\theta, z_2}$ rotaciones de centros z_1 y z_2, y argumentos θ_1, θ_2 respectivamente.

Pregunta: ¿qué es $\rho_1 \cdot \rho_2$? Sea $z_1 \neq z_2$ (el caso $z_1 = z_2$ es fácil).

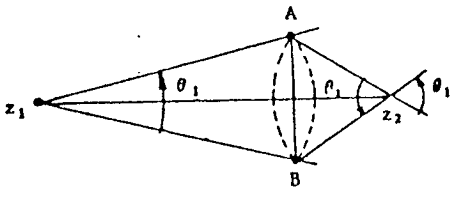
Escribamos $\rho_1(z) = e^{i\theta_1} \cdot z + (z_1 - e^{i\theta_1} \cdot z_1)$

$\rho_2(z) = e^{i\theta_2} \cdot z + (z_2 - e^{i\theta_2} \cdot z_1)$

entonces

$$(\rho_2 \cdot \rho_1)(z) = e^{i(\theta_1 + \theta_2)} \cdot z + (z_1 - z_2) \cdot e^{i\theta_2} + z_2 - e^{i(\theta_1 + \theta_2)} \cdot z_1$$

por lo tanto, si $\theta_1 + \theta_2 = 2k\pi$ se tiene una "traslación".



Supongamos $\theta_1 + \theta_2 \neq 2k\pi$. Se tiene entonces una rotación de $\theta_1 + \theta_2$ alrededor del punto $\dfrac{(z_1 - z_2) \cdot e^{i\theta_2} + z_2 - e^{i(\theta_1 + \theta_2)} \cdot z_1}{1 - e^{i(\theta_1 + \theta_2)}}$.

Observando el dibujo vemos que B es punto fijo de la rotación $\rho_2 \cdot \rho_1$ y A es punto fijo de la rotación $\rho_1 \cdot \rho_2$.

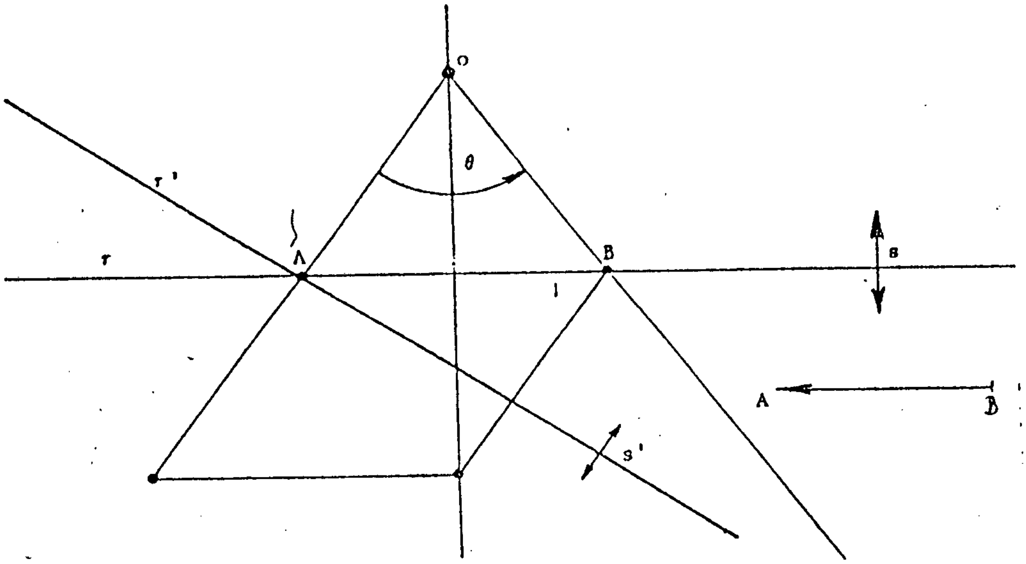
6.5. Ejemplo. Sean S_{r_1}, S_{r_2} simetrías respecto de las rectas r_1 y r_2. ¿Qué es $S_{r_1} \cdot S_{r_2}$?

Respuesta: Rotación de centro $r_1 \cap r_2$ si $r_1 \not\parallel r_2$ y traslación si $r_1 // r_2$.

6.6. Ejemplo. Composición de una rotación y una simetría: $S\cdot\rho_\theta$
Si A,B son los puntos en la figura, la transformación $\tau_{\overleftarrow{AB}}\cdot S\cdot\rho_\theta$ es una simetría S'. Por lo tanto

$$S\cdot\rho_\theta = \tau_{BA}\cdot S' : \quad \textit{reflexión deslizante.}$$

Sea $O \notin r$, $0 < \theta < \pi$.



Analizar también los casos $O \in r$, $\theta = \pi$.

7. ORIENTACION EN $\mathbb{R}^2$

Sean $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$. Si los afijos de estos puntos en el plano de Gauss no están alineados, determinan un triángulo. Establecer una orientación en este triángulo es dar un sentido de recorrido de los vértices. Hay exactamente dos formas, según se recorra en sentido de las agujas de un reloj o en contra de las mismas. Un *triángulo orientado* es un triángulo y un sentido de recorrido. En esta sección queremos dar una condición analítica de orientación y mostrar que en $\mathrm{Sim}(\mathbb{R}^2)$ las *directas* son las que preservan la orientación de los triángulos mientras que las inversas la cambian. Esto justifica pues la calificación dada a las similitudes.

La idea es explotar las propiedades del determinante,

7.1. DEFINICION

$$|z_1, z_2, z_3| = \begin{vmatrix} z_1 & \bar{z}_1 & 1 \\ z_2 & \bar{z}_2 & 1 \\ z_3 & \bar{z}_3 & 1 \end{vmatrix}$$

Ya en 2.1. notamos que la anulación de este determinante es condición necesaria y suficiente para la colinealidad de z_1, z_2, z_3. Daremos aquí una demostración de este hecho. Comencemos por enumerar algunas propiedades de $|z_1, z_2, z_3|$ que son consecuencias inmediatas de propiedades elementales de determinantes y cuya verificación dejamos a cargo del lector.

i. Sea $\beta \in C$, entonces $|z_1 + \beta, z_2 + \beta, z_3 + \beta| = |z_1, z_2, z_3|$ (Invariancia por traslación).

ii. Sea $\alpha \in C$, entonces $|\alpha \cdot z_1, \alpha \cdot z_2, \alpha \cdot z_3| = |\alpha|^2 \cdot |z_1, z_2, z_3|$.

iii. $|z_1, z_2, z_3| = -|\bar{z}_1, \bar{z}_2, \bar{z}_3| = -\overline{|z_1, z_2, z_3|}$

iv. Si i_1, i_2, i_3 es una trasposición de 1, 2, 3 (o sea, una permutación que fija un índice y permuta los dos restantes) entonces $|z_1, z_2, z_3| = -|z_{i_1}, z_{i_2}, z_{i_3}|$.

Se sigue de iii. que $|z_1, z_2, z_3|$ es un complejo *imaginario puro*, o sea, de la forma

$$|z_1, z_2, z_3| = r \cdot i \quad \text{con} \quad r \in R .$$

Podemos hablar, por abuso de lenguaje, de la signatura de $|z_1, z_2, z_3|$ refiriéndonos a la signatura del número real r cuando éste es $\neq 0$ (Caso de puntos no alineados). Se sigue entonces de i., ii., iii., que:

a) una isometría *directa* preserva la signatura de $|z_1, z_2, z_3|$.

b) una isometría *inversa* cambia la signatura de $|z_1, z_2, z_3|$.

Mas generalmente, en a) y b) isometría puede cambiarse por similitud!! Analicemos el valor de r. Puesto que dicho valor es invariante por traslaciones podemos suponer (SPG) que, say, $z_3 = 0$. Puesto que también es invariante por rotaciones podemos suponer z_2 *real* (o sea $z_2 = \bar{z}_2$). En esas condiciones se tiene:

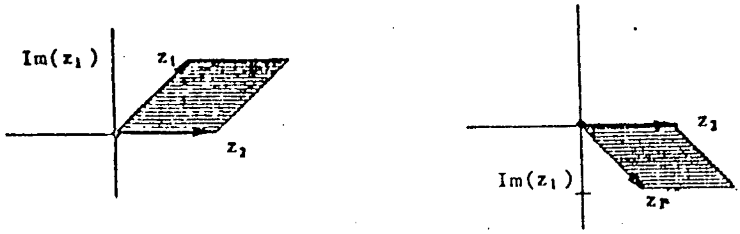
$$|z_1, z_2, 0| = z_1 \cdot \bar{z}_2 - \bar{z}_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot (z_1 - \bar{z}_1) = 2 \cdot z_2 \cdot \frac{z_1 - \bar{z}_1}{2i} \cdot i$$

es decir
$$r = 2 \cdot z_2 \cdot \frac{z_1 - \bar{z}_1}{2i} = 2 \cdot z_2 \cdot \mathrm{Im}(z_1)$$

donde $\mathrm{Im}(z_1) :=$ parte imaginaria de z_1 .

Pero entonces un examen geométrico de la situación nos dice que, $r = 2$ veces el área (orientada) del paralelogramo de base z_2 y lado el vector z_1 .

Se sigue en particular que los puntos están alineados si y sólo si el área es nula, o sea, si $r = 0$.



Notemos de paso que podemos dar ahora una respuesta al Ejercicio 1.5. donde pedimos analizar el valor $\frac{1}{2}\cdot(z_1\cdot\bar{z}_2 - z_2\cdot\bar{z}_1)$. Se tiene

$$\frac{1}{2}\cdot|z_1, z_2, 0| = \frac{1}{2}\cdot(z_1\cdot\bar{z}_2 - z_2\cdot\bar{z}_1)$$

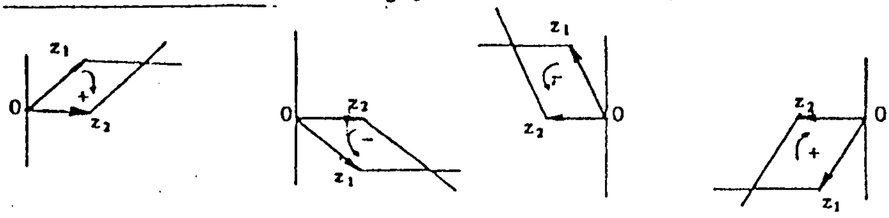
= área (orientada) del paralelogramo de lados z_1, z_2

= doble del área (orientada) del triángulo de vértices 0, z_1, z_2.

7.2. Nota. En lo anterior hablamos de área (orientada), lo hacemos en sentido "naive", es decir tratando de poner en evidencia el hecho que el número obtenido no es un número positivo o nulo, como corresponde a un "área". Sería tal vez más preciso decir "área con signo" Pero el signo es a la postre él factor de orientación.
Sean finalmente z_1, z_2, z_3 complejos en un cierto órden. Sea $r \in \mathbb{R}$ la parte imaginaria de $|z_1, z_2, z_3|$. Si los complejos no están alineados, es $r \neq 0$.

7.3. DEFINICION. Diremos que z_1, z_2, z_3 es una *terna positiva* (u orientada positivamente) si $r > 0$. Y correspondientemente una *terna negativa* si $r < 0$.

Puesto que toda terna es equivalente por isometrías a una de las cuatro siguientes posibilidades de 0, z_1, z_2 se sigue por observación que una terna es positiva si y sólo si el sentido de recorrido coincide con el del movimiento de las agujas de un reloj de pared.



7.4. Ejemplos

i. $|0,1,i| = \bar{i} - i = -2\cdot i$ (terna negativa)

ii. $|1,0,i| = 2\cdot i$ (terna positiva)

iii. $|0,-1,i| = -|0,1,i| = 2\cdot i$ (terna positiva)

iv. $|0,-1,-i| = |0,1,i| = -2\cdot i$ (terna negativa)

8. EJERCICIOS.

1. Analizar las siguientes transformaciones en el plano de Gauss, según las propiedades de ser similitudes, isometrías. Determinar puntos fijos.

a) $f(z) = i \cdot z$	f) $f(z) = (1+i/1-i)\cdot z + (1-i)$
b) $f(z) = -i \cdot z$	g) $f(z) = i \cdot \bar{z}$
c) $f(z) = i \cdot z + 1$	h) $f(z) = \bar{z} + i$
d) $f(z) = -z$	i) $f(z) = (z + i)/i$
e) $f(z) = z + i$	j) $f(z) = \bar{z} / i$

2. Interprete geométricamente las siguientes similitudes:

   a) $f(z) = r \cdot z + \beta$, $r \in R$, $r \neq 0,1$

   (Re: homotecia de centro $\beta/(1-r)$ y razón r).

   b) $f(z) = \alpha \cdot z$, $\alpha \neq 0$

   (Re: rotaciones dilatadas ó espiraladas).

3. Sea $T \subset E(R^2)$ la totalidad de traslaciones de R^2. Probar que T es un subgrupo abeliano e invariante de $E(R^2)$. ¿Es subgrupo invariante en $Sim(R^2)$? (Un subgrupo invariante en $Sim(R^2)$? (Un subgrupo H de un grupo G se dice *invariante* o *normal* en G si para todo $h \in H$, $g \in G$, $g \cdot h \cdot g^{-1} \in H$ o también $g \cdot H \cdot g^{-1} \subset H$).

4. Para qué valores de $\alpha \in C\setminus(0)$ tiene la similitud $f(z) = \alpha \cdot z + \beta$, órden finito en $Sim(R^2)$? , o sea existe un natural m tal que $f^m = Id$. ¿Qué similitudes f satisfacen $f^2 = Id$, es decir son *involutivas*?

5. Probar que dados $a, b, c \in C$ distintos entre si, sus afijos en el plano de Gauss son vértices de un triángulo equilátero si y sólo si satisfacen una de las condiciones siguientes (todas equivalentes entre sí).

   a) $(b - c)^2 + (c - a)^2 + (a - b)^2 = 0$

   b) $(b - c)^2 = (c - a) \cdot (a - b)$ (y análogas: $(c - a)^2 = (c - b)\cdot(b - a)$, etc.).

   c) $(b - c)^{-1} + (c - a)^{-1} + (a - b)^{-1} = 0$.

6. Probar que tres complejos a, b, c de la circunferencia unitaria son vértices de un triángulo equilátero si y sólo si $a + b + c = 0$.

7. Denotemos genéricamente con: R: = rotación, S: = simetría, T: = traslación.
Mostrar exaustivamente con dibujos composiciones tales como: RR, RT, TR, TS, ST, SS, RS, SR, RRR, SSS. (Hacer silencio!)

8. Probar que dos rotaciones R_1, R_2 conmutan (o sea $R_1 \cdot R_2 = R_2 \cdot R_1$) sí y sólo sí poseen el mismo centro de rotación.

9. Probar que toda rotación en $O(2)$ es producto de dos simetrías en $O(2)$ pudiendo elegirse una de ellas en forma arbitraria. Se sigue que las simetrías en $O(2)$ *generan* $O(2)$. Expresar la rotación en $O(2)$ de 30 grados como producto de dos simetrías, una de ellas respecto del eje real.

10. Probar que toda isometría en R^2 puede escribirse como producto de a lo sumo tres simetrías. ¿En que casos dos simetrías son suficientes?

11. Sean r_1, r_2 dos rectas en R^2. Sean S_1, S_2 las simetrías respecto de r_1 y r_2 respectivamente. Probar que $S_1 \cdot S_2 = S_2 \cdot S_1$ (o equivalentemente $(S_1 S_2)^2 = Id$) si y sólo si las rectas coinciden o son perpendiculares entre sí.

12. Sean S_1, S_2 dos simetrías respecto de rectas por el origen. Probar que la composición $S_2 \cdot S_1$ es una rotación alrededor del origen en un ángulo igual al *doble* del ángulo que determinan las rectas dadas.
(Solución: Sea r_1 una recta por el origen de pendiente θ_1 y análogamente r_2 con pendiente θ_2. Sean S_1, S_2 las simetrías respecto de las rectas r_1, r_2 respectivamente. Podemos suponer SPG : $0 \leq \theta_1 \leq \theta_2 < 2\pi$. Se tiene

$$S_1(z) = e^{2i\theta_1} \cdot \bar{z} \quad , \quad S_2(z) = e^{2i\theta_2} \cdot \bar{z}$$

Por lo tanto

$$S_2 \cdot S_1(z) = S_2(e^{2i\theta_1} \cdot \bar{z}) = e^{2i\theta_2} \cdot e^{-2i\theta_1} \cdot z$$
$$= e^{2i(\theta_2 - \theta_1)} \cdot z$$

o sea una rotación por 0 de $2(\theta_2 - \theta_1)$).

13. Yeti. De un ejemplo de subgrupo de $O(2)$ *infinito*, generado por 2 simetrías.

14. Sea $\alpha = a + i\cdot b$, si $z = x + i\cdot y$ escribamos $z = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$. Probar que las ecuaciones $f(z) = \alpha \cdot z$ y $g(z) = \alpha\cdot \bar{z}$ corresponden a las operaciones con matrices

$$\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} a & b \\ b & -a \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

respectivamente. Las matrices

$$\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a & b \\ b & -a \end{bmatrix}, \quad \text{con} \quad a^2 + b^2 = 1,$$

determinan completamente el grupo ortogonal $O(2)$.
Extender estas consideraciones a $E(R^2)$.

15. Sea $G \subset Tran(R^2)$ un subgrupo de transformaciones. Se dice que G opera *transitivamente* en R^2 si dados x,y en R^2 existe $g \in G$ tal que $g(x) = y$.
Determinar cuáles de los siguientes subgrupos de $Tran(R^2)$ operan transitivamente:

a) $E(R^2)$,
b) $Sim(R^2)$,
c) $T(R^2)$,
d) $Sim(R^2,0) :=$ similitudes que fijan el 0,
e) $Rot(R^2,0) :=$ rotaciones de R^2 con centro 0.

Defina Ud. otros subgrupos de $E(R^2)$ y analice la transitividad.

APENDICE

9. SUBGRUPOS FINITOS DE $E(R^2)$

Determinaremos primeramente los subgrupos finitos de $O(R^2)$. Los grupos cíclicos C_n generados por una rotación alrededor del origen de $2\pi/n$ son ejemplos de subgrupos finitos. Estos son todos conmutativos. También una simetría S respecto de una recta por el origen genera un grupo de órden 2, dado que $S^2 = Id$. Recordemos que si S_1, S_2 son simetrías en $O(R^2)$ entonces $S_1\cdot S_2$ es una rotación por el origen. Se sigue que si G no posee rotaciones $(\neq Id)$ entonces $G = \{Id\}$ ó $G = \{S, Id\}$. Supongamos entonces que G posee rotaciones propias, es decir distintas de la identidad.

Sea G un subgrupo finito de $O(R^2)$. Sea $\rho = \rho_\theta$ una rotación con la propiedad que θ, $0 < \theta < 2\pi$ es *mínimo* entre todas las posibles rotaciones propias contenidas en G. Dicha elección es posible dado que G es un grupo finito. Sea $\rho' = \rho_{\theta}'$ una rotación en G. Afirmamos que $\theta' = m \cdot \theta$ para algún $m \in N$. En efecto, existe $m \in N$ con la propiedad $m\theta < \theta' < (m+1)\theta$. Pero entonces la rotación $\rho' \cdot \rho^{-1} = \rho_{\theta''}$ con $0 < \theta'' = \theta' - m\theta < \theta$, yace en G. Se sigue que $\theta' = m\theta$, y por lo tanto $\rho^m = \rho'$. Sea entonces $\mathcal{R}$ el subgrupo G generado por ρ. $\mathcal{R}$ es un grupo cíclico de órden, digamos, n. Si $G = \mathcal{R}$ nada hay que hacer. Sea $S \in \mathcal{R} \setminus G$. S es una simetría. Sea S' cualquier simetría en G; la composición $S \cdot S'$ es una rotación. Existe entonces i, $0 < i < n$ tal que $S \cdot S' = \rho^i$, o sea (teniendo presente que $S'^{-1} = S'$) $S' = S \cdot \rho^i$ (y además unívocamente). Hemos probado que los elementos de G se escriben unívocamente como productos $S \cdot \rho^i$, con $i = \{0, 1, \ldots, n-1\}$. Notemos que siendo $S \cdot \rho$ una simetría se satisface $(S \cdot \rho)^2 = Id.$ o sea, $S \cdot \rho = \rho^{n-1} \cdot S$, puesto que $\rho^{-1} = \rho^{n-1}$.

DEFINICION: Un grupo finito G con dos generadores S, sometidos a las relaciones $S^2 = Id.$, $\rho^n = Id.$, $S \cdot \rho = \rho^{-1}$, se denomina *DIHEDRAL*. Se denota con D_2^n

Hemos probado entonces que los subgrupos finitos del grupo ortogonal $O(R^2)$ son *cíclicos*: C_n, $n \in N$ o *dihedrales*: D_2^n, $n \in N$.

Geométricamente D_2^n es el grupo de simetrías del polígono regular de n lados con centro en 0.

Pasemos al caso $G \subset E(R^2)$. Probemos primeramente que G *fija* un punto en R^2, es decir existe $z \in R^2$ con $f(z) = z$ *cualquiera* sea f en G. Sea $x \in R^2$ arbitrario y formemos la *combinación afín*:

$$z = \frac{f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(1)}{n} = \frac{1}{n} \cdot f_1(x) + \frac{1}{n} \cdot f_2(x) + \ldots + \frac{1}{n} \cdot f_n(x)$$

siendo $G = \{f_1, \ldots, f_n\}$.

Siendo z una combinación *afín*, para todo $f \in G \subset E(R^2)$ y como puntualizamos anteriormente (véase 5.4), se verifica

$$f(z) = \frac{1}{n} \cdot f \cdot f_1(x) + \frac{1}{n} \cdot f \cdot f_2(x) + \ldots + \frac{1}{n} \cdot f \cdot f_n(x)$$

pero tratándose de un grupo finito, las composiciones $f \cdot f_1, \ldots, f \cdot f_n$ no son otra cosa que una permutación de $f_1, \ldots, f_n$, luego $f(z) = z$, como se quería probar. Pero entonces

$$\tau_{-z} \cdot f_i \cdot \tau_z \in O(2) \quad , \qquad i: = 1, \ldots, n .$$

La aplicación

$$g \to \tau_{-z} \cdot g \cdot \tau_z = \tau_z^{-1} \cdot g \cdot \tau_z$$

es un isomorfismo de $E(\mathbf{R}^2)$ sobre $E(\mathbf{R}^2)$, o sea es un automorfismo, con la propiedad que aplica G en $O(2)$, es decir

$$G \text{ es isomorfo a } \tau_z^{-1} \cdot G \cdot \tau_z \subset O(2)$$

que es un subgrupo de $O(2)$ y que ya hemos clasificado. Se suele decir en la terminología de la teoría de grupos que el grupo G es *conjugado* a un subgrupo de $O(2)$. En definitiva los subgrupos finitos de isometrías son cíclicos o dihedrales.

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Universidad de Buenos Aires.

y

Consejo Nacional de Investigaciones, Científicas y Técnicas. Buenos Aires, Argentina.

Dirección Postal: Anchorena 792, La Lucila, (1636) Buenos Aires, Argentina.