PERLAS MATEMATICAS

"Otra" demostración de la irracionalidad de $\sqrt{2}$

Enzo Gentile

El lector conocerá sin dudas varias demostraciones de este resultado clásico. Aquí incluiremos otra y esperamos que la misma estimule a intentar nuevas demostraciones y sobre todo a plantearle a los alumnos mismos que inventen sus demostraciones.

Pensamos que una buena forma de estimular el aparato creativo de los alumnos es pedirles "dar nuevas demostraciones" de los resultados tratados en clase. No creo que en la escuela secundaria sea hecho corriente oir a un profesor proponer semejante tarea!

En la presente demostración utilizamos la siguiente propiedad aritmética que un número primp p puede o no poseer

(p) $\qquad p \mid m^2 + n^2 \Rightarrow p \mid m \quad y \quad p \mid n \quad , \quad n,m \in N.$

(Notación: la barra vertical $\mid$ denota la relación "divide a" y $\nmid$ su negación).

Ejemplos:

i. $\qquad 5 \mid 2^2 + 1^2$ pero $5 \nmid 2$.

ii. $\qquad 3 \mid m^2 + n^2 \Rightarrow 3 \mid m \quad y \quad 3 \mid n$.

En efecto, decir que un número es divisible por 3 significa que su resto en la división por 3 sea 0. Analicemos entonces los posibles restos de un número y de su cuadrado. Eso lo hacemos en la tablita adjunta,

resto de x (módulo 3)	resto de x^2 (módulo 3)
0	0
1	1
2	1

Se sigue de esta tabla que dos restos cuadráticos sumados sólo dan resto cero en el caso $0+0$. Por lo tanto si 3 divide a $m^2 + n^2$, ambos m y n deben tener resto 0. Esto prueba nuestra afirmación.

iii. $\quad 7 \mid m^2 + n^2 \Rightarrow 7 \mid m \quad y \quad 7 \mid n$.

En *efecto*, haciendo la tablita de restos de x y x^2 resulta

resto de x (módulo 7)	resto de x^2 (módulo 7)
0	0
1	1
2	4
3	2
4	2
5	4
6	1

Observamos que la única posibilidad que $m^2 + n^2$ tenga resto 0 (módulo 7) es que m y n posean *ambos* resto 0, es decir, sean divisibles por 7.

Proposición: Sea $a \in \mathbb{N}$,

i. Si $a \equiv 2$ (módulo 3), o sea, 2 es el resto de la división de a por 3, entonces $\sqrt{a}$ es irracional. En particular, se aplica para valores de a : = 2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, 26, etc.

ii. Si $a \equiv 6$ (módulo 7), entonces $\sqrt{a}$ es irracional.
En particular, se aplica para valores de a : = 6, 13, 20, 27, 34, etc.

Demostración: Probemos sólamente i. para $a = 2$, dejando el caso general y la parte ii. como ejercicio para el lector.

Si $\sqrt{2}$ no es irracional podemos escribir $\sqrt{2} = n/m$ con n y $m \in \mathbb{N}$ y *además* podemos suponerlos *coprimos* (sin factores primos comunes). Se sigue $m^2 . 2 = n^2$, por lo tanto

$$m^2 + n^2 = 3m^2 .$$

Entonces $3 | m^2 + n^2$. Por lo tanto $3 | m$ y $3 | n$, lo cual constituye una contradicción a la propiedad de ser m y n coprimos. La contradicción provino de suponer $\sqrt{2}$ racional. Por lo tanto $\sqrt{2}$ es irracional.

Q.E.D.

Nota: El lector se preguntará, volviendo a la propiedad (p), ¿qué primos p la satisfacen? He aquí la respuesta:

p satisface (p) si y sólo si, p es expresable en la forma $p = 4m + 3$, para algún $m \in \mathbb{Z}$.

¿ n^m ó m^n ?

Una pregunta típica en Artimética es la de saber, dados enteros positivos n y m, cuál es el mayor de los enteros

$$n^m \text{ ó } m^n .$$

Una respuesta completa e inmediata se obtiene utilizando recursos elementales de Análisis I. Es lo que haremos en esta breve Nota.

Consideremos la siguiente función real

$$f(x) = x^{1/x} \quad , \qquad x > 0.$$

Se entiende mejor esta función si utilizamos la siguiente expresión equivalente

$$f(x) = e^{(1/x)\cdot\ln(x)} \qquad (\ln := \text{logaritmo natural}).$$

Vemos entonces que si $x > 0$ esta función no sólo es continua sino es derivable para todo $x > 0$. En efecto, para $x > 0$ las funciones x^{-1} y $\ln(x)$ son derivables y así lo es su producto y por lo tanto la exponencial. Esta sería una rápida justificación de la derivabilidad de f. Dejamos a cargo del lector hacer una fundamentación más detallada.

La derivada de f es

$$f'(x) = x^{1/x}\cdot(1/x\cdot\ln(n))' = (x^{1/x}/x^2)\cdot(1-\ln(x)) .$$

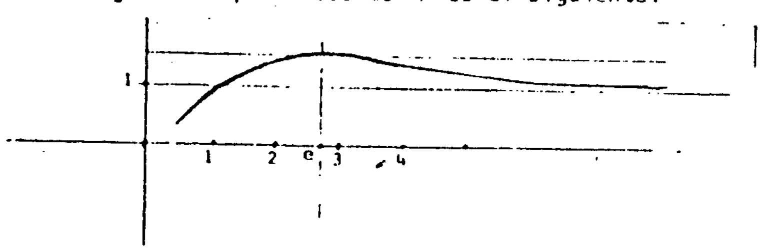
Observamos primeramente que $f'(x) = 0$ si y sólo si $1-\ln(x) = 0$, es decir $x = e$. Además

$$0 < x < e \;\rightarrow\; f'(x) > 0 \;\rightarrow\; f \quad \text{es estrictamente creciente}$$

$$e < x \;\rightarrow\; f'(x) < 0 \;\rightarrow\; f \quad \text{es estrictamente decreciente}$$

por lo tanto f alcanza un máximo en $x = e$: $f(e) = e^{1/e} < e^{1/2} < \sqrt{3}$.

Además, $e < x \rightarrow 0 < \ln(n) \rightarrow 1/x\cdot\ln(x) > 0 \rightarrow x^{1/x} > 1$, de manera que f va decreciendo a partir de $x = e$ monótonamente al valor asintótico 1. Un gráfico aproximado de f es el siguiente:



Estamos en condiciones de obtener algunas conclusiones de estas consideraciones totalmente elementales.

1. $e < x < y \rightarrow x^{1/x} > y^{1/y} \rightarrow x^y > y^x$.

   (El último paso se obtuvo elevando ambos miembros a la potencia $x \cdot y$ y utilizando conocidas propiedades de monotonía).

2. En particular si $n \in N$,

$$3 < n \rightarrow \sqrt[3]{3} > \sqrt[4]{4} > \ldots > \sqrt[n]{n} > \ldots$$

3. Si $n, m \in N$,

$$3 \leq n < m \rightarrow \sqrt[3]{3} \geq \sqrt[n]{n} > \sqrt[m]{m} \rightarrow n^m > m^n$$

3'. Si $n \in N$,

$$1 < n < 5 \rightarrow 2^n \leq n^2$$

$$5 \leq n \rightarrow 2^n > n^2 \qquad \text{(Inducción)}$$

4. Puesto que $\sqrt{2} < \sqrt[3]{3}$ se sigue de 2. que

$$\sqrt[3]{3} = \text{máx}\{\sqrt[n]{n} \mid n \in N\}$$

5. $e < \pi \rightarrow e^\pi > \pi^e$.

6. La ecuación $n^m = m^n$ con $n, m \in N$, $n \neq m$ admite la única solución $2^4 = 4^2$. En efecto, $n^m = m^n$ implica $n^{1/n} = m^{1/m}$. Como $x^{1/x}$ es inyectiva para $x \geq 3$, la única posibilidad, si $n < m$, es que $n = 2$. Por lo tanto m debe ser una potencia de 2, $m = 2^t$. Entonces

$$2^{2^t} = (2^t)^2 \quad \text{o sea} \quad 2^{2^t} = 2^{2t}$$

   por lo tanto

$$2^t = 2t \quad .$$

   Si $t > 2$ es $2^t > 2t$ (por inducción). Por lo tanto $t = 1$ ó 2. Si $t = 1$ resulta la solución $2^2 = 2^2$, pero si $t = 2$ se obtiene la solución $2^4 = 4^2$.