

**DESIGUALDADES E INECUACIONES EN TEXTOS ESCOLARES CHILENOS
DE EDUCACIÓN PRIMARIA: UN ANÁLISIS DE LAS PRAXEOLOGÍAS
MATEMÁTICAS.**

Cristina Ayala-Altamirano – Alejandra Besa Undurraga

clayala@uc.cl – abesa@uandes.cl

Universidad de Granada, España – Universidad de Los Andes, Chile

Núcleo temático: Enseñanza y aprendizaje de la matemática en las diferentes modalidades y niveles educativos.

Modalidad: Comunicación breve (CB)

Nivel educativo: Primaria

Palabras clave: Desigualdades e inecuaciones, textos escolares, álgebra educación primaria, modelo epistemológico de referencia

Resumen

Chile, al igual que países como Australia, Canadá, China o EEUU, ha incorporado en sus lineamientos curriculares el álgebra desde primaria. El objetivo de esta investigación es analizar la enseñanza de las desigualdades e inecuaciones propuesta en los textos escolares de primaria distribuidos por el Ministerio de Educación chileno el año 2013. Se consideraron estos pues son la primera transposición didáctica del currículo y una referencia para cientos de colegios públicos y subvencionados. Se realizó un análisis de contenido a textos escolares de matemática en los 1º, 2º, 4º y 5º cursos de Educación Primaria, basándose en la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) para definir un Marco de Referencia Epistemológico (MER) y conocer de qué forma los textos respondían a la pregunta ¿cómo comparar cantidades distintas y expresar el resultado de esa comparación? En este trabajo presentamos el MER con el cual se establecieron las categorías a priori para el análisis de la enseñanza de las inecuaciones y mostramos los principales resultados obtenidos. Concluimos que estos se pueden convertir en una guía para realizar otras transposiciones didácticas que mejoren las propuestas de los textos escolares o la planificación de la enseñanza.

Introducción

Chevallard, en la Teoría de la transposición didáctica, señala que se requiere una serie de transformaciones adaptativas para que el conocimiento que se quiera enseñar sea parte de las prácticas escolares. Con esto, la didáctica amplía su estudio mucho más allá de las instituciones escolares, abarcando a todas aquellas en las que tiene lugar algún tipo de manipulación de los conocimientos matemáticos (Gascón, 1998). En el trabajo transpositivo participan diversos agentes, por tal motivo, es importante mantener una constante vigilancia

del proceso y constatar los posibles quiebres entre los distintos saberes. Según Bosch y Gascón (2007) la limitación más fuerte ocurre cuando el proceso no es capaz de mantener o recrear una posible razón de ser de los conocimientos que la escuela se propone transmitir. La investigación previa sobre el álgebra elemental se ha centrado principalmente en la educación secundaria. Y los trabajos que focalizan su estudio en Educación Primaria primordialmente se centran en aspectos cognitivos, estudiando lo que los estudiantes son capaces de realizar en estos niveles (Cañadas y Molina, 2016). Investigaciones en primaria y centradas en los aspectos epistemológico son escasas, sobretodo aquellas en las que se haya analizado la forma como se presenta el tema en los textos escolares.

En esta investigación se analizan los textos escolares, distribuidos el año 2013 por el Ministerio de Educación de Chile en los colegios público, pues representan una de las primeras propuestas de transposición didáctica de los contenidos relacionados con álgebra en Educación Primaria, luego de su inclusión en el currículo chileno (MINEDUC, 2012). En ellos se identifica si los textos recrean o no la razón de ser de las desigualdades e inecuaciones, analizando las organizaciones y los fenómenos que los libros de texto muestran. Para su consecución se realizó un Modelo de Referencia Epistemológico (MER), basado en aspectos de la Teoría Antropológica de lo Didáctico, que permite situarse en una posición determinada desde la cuál observar y analizar los textos. Es necesario mencionar que este modelo es relativo, provisional y determinado por el problema que se quiere estudiar en esta investigación, por lo general se considera que es una hipótesis elaborada desde la didáctica, que sirve de referencia para dicho análisis y permite escapar de las restricciones o condicionantes que conlleva el proceso de transposición didáctica (Sierra y Gascón, 2011). En lo que sigue describiremos el MER propuesto, la metodología del trabajo, los resultados y discusión de los mismos. Se finaliza con una reflexión sobre las implicancias para la mejora de los textos escolares y para la enseñanza.

Antecedentes considerados en la construcción del MER

El MER se construyó considerando: (a) las Bases Curriculares chilenas para la Educación Básica (MINEDUC, 2012), en particular, los objetivos de aprendizajes relacionados con la enseñanza y aprendizaje de las desigualdades e inecuaciones; (b) estudios de aspectos históricos y epistemológicos, en los que fue posible observar, por ejemplo, que por muchos siglos las desigualdades no requirieron una técnica para manipular expresiones que surgían

de sus planteamientos. Las desigualdades permitían, establecer propiedades y definiciones y demostrar teoremas a través de las prácticas de acotar y comparar, siendo esto último su principal función. La inecuación surgió como una técnica para manipular las desigualdades y su presencia se remonta al siglo pasado (Borelo y Ledezma, 2009). La inecuación se entenderá como una desigualdad entre dos expresiones algebraicas que involucran cantidades desconocidas o incógnitas (Martínez y Varas, 2013); y (c) Resultados y aportes de otras investigaciones, como la de Borelo y Ledezma, (2009) y la de Bernardis, Nitti y Scaglia (2014), las cuales se refieren a los significados otorgados por maestros de secundaria a las inecuaciones. Con respecto a investigaciones que se refieren al álgebra elemental, Ruiz-Munzón, Bosch y Gascón (2015), mencionan que el álgebra deber ser una herramienta que permita modelizar aspectos intra o extramatemáticos, como un proceso de algebrización en el que la generalización tiene un rol importante. Además, ellos plantean que la modelización se debería basar en la razón de ser de los componentes matemáticos, la que permite su introducción desde una perspectiva funcional (Ruiz-Munzón, Bosch y Gáscon, 2011).

Modelo epistemológico de referencia en torno a las desigualdades e inecuaciones

El MER describe una sucesión de organizaciones matemáticas (OM), cada vez más amplias y completas, pues las limitaciones y restricciones de una hacen surgir otra. Además, cada una corresponde a la elaboración de respuestas parciales a una cuestión problemática inicial (Bosch, Gascón y Sierra, 2009). En este caso, el MER considera como concepto general las desigualdades, cuya finalidad es comparar y acotar cantidades. La pregunta inicial o generatriz que representa a esta organización, que se denominará OM_q , es: *¿cómo comparar cantidades distintas y expresar el resultado de esa comparación?* Para responder a esta cuestión y considerando que el desarrollo de la OM_q debe ser paulatino, se definen organizaciones intermedias (OM_i) que responden parcialmente a la pregunta, pero que en su conjunto le dan sentido. En este caso se caracterizan por un lado las cantidades a comparar, según los conocimientos aritméticos y algebraicos que se espera que los estudiantes de Educación Primaria dominen y por otro lado, el tipo de representación que se pueda realizar, con esto se hace referencia a las posibilidades de representarlas de modo concreto, pictórico o simbólico, lo que en Chile el Ministerio de Educación han denominado COPISI en sus directrices curriculares (Mineduc, 2012). En la figura 1, se resume el MER.

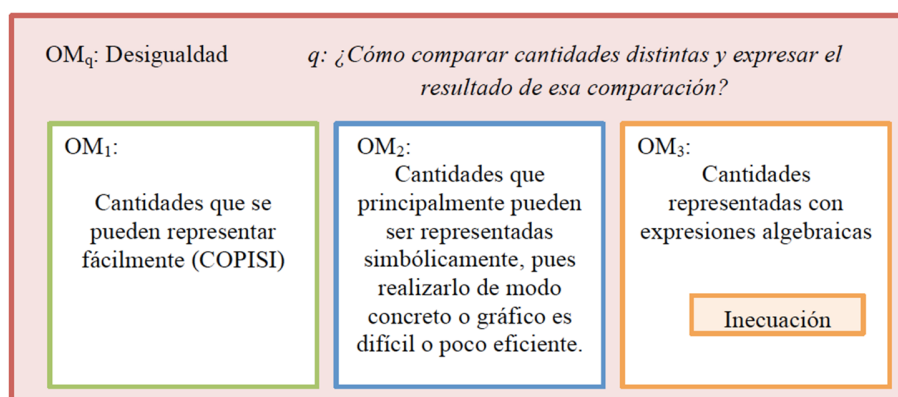


Figura 1. Modelo Epistemológico de Referencia para las desigualdades e inecuaciones.

En las OM_1 y OM_2 las tareas se organizan en tres grandes grupos: (a) aquellas relacionadas con la comparación de dos o más cantidades, (b) aquellas relacionadas con la forma de expresar el resultado de la comparación y (c) aquellas en la que se focalizaba la atención en alguna propiedad de las desigualdades. Las técnicas para cada grupo de tareas son diversas, estas se detallan en Ayala-Altamirano (2016). Las tecnologías que justifican estas técnicas son principalmente las propiedades de la desigualdad. En esta primera fase se pretende relacionar la aritmética con el álgebra a partir de la generalización de las propiedades de las desigualdades y la comprensión de los signos de desigualdad por medio del desarrollo del pensamiento relacional.

La última OM_i alude a las inecuaciones, amplía y completa a las otras organizaciones, acercándose más al álgebra formal. Las tareas y situaciones problemas que se consideran aquí surgen de la necesidad de comparar cantidades expresadas algebraicamente, a su vez se espera que durante la actividad se planteen interrogantes como las siguientes: (a) ¿cómo plantear una inecuación?, (b) ¿cómo encontrar el o los valores de la cantidad desconocida de una inecuación?, y (c) ¿cómo interpretar los resultados y determinar qué valor o valores puede tomar la incógnita? Las técnicas asociadas a cada grupo de tareas se enuncian en la tabla 1 y en el Anexo 1 se ejemplifican algunas de ellas.

Las principales tecnologías para resolver una inecuación, están relacionadas con las propiedades de las desigualdades que se desarrollaron en las anteriores OM_i , no obstante, en esta oportunidad las aplican para transformar las inecuaciones en otras más simples que sean equivalentes a la original más que descubrirlas o generalizarlas a partir de casos particulares.

El análisis de los textos escolares

Hemos utilizado la técnica del análisis de contenido a textos escolares de matemática en los 1º, 2º, 4º y 5º cursos de Educación Primaria. Las categorías se establecieron a priori y se basaron en el MER descrito anteriormente. Se identificaron las tareas, técnicas y tecnologías asociadas a cada OM_i. Además, en las tareas se analizó si éstas se presentaban asociadas a un contexto y cuál era su función.

En este trabajo nos centraremos solo en los resultados relacionados con las inecuaciones. Según el currículo de Chile, éstas se estudian en 4º y 5º de primaria, y luego se retoma su estudio en secundaria. La muestra está compuesta por los textos detallados en el Anexo 2.

En la tabla 1, se muestran las tareas y técnicas identificadas en los textos. Como se puede observar, se plantean actividades para cada tipo de tarea. Las técnicas son variadas para las dos primeras tareas, mientras que la interpretación de los resultados solo se realiza a partir del lenguaje natural.

Tabla 1.

Tipos de tareas y técnicas presentes en los textos escolares para la OM₃

Tipos de tareas	Técnicas	Nº de representantes
Plantear una inecuación.	Utilizar lenguaje natural	1
	Utilizar representaciones pictóricas: Modelo de barras.	0
	Utilizar representaciones pictóricas: Modelo de balanzas.	9
	Utilizar lenguaje algebraico.	3
Encontrar el resultado, el o los valores de la incógnita de una inecuación.	Ensayo y error.	12
	Descomposición y correspondencia 1 a 1.	0
	Aplicación de las propiedades de las desigualdades.	0
Interpretar los resultados y determinar	Utilizar el lenguaje natural.	19
	Utilizar la recta numérica.	0

qué valor o valores
puede tomar la
incógnita.

Utilizar lenguaje algebraico.

0

Del total de las tareas identificadas, 7 se presentaban asociadas a un contexto y 46 no. Lo cual evidencia la tendencia de presentar el álgebra como técnicas de cálculo y resolución y no como una herramienta para modelar diversas situaciones. En las figuras 2 y 3 se muestran ejemplos de las tareas identificadas.

Usa balanza o pesas para encontrar dos soluciones posibles a las desigualdades

1. $w > 0$

2. $x > 5$

4. $g < 4$

5. $7 > t$

Figura 2. Ejemplo de tarea de resolución de una inecuación (5° primaria, p.91).




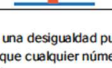
Escribe una expresión para cada enunciado.

52. **Pesca** En algunos lagos, los pescadores devuelven las truchas que miden menos de 25,4 cm de longitud. Escribe una desigualdad que represente las longitudes de truchas que se pueden conservar.

Figura 3. Ejemplo tarea de planteo de inecuación (5° primaria, p.92).

En 5° básico se presentan por primera vez técnicas para resolver las inecuaciones y determinar el valor de las variables, antes solo se muestra un par de casos resueltos y se espera que se emule lo realizado, sin mayor explicación. La técnica sugerida se basa en la representación en balanzas y muestra dos alternativas para proceder: una tiene relación con el ensayo y error, la otra con aplicar la operación inversa. En ninguno de los casos se explicitan las tecnologías asociadas, tal como se muestra en la figura 4.

Una desigualdad puede contener una variable, como en $x > 3$. Una **solución de una desigualdad** es cualquier valor de la variable que hace que el enunciado sea verdadero.

x	$x > 3$	Balanza	¿Solución?
0	$0 > 3$		No; 0 no es mayor que 3, por lo tanto, 0 no es una solución.
3	$3 > 3$		No; 3 no es mayor que 3, por lo tanto, 3 no es una solución.
4,5	$4,5 > 3$		Sí; 5 es mayor que 3, por lo tanto, 5 es una solución.
12	$12 > 3$		Sí; 12 es mayor que 3, por lo tanto, 12 es una solución.

La tabla muestra que una desigualdad puede tener más de una solución. La balanza nos muestra que cualquier número mayor que 3 es una solución para esta desigualdad.

Ejemplo 2 Resolver desigualdades con suma o resta.


A $y + 2 > 8$. Se suma 7 a y .

$$y + 2 - 2 > 8 - 2$$

$$y > 6$$

Resta 2 en ambos lados de la desigualdad.

El 12 es una solución para esta Inecuación, ya que es mayor que 6, por lo tanto, se mantiene la desigualdad.




B $4 < n - 3$. Se resta 3 de n .

$$4 < n - 3$$

Suma 3 a ambos lados de la desigualdad.

El 8 es una solución para esta Inecuación, ya que es mayor que 4, por lo tanto, se mantiene la desigualdad.



Práctica con supervisión

Figura 4. Ejemplos de técnicas para resolver inecuaciones.

Las tecnologías, que representan el discurso que hacen comprensible y justifican las técnicas, su aplicabilidad y validez, no se mencionan.

Conclusiones

Este estudio nos permitió describir la propuesta de enseñanza y aprendizaje de las organizaciones matemáticas en cuestión y determinar cómo se implementaron, por primera vez en textos escolares, las directrices curriculares propuestas por el Ministerio de Educación de Chile.

En este comunicado hemos realizado una propuesta de MER para las organizaciones matemáticas de desigualdades e inecuaciones, las cuales son estudiadas desde 1° de primaria en Chile. Esta propuesta pretende articular la enseñanza de estas organizaciones y destacar su función, de modo que el álgebra pueda interpretarse como una herramienta para modelar situaciones relacionadas con el origen del concepto de desigualdad, tal como lo sugieren Ruiz-Munzón, Bosch y Gáscon (2011). Este MER nos permitió analizar los textos escolares e identificar cómo se introducen por primera vez en Chile estos conceptos en primaria. Evidenciando cuáles podrían ser algunos elementos a mejorar en las futuras propuestas de textos escolares.

Basándose en los resultados obtenidos, creemos que es necesario complementar los textos con instancias en las que los estudiantes puedan reflexionar y tomar consciencia de las técnicas utilizadas, resolver situaciones problemas abiertas y mejorar la progresión de las técnicas. Sobre el último punto, si bien hay variedad de técnicas, no se presentan de manera articulada, es decir las limitaciones de una no hacen surgir a la otra y en conjunto dar

significado al tema de estudio. Además, creemos que es necesario que los estudiantes sean conscientes de los fundamentos de cada una de las técnicas, es decir, de las tecnologías, de modo que puedan aplicarlas en otras instancias o adaptarlas según sean las necesidades de los contextos. También es necesario articular la OM₃ con las anteriores, de modo que se observe una progresión entre lo realizado al estudiar las desigualdades en el ámbito de los números naturales y en el ámbito algebraico.

El modelo puede servir de referencias para otras propuestas editoriales o para profesores en ejercicio, quienes entre unas de sus labores deben planificar la enseñanza, crear, seleccionar y adaptar las actividades para llevar a cabo la enseñanza.

Referencias bibliográficas

- Ayala-Altamirano, C. (2016). *Desigualdades e inecuaciones en textos escolares chilenos de educación básica: Análisis praxeológico según la Teoría Antropológica de lo Didáctico* (Trabajo de fin de Máster no publicado). Universidad de Los Andes, Chile.
- Bernardis, S., Nitti, L. y Scaglia, S. (2014). Indagación sobre el concepto de inecuación. [Notas de presentación V Jornadas de Educación Matemáticas y II Jornadas de Investigación en Educación Matemática]. Santa Fe, Argentina: Universidad Nacional del Litoral.
- Borello, M. y Lezama, J. (2009). Un planteamiento de resignificación de las desigualdades a partir de las prácticas didácticas del profesor. Un enfoque socioepistemológico. En P. Lestón (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (Vol. 22, pp. 1091-1099). México, DF: CLAME..
- Bosch, M. y Gascón, J. (2007). 25 años de transposición didáctica. En L. Ruiz-Higueras, A. Estepa y F. J. García (Eds.), *Sociedad, Escuela y Matemáticas. Aportaciones de la Teoría Antropológica de lo Didáctico*. (pp. 385-406). Jaén, España: Servicio de Publicaciones de la Universidad de Jaén.
- Bosch, M., Gascón, J. y Sierra, T. A. (2009). Análisis de los manuales españoles para la formación de maestros: El caso de los sistemas de numeración. En M. J. González, M. T. González y J. Murillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIII* (pp. 139-150). Santander, España: SEIEM.

- Cañadas, M. C. y Molina, M. (2016). Una aproximación al marco conceptual y principales antecedentes del pensamiento funcional en las primeras edades. En E. Castro, E. Castro, J. L. Lupiáñez, J. F. Ruíz y M. Torralbo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática. Homenaje a Luis Rico* (pp. 209-218). Granada, España: Comares.
- Gascón, J. (1998). Evolución de la didáctica de las matemáticas como disciplina científica. *Recherches en didactique des mathématiques*, 18(1), 7-34.
- Martínez, S. y Varas, M. (2013). *Recursos para la formación inicial de profesores de Educación Básica en Matemática: Álgebra*. Santiago, Chile: SM
- Ministerio de Educación de Chile (2012). *Bases curriculares Educación Básica*. Santiago, Chile: Unidad de Currículum y Evaluación.
- Ruíz-Munzón, N. R., Bosch, M. y Gascón, J. (2015). El problema didáctico del álgebra elemental: Un análisis macro-ecológico desde la teoría antropológica de lo didáctico. *REDIMAT*, 4(2), 106-131.
- Ruíz-Munzón, N., Bosch, M. y Gascón, J. (2011). Un modelo epistemológico de referencia del algebra como instrumento de modelización. *Un panorama de la TAD*, 10, 743-765.
- Sierra, T. A. y Gascón, J. (2011). Investigación en didáctica de las matemáticas en la educación infantil y primaria. En M. Marín, G. Fernández, L. J. Blanco y M. M. Palarea (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XV* (pp. 125-164). Ciudad Real, España: SEIEM

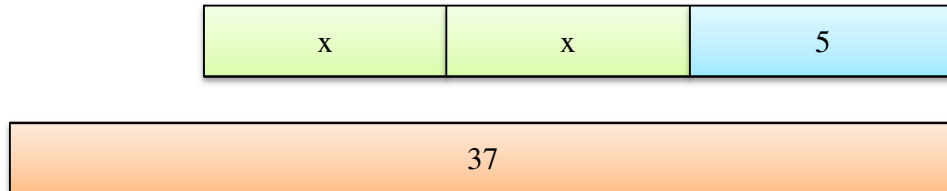
Anexo 1: Técnicas para resolver una inecuación

La técnica de descomponer y establecer la correspondencia 1 a 1, será ejemplificada con un caso a partir de tres registros distintos, pero tomando como referencia la misma inecuación: $2x + 5 < 37$.

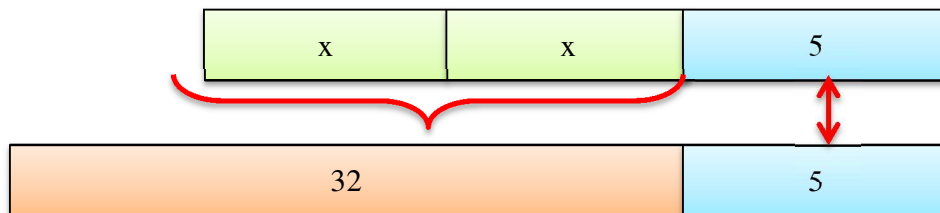
Modelo de barras

1.º Representar cada lado de la desigualdad en barras distintas. Recordar que las barras deben tener distinta longitud y que la diferencia será una referencia relativa, no exactamente proporcional a los valores reales.

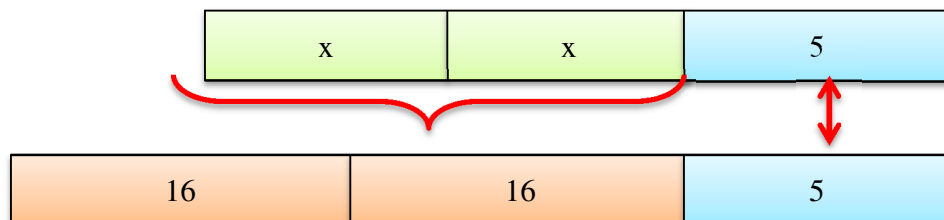
$$2x + 5 < 37$$



2.º Emparejar las representaciones.



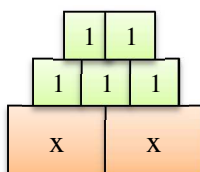
3.º Al interpretar lo emparejado, 32 es necesario dividirlo en 2, así se obtendría una referencia para conocer el valor de cada x .



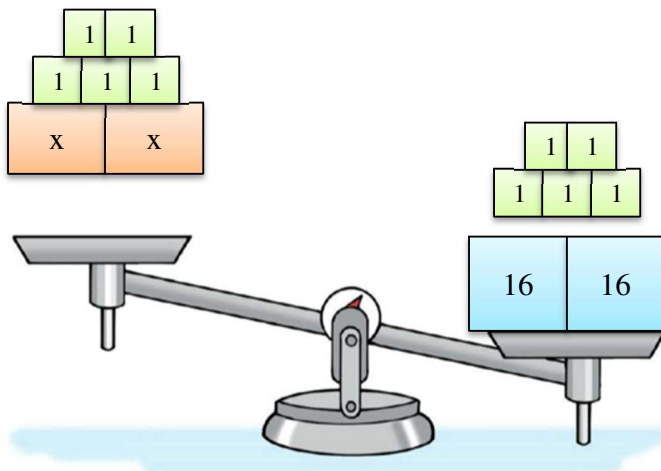
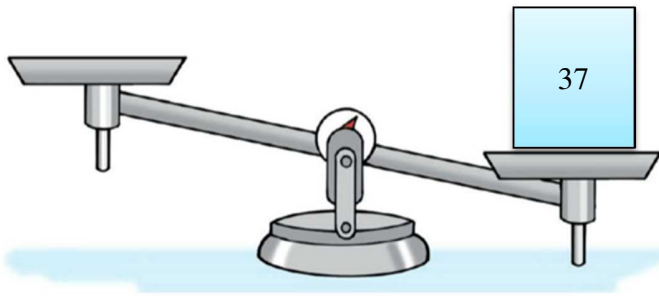
4.º A partir de la representación, se podría señalar que x es menor que 16.

Se espera que al representar las inecuaciones en las barras, no sea necesario repetir todo el procedimiento dibujando en reiteradas ocasiones las barras. Basta con un par y representar ordenadamente las relaciones y cambios que se efectúan.

Modelo de balanza



Inecuación dada: $2x + 5 < 37$



Se descompone el lado derecho de modo que se pueda establecer relación con el lado izquierdo de la balanza.

Se establece la correspondencia entre cada uno de los términos que forman la desigualdad. $x < 16$

Tanto en el modelo de barras como el modelo de balanza, representar las sustracciones es una limitante, por lo que se no recomienda su uso. Esta limitante no se presenta en el siguiente modelo que se basa en la igualación de las estructuras.

Representación simbólica

$$2x + 5 < 37$$

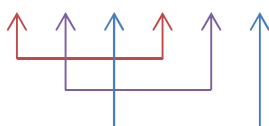
Inecuación dada.

$$2x + 5 < 32 + 5$$

Se descompone el lado derecho de modo que se pueda visualizar la suma de 5.

$$2 \cdot x + 5 < 2 \cdot 16 + 5$$

El número 32 se expresa como 2 por otro número, tal como se muestra en el lado izquierdo de la desigualdad.



$$x < 16$$

Se establece la correspondencia entre cada uno de los términos que forman la desigualdad.

La última técnica a desarrollar es la aplicación de las propiedades de las desigualdades, para plantear otras equivalentes que permitan descubrir el valor de la variable. Las propiedades las descubrieron en las OM_i anteriores, por lo que es instancia de aplicarlas. Por ejemplo:

$$2x + 5 < 37$$

Inecuación dada.

El objetivo es lograr plantear una desigualdad “despejando” la incógnita.

$$2x + 5 - 5 < 37 - 5$$

Restar a ambos lados de la desigualdad 5.

$$2x : 2 < 32 : 2$$

Dividir en 2, en ambos lados de la desigualdad.

$$x < 16$$

Resultado.

Anexo 2: Referencias de los textos analizados.

Andrews, A., Dixon, J., Norwood, K., Roby, T., Scheer, J., Bennett, J., Luckie, L., Newman, V., Scarcella, R. y Wright, D. (2014). *Matemática 4º Básico. Texto del estudiante. Adaptación*. Santiago, Chile: Galileo.

Andrews, A., Dixon, J., Norwood, K., Roby, T., Scheer, J., Bennett, J., Luckie, L., Newman, V., Scarcella, R. y Wright, D. (2014). *Matemática 5º Básico. Texto del estudiante. Adaptación*. Santiago, Chile: Galileo.

Ho Kheong, F., Ramakrishnan, C., Puiwah, B. L. y Choo, M. (2014). *Mi Matemática. Texto del Estudiante 2°*. Santiago, Chile: Marshall Cavendish Education.

Salazar, R. y Sprovera, M. (2014). *Matemática 1° Básico. Texto del Estudiante*. Santiago, Chile: Fe y Alegría.