

CB-1.003

## MICRO – INGENIERÍA EN LA ENSEÑANZA DEL CÁLCULO DEL VOLUMEN DEL CILINDRO CON USO DEL MÉTODO DE CAVALLIERI.

Eduardo Orellana - Yohana Swears  
[eorellana@ucsc.cl](mailto:eorellana@ucsc.cl) – [yswears@uct.cl](mailto:yswears@uct.cl)

Universidad Católica de Santísima Concepción-Universidad Católica de Temuco. Chile  
Modalidad: CB

Nivel: Terciario o Bachillerato (16 a 18 años)

Núcleo Temático: Enseñanza y Aprendizaje de la Matemática en las diferentes modalidades y niveles educativos.

**Palabras clave:** *Obstáculos didácticos, volumen, Cavallieri*

*En el presente trabajo se muestra como se ha realizado una micro ingeniería didáctica sustentada en la enseñanza del cálculo del volumen del cilindro con uso del método de Cavallieri. Se desarrollan situaciones didácticas dirigidas al estudiante de educación terciaria, considerando conceptos previos, para que así, con el cálculo de áreas de secciones transversales ellos puedan lograr construir y calcular el volumen del cilindro en especial el circular recto y el prisma recto de base triangular. Se observa que hoy que el cálculo del volumen se realiza sólo con uso de fórmulas directas donde los estudiantes no comprenden implícitamente conceptos claves tales como el cálculo de áreas de figuras planas clásicas, entre otros. También surgen diferentes obstáculos de aprendizaje, ya que, el volumen se considera en la enseñanza escolar de una manera algebraica y algorítmica más que reflexiva.*

*Se presentan aquí, los resultados de la propuesta en base a la metodología de investigación Ingeniería Didáctica y sus conclusiones en base a lo observado en un grupo de estudiantes pertenecientes al Liceo Pablo Neruda de la ciudad de Temuco, Chile, caracterizado por su interculturalidad y una mayoritaria población de estudiantes mapuches.*

### **Antecedentes:**

La enseñanza del cálculo del volumen se realiza con metodologías de enseñanza que no tienen en cuenta el uso de los sentidos para manejar atributos de superficie y que se reducen al uso de instrumentos de medida convencionales, como elegir la regla para medir la longitud de una curva (Olmo, Moreno y Gil, 1993).

18

También plantean que presentan dificultades en la comprensión del área cuando a los estudiantes se plantean problemas con datos erróneos o no reales, donde se calcula la medida de figuras regulares.

Hoy se enseña volumen utilizando el uso de la fórmula sin reflexión, ya que es una manera más cómoda y habitual, que es lo que se utiliza en la sala de clases. (Godino, Batanero y Roa 2002) mencionan que el exceso del uso de fórmulas trae consigo distintos obstáculos de aprendizaje en el concepto de Volumen, entre otros, los más importantes a considerar se encuentran:

- Relación directa entre la altura y el volumen del sólido, mayor altura mayor volumen, ese es un obstáculo frecuente.
- Confunden unidades de medida.
- No comprenden el significado de altura de las figuras geométricas.
- Son usadas variadas fórmulas para hallar volumen, se despierta en los estudiantes una variedad de confusiones utilizando la fórmula incorrecta al momento de hallar el volumen de un sólido.
- Existe un desarrollo algorítmico muy relevante en el cálculo del volumen de cuerpos.

### **Problemática:**

Los antecedentes mencionados evidencian diversas situaciones, por ejemplo, que la enseñanza de la geometría se ha desplazado a un segundo plano; a pesar de que se reconocen las múltiples soluciones que nos brinda la geometría a problemas de la vida diaria, considerando en ello un sentido más aritmético y algebraico, minimizando los resultados y el contexto donde puedan ser usados para la construcción del saber.

Los estudiantes al calcular volumen de cuerpos geométricos sólo se centran en la utilización de fórmulas dejando de lado la reflexión y sobre todo la construcción de conceptos claves

como por ejemplo diferencias entre altura y directriz, de un cilindro, es el mismo elemento geométrico.

### **Fase 1 Análisis Epistemológicos:**

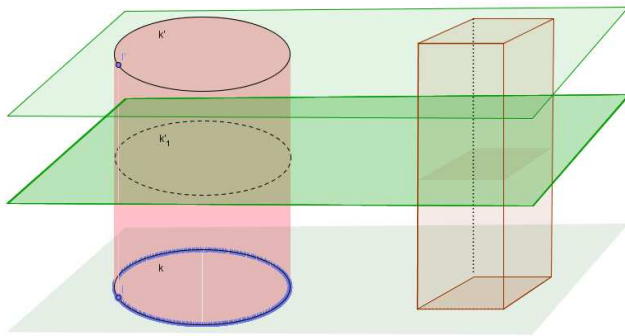
El desarrollo de la geometría como todos sabemos tiene sus inicios ya desde la antigüedad prehistórica en su forma más primitiva, pero es en los Elementos de Euclides donde por primera vez se tienen registro de una formalización más acabada de ella y donde nos enfrentamos a proposiciones formales en base a un sustento teórico axiomático lleno de rigurosidad matemática.

En este trabajo tratamos algunas de estas proposiciones como postulados, entre otros, necesarios dentro de los conceptos previos al método de Cavalieri. Arquímedes desarrolla postulados para cuerpos, así como Eudoxio y Thales de Mileto entre otros. Este último nos dice:

(Primera forma del Teorema de Thales). Tres o más rectas paralelas cortadas por otras dos rectas cualesquiera, determinan en éstas, segmentos proporcionales.

El método de Cavalieri considera el teorema anteriormente enunciado. El principio se basa en ser un método de las secciones para el cálculo de volúmenes, muy útil cuando las secciones son figuras geométricas sencillas de área conocida, como ocurre en el caso de los sólidos.

(Principio de Cavalieri). *Si dos sólidos tienen la misma altura y si las secciones por planos paralelos a las bases a la misma distancia de ellas tienen áreas en una razón dada, entonces los volúmenes de los sólidos están en la misma razón*



## **Fase 2 Análisis a priori:**





- Se piensa que los estudiantes pueden construir los cuerpos con las figuras geométricas entregadas.
- Se cree que los estudiantes obtienen cilindros y prismas de distintas alturas.
- Se cree que los estudiantes logran calcular las áreas de las secciones de los cuerpos.
- Aunque pueden calcular el área de las secciones se cree que pedirán al profesor las fórmulas para poder realizar este cálculo.
- Se piensa que los estudiantes no tienen problema en la obtención de la altura de los cuerpos.
- Se piensa que los estudiantes no tienen dificultad en relacionar altura con área para la obtención del Volumen de estos cuerpos.
- Se piensa que los estudiantes tienen dificultad en el cálculo del área del círculo.
- Se piensa que los estudiantes tienen dificultad en la aproximación del Volumen del cilindro.
- Se cree que los estudiantes tienen dificultad en relacionar el volumen del cilindro y del prisma.
- Se cree que los estudiantes no tienen dificultad en utilizar intuitivamente el método de Cavalieri.

### Fase 3 Experimentación:

La propuesta de Situación Didáctica consiste en proponer a los estudiantes que con figuras geométricas circulares y cuadradas puedan construir cuerpos geométricos como el Cilindro circular recto, el Prisma recto con base cuadrada y Prisma base triangular. Construyen prismas de distintas alturas, para luego calcular el área de las secciones de cada cuerpo obtenido. A continuación se les pide calcular el altura de los cuerpos geométricos construidos. Una condición que pedida es que los cuerpos construidos tengan igual altura ya que las actividades estan diseñadas con secciones de área iguales. Luego así pueden calcular el volumen de los cuerpos y comparar sus volúmenes.

Los estudiantes deben utilizar en forma intuitiva el principio de cavalieri “ *Si dos cuerpos tienen igual altura las áreas de las secciones producidas por planos paralelos a la base son iguales, entonces los cuerpos tienen el mismo volumen*”

Para la experimentación se considera un primer año medio. Esta situación didáctica se realizó en Noviembre del 2016 en la ciudad de Temuco, en el Liceo Pablo Neruda según planificación curricular del establecimiento.

	<p>Manipulación Cuerpos geométricos, Cálculo de áreas seccionadas, búsqueda de altura de los cuerpos. <b>Situación Acción</b></p>		<p>Comprobación de alturas y áreas seccionadas  <b>Situación Acción</b></p>
	<p>Formulan la estrategia para el cálculo del volumen de los cuerpos representando por escrito</p>		<p>Estudiantes preparan el trabajo que presentarán ante las demás parejas y el profesor</p>

	<p style="text-align: center;">sus argumentos</p> <p style="text-align: center;"><b>Situación Formulación</b></p>		<b>Situación Validación</b>
--	---	--	---------------------------------

**Fase 4 Análisis a posteriori y conclusiones:**

- Reconocieron los cuerpos seccionados a viva voz.
- Identificaron los elementos que componen los cuerpos entregados.
- No recordaban el concepto de área.
- Tampoco recordaban como Calcular las áreas de las secciones de los cuerpos rebanados.
- No recordaban ni tampoco sabían cómo explicar el concepto de Volumen.
- Indicaron los elementos necesarios para calcular área y volumen.
- Invirtieron mucho tiempo en calcular las áreas y luego saber que estos servirían para el cálculo de Volumen.

***Conclusiones***

La planificación curricular original del Liceo Pablo Neruda para el contenido de Volumen de cuerpos geométricos, sólo era una clase. Las cuáles serían enseñadas de una manera

tradicional, en forma expositiva, siguiendo el texto guía, centrado en el cálculo de volumen. En cambio con las situaciones didácticas diseñadas y experimentadas estas logran que los estudiantes se acerquen a la construcción del concepto de volumen.

Sin embargo los estudiantes mostraron dificultad en la realización de las situaciones didácticas, evidencian una falta de reflexión en el trabajo realizado, están acostumbrados a realizar tareas en forma mecánica, sin reflexión, sólo utilizando fórmulas para realizar lo pedido.

Las producciones realizadas por los estudiantes evidencian poco manejo de conceptos básicos en la geometría, necesarios para su formación escolar o la rendición de pruebas estandarizadas como SIMCE y PSU .

Esta actividad de enseñanza ayudará a buscar estrategias en resolución de distintos problemas de mayor dificultad y abstracción, lo que permitirá asociar estos cálculos con situaciones de la vida real.

Se deben mejorar algunas actividades de las situaciones didácticas con el fin de que los estudiantes puedan construir el concepto de volumen, cálculo del volumen como también el concepto de área y el cálculo de las áreas seccionadas.

## **Referencias**

- Amore, D. (1999). Problemas rutinarios y situaciones insolitas. *Números* , 21 - 31.
- Artigue M. (1995). La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. Grupo Editorial Iberoamérica: México, 97-140.
- Bressan, A., Bogisic, B. y Crego, K. (2000). Razones para enseñar Geometría en la Educación Básica. Mirar, construir, decir y pensar.... México D.F.: Ediciones Novedades Educativas.
- Brousseau, G. (2007). Iniciación al estudio de teoría de las situaciones didácticas. Buenos Aires: Libros del Zorzal.

Catrillón, J . (2014). Diseño de una unidad didáctica para enseñanza del concepto del volumen. Medellín.

Etchegaray, S. (2014). Diferentes significados, funcionamientos y relaciones del “volumen” como objeto a enseñar. *Repem* .

Chamorro, M. C. (1997). Estudio de las situaciones de enseñanza de la medida en la escuela elemental. Tesis de doctorado no publicada. UNED, Madrid, España.

Gamboa, R. y Ballesteros, E. (2009). Algunas reflexiones sobre la Didáctica de la Geometría. Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática. 4(5), 113- 136.

Godino, Batanero y Roa (2002). Obstáculos de aprendizaje en el concepto de volumen. Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática.