

UN ESTUDIO SOBRE LA ILUSIÓN DE LA LINEALIDAD EN ESTUDIANTES DE BACHILLERATO

Roberto Sánchez Sánchez – José Antonio Juárez López – Lidia Aurora Hernández Rebollar
rtgr1904@gmail.com – jajul@fcfm.buap.mx – lhernan@fcfm.buap.mx
Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, México

Núcleo temático: I Enseñanza y aprendizaje de la matemática en las diferentes modalidades y niveles educativos.

Modalidad: CB

Nivel educativo: Bachillerato

Palabras clave: Ilusión de la linealidad, bachillerato, resolución de problemas, diagnóstico.

Resumen

El presente avance de investigación muestra una visión general de las tendencias de los alumnos de bachillerato al resolver problemas de tipo constante, área, volumen y con falta de autenticidad donde se hace presente la ilusión de la linealidad.

Uno de los ejemplos más comunes de un comportamiento corrompido en la resolución de problemas matemáticos es la fuerte tendencia de los alumnos a aplicar métodos proporcionales a los problemas de valor faltante, incluso en problemas en los que es cuestionable o claramente inadecuado (De Bock, Van Dooren, Janssens & Verschaffel, 2007). Se aplicó un instrumento con el cual se pudo observar que la mayoría de los alumnos son “atrapados” por la ilusión de la linealidad pues tienden a generalizar en problemas de área y volumen debido a que suponen que si en determinada figura su arista crece k -veces entonces su área o volumen también crece k -veces.

Otros resultados que se encontraron fueron que los alumnos ignoran consideraciones realistas o no toman en cuenta algunos aspectos esenciales de la situación del problema en la vida real. Bastantes alumnos realizaron representaciones externas, sin embargo fueron de poca ayuda para la interpretación y resolución correcta de los problemas.

Introducción

Las reformas y programas de estudio de varios países tienen como uno de los principales objetivos de la educación matemática propiciar la capacidad de desarrollar y utilizar modelos para dar sentido a las diversas situaciones que rodean la vida diaria y de los sistemas complejos derivados de nuestra sociedad moderna (Blum, 2002; Consejo Nacional de profesores de Matemáticas [NCTM], 1989, 2000, citado en Van Dooren, De Bock, Hessels, Janssens & Verschaffel, 2005, 58).

En la educación matemática contemporánea, la linealidad (o proporcionalidad) recibe mucha atención debido a que las relaciones lineales son el modelo apropiado para acercarse a diversos problemas prácticos (situaciones de la vida diaria) y teóricos, en las matemáticas y la ciencia (De Bock et al., 2007). La linealidad es uno de los conceptos clave en la matemática escolar debido a que aparece en diferentes formas: la “regla de tres” en educación primaria, modelos lineales en secundaria, aproximaciones de cálculo y probabilidad en bachillerato, y abstracciones de un espacio vectorial en la universidad (De Bock, Van Dooren, Janssens & Verschaffel, 2002).

Varias investigaciones realizadas por De Bock et al., (2007) han demostrado que los estudiantes tienen una tendencia a utilizar métodos lineales o proporcionales para resolver problemas aritméticos para los que no son apropiados dichos métodos.

Antecedentes

La “ilusión de la linealidad”

Freudenthal (1983, p. 267, citado en Van Dooren et al., 2005, 59) advirtió que:

“La linealidad es una propiedad tan sugestiva de las relaciones que uno se rinde fácilmente a la seducción para hacer frente a cada relación numérica como si fuese lineal.”

A partir del contexto de esta cita, Freudenthal utilizó el término lineal como sinónimo de proporcional, en referencia a las relaciones representadas gráficamente por una línea recta a través del origen (Van Dooren, De Bock, Hessels, Janssens & Verschaffel, 2004, citado en Van Dooren et al., 2005, 59).

El uso de la linealidad en situaciones no lineales (a veces referido como la “ilusión de la linealidad o proporcionalidad”, la “trampa de la linealidad”, el “obstáculo lineal”, etc.) es un error “clásico”, posiblemente uno de los más antiguos de la literatura del pensamiento matemático (De Bock et al., 2002).

La ilusión de la linealidad en problemas de área y volumen

Existe investigación que informa que el razonamiento lineal incorrecto ocurre con frecuencia en problemas sobre relaciones entre los ángulos y lados de figuras geométricas (Rouche, 1992, citado en De Bock, et al., 2007, p. 17).

Los estándares del Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas [NCTM] (1989, p. 114-115, citado en Van Dooren et al., 2005, 59) sugieren que:

“La mayoría de los estudiantes en los últimos grados de primaria y alumnos de secundaria creen que si los lados de una figura se duplican para producir una similar, el área o el volumen también se duplicará.”

En general, existe una tendencia casi irresistible en los estudiantes de diferentes niveles educativos por creer que si una figura se agranda k – veces, el área o volumen es ampliada k – veces también (De Bock et al., 2002).

El refuerzo de la linealidad en numerosas situaciones de la matemática escolar, junto con su sencillez intrínseca, puede dar lugar a una tendencia en los estudiantes e incluso en adultos para aplicar el modelo lineal “en todas partes” (De Bock et al., 2002).

La ilusión de la linealidad en problemas constantes y con falta de autenticidad

Además de los problemas de área y volumen, Van Dooren et al., (2005) realizaron una investigación sobre el uso excesivo de la linealidad, los estudiantes se enfrentaron al problema siguiente: *“Mamá puso 3 toallas en el tendedero. Después de 12 horas estaban secas. La abuela puso 6 toallas en el tendedero. ¿Cuánto tiempo les toma secarse?”* (Respuesta correcta: 12 horas, respuesta proporcional: 24 horas). Uno esperaría que el problema con un modelo “constante” (como el problema del “tendedero”) sería un problema que los estudiantes podrían solucionar fácilmente en la prueba (debido a que no había necesidad de cálculos), pero tuvo la más alta tasa de errores proporcionales (hasta un 80% en quinto grado).

La actividad de resolución de problemas admite problemas “reales” aceptables (o buenos) que los alumnos puedan encontrar fuera de sus clases de matemáticas (Van Dooren et al., 2005), sin embargo, varias investigaciones (Reusser y Stebler, 1997; Verschaffel, De Corte, y Lasure, 1994 citado en Van Dooren et al., 2005, 58) han demostrado que los estudiantes comienzan a resolver problemas con poca o ninguna relación con el mundo real.

Verschaffel, De Corte, y Lasure (1994, p. 276, citado en Van Dooren et al., 2009, 187) encontraron que para el problema: “el mejor tiempo de John para correr 100 metros es de 17 segundos. ¿Cuánto tiempo le llevará correr 1 kilómetro?” Más del 90% de los estudiantes de

entre 10 y 12 años de edad, respondió “170 segundos”. Casi todos los estudiantes jugaron el “juego de los problemas de aplicación de la escuela”, es decir, la situación del mundo real que evoca el problema permite una respuesta única y precisa, por lo cual los alumnos tienen que buscar la operación matemática (suma, resta, multiplicación, división o combinación de estas operaciones) en el planteamiento del problema para resolverlo en vez de concebir y abordar estos problemas como legítimos en matemática realista (Nesher, 1996; Reusser y Stebler, 1997; Wyndhamn & Säljö, 1997, citado en Van Dooren et al., 2009, 188).

De Bock et al., (2007) sugieren que los estudiantes a los que se les aplicaron los problemas demostraron una visión simplista en la resolución de problemas, debido a que todos los problemas no pueden ser resueltos mediante el uso de cálculos matemáticos simples con los números que se proporcionan en el problema, y que las consideraciones basadas en el conocimiento y en el contexto del mundo real no participan en el proceso de solución.

Esquemas en la resolución de problemas

Existen diversas investigaciones teóricas y empíricas sobre cómo y por qué los dibujos y diagramas son una herramienta útil que puede mejorar la capacidad de las personas para representar y resolver problemas matemáticos (Aprea y Ebner, 1999; De Corte et al., 1996; Larkin y Simon, 1987; Pólya, 1945; Reed, 1999; Schoenfeld, 1992; Vlahovic-Stetic, 1999, citado en Bock et al., 2007, 56).

En los problemas no proporcionales, esta actividad representacional debería ayudar a los estudiantes para detectar la inadecuación de un razonamiento lineal, y para determinar la naturaleza de la relación no lineal que conecta los elementos conocidos y desconocidos en esta representación del problema (De Bock et al., 2007).

Sin embargo, realizar un dibujo o diagrama no garantiza que se va a encontrar la solución de un problema dado (De Bock, et al., 2007). Cuando los estudiantes no tienen éxito al realizar un esquema “correcto”, podría ser más eficaz y de gran ayuda presentar un diagrama “correcto” ya realizado.

Método

La investigación se realizó en México con 75 alumnos de cuarto semestre (con edades entre 15 y 17 años) de bachillerato. Se aplicó un cuestionario que debía ser resuelto con lápiz y

papel. Éste instrumento consistió en problemas no lineales de tipo: constante, área, volumen y falta de autenticidad. Posteriormente se analizaron los instrumentos para observar las tendencias de los alumnos al resolver problemas y finalmente se analizaron las representaciones externas en donde se hace presente la ilusión de la linealidad.

Resultados

Los problemas que se propusieron en el instrumento son los que utilizaron Van Dooren et al., (2005) y De Bock et al., (2007) (algunos mencionados anteriormente), se realizaron algunas modificaciones superficiales y otros más fueron propuestos por los autores de la presente investigación. A continuación se presentan el tipo de problema, el problema propuesto en el instrumento y parte de los resultados obtenidos de analizarlo.

Problemas de área

“Luis es un pintor publicitario. En los últimos días, tuvo que pintar las decoraciones de varias ventanas de una tienda. Ayer hizo un dibujo de 56 cm de altura de Bart Simpson en la puerta de una tienda de regalos. Necesitó 6 ml de pintura. Ahora se le pide hacer una versión ampliada del mismo dibujo en una ventana de una tienda de videojuegos. Esta copia debe ser de 168 cm de alto. ¿Qué cantidad de pintura necesitará aproximadamente Luis para hacerlo?” 66 alumnos fueron “atrapados” en la ilusión de la linealidad pues respondieron que necesitaban 18 mililitros de pintura para el Bart Simpson de 168 centímetros; de los 66 alumnos que aplicaron el modelo lineal, 61 aplicaron el modelo lineal de forma correcta y 5 alumnos tuvieron algún error (aritmético) al aplicar dicho modelo. Un estudiante presentó cierto razonamiento no lineal aunque de forma inadecuada debido a que toma ciertas consideraciones realistas, sin embargo, su respuesta no fue correcta pues dijo que *“se necesitan 20 ml de pintura porque se necesita más pintura para ciertos detalles”*. 5 estudiantes realizaron procedimientos alternativos para resolver el problema pues realizaron múltiples operaciones para obtener una solución numérica del problema, 1 estudiante otorgó una respuesta al problema pero el procedimiento utilizado resultó ser confuso y el resto de estudiantes (2) simplemente no respondieron.

“Un agricultor se tarda 8 horas en arar un terreno cuadrado de 100 m de lado. ¿Cuánto tardará en arar un terreno de la misma forma pero con el triple de longitud?” 62 alumnos utilizaron el modelo lineal pues respondieron que se necesitan 24 horas para arar el terreno

más grande, 2 de los estudiantes presentaron dificultades al realizar las operaciones aritméticas al resolver el problema. Un estudiante logró resolver adecuadamente el problema (72 horas). Del resto de estudiantes, 2 solo realizaron operaciones aritméticas con los datos proporcionados, 8 estudiantes resolvieron el problema aunque el procedimiento utilizado fue confuso y 2 estudiantes no respondieron.

Problema de volumen

“En su caja de juguetes, María tiene dados en varios tamaños. El más pequeño mide 10 mm de lado y tiene un peso de 800 mg. ¿Cuál sería el peso de un dado más grande cuyo lado mide 30 mm?” 69 alumnos utilizaron el modelo lineal pues respondieron que el cubo más grande pesa 2400 miligramos, de los cuales 6 presentaron dificultades al aplicar el modelo lineal. 1 estudiante logró resolver adecuadamente el problema (21600 mg). 1 estudiante solo realizó operaciones aritméticas con los datos proporcionados, 3 estudiantes realizaron un procedimiento confuso para resolver el problema y 1 estudiante no respondió.

Problemas con falta de autenticidad

“El mejor tiempo de Alicia para correr 100 metros es de 16 segundos. ¿Cuánto tiempo le llevará correr 1000 metros?” 69 estudiantes aplicaron el modelo lineal, es decir, obtuvieron como resultado 160 segundos para recorrer los 1000 metros, 9 de ellos presentaron dificultades al realizar los cálculos correspondientes. Un estudiante no aplicó el modelo lineal aunque no lo hizo del todo adecuado pues el creyó que para recorrer los 1000 metros tardaría menos de 160 segundos, lo cual indica que no está tomando ciertas consideraciones como el factor cansancio. 2 estudiantes realizaron operaciones aritméticas con los datos presentados en el problema, 1 estudiante resolvió el problema aunque su procedimiento resultó confuso y 2 estudiantes no respondieron.

“Los mexicanos miden a los 10 años aproximadamente 1.30 m. ¿Cuánto medirán a los 30 años?” se obtuvo lo siguiente: 39 estudiantes aplicaron el modelo lineal, es decir, obtuvieron como resultado 3.90 metros, de ellos, 1 estudiante presentó dificultades al realizar las operaciones aritméticas. 22 estudiantes se dieron cuenta que la respuesta (3.90 metros) no era adecuada, de los cuales, 11 estudiantes dieron argumentos como: *“no es posible, pues los mexicanos no alcanzan dicha altura”* y otros 11 estudiantes solo tomaron en cuenta los centímetros del dato 1.30 metros, es decir, 0.30 metros y posteriormente lo triplicaron para

obtener como resultado 1.90 metros. 7 estudiantes presentaron un procedimiento confuso o solo dieron la respuesta sin saber el procedimiento utilizado y otros 7 estudiantes no dieron respuesta al problema

Problemas constantes

“Si 500 ml de agua se encuentran a 20° C en el ambiente. ¿Qué temperatura tendrán 1000 ml de agua?”. 61 estudiantes utilizaron el modelo lineal por lo cual su respuesta fue “40° C”, pero 2 de ellos tuvieron algún error al realizar los cálculos pertinentes. 3 estudiantes utilizaron proporcionalidad inversa por lo cual su respuesta fue “10° C”, es decir, a más cantidad de agua la temperatura es más baja. 1 estudiante no tomó en cuenta las cantidades del problema pues en lugar de 500 ml y 1000 ml, tomó como datos 50 ml y 100 ml respectivamente, resolvió correctamente el problema al decir que la temperatura no cambiaba debido a que las cantidades de agua eran muy pequeñas pero, si hubiera tomado las cantidades correctas ¿su respuesta sería la misma?. 7 estudiantes no “cayeron” en la ilusión de la linealidad y dijeron que la temperatura era invariante, es decir, la temperatura es la misma (“20° C”). Del resto, 1 estudiante no realizó el problema y otros 2 estudiantes realizaron un procedimiento confuso.

“Mamá puso 3 toallas en el tendedero. Después de 12 horas estaban secas. La abuela puso 6 toallas en el tendedero. ¿Cuánto tiempo les toma secarse?” 50 estudiantes aplicaron el modelo lineal, por lo cual obtuvieron como resultado “24 horas”. 1 estudiante respondió 6 horas, es decir, el creyó que a mayor cantidad de toallas el tiempo necesario de secado es menor (proporcionalidad inversa). 20 estudiantes utilizaron su experiencia y/o conocimiento del mundo y se dieron cuenta que la solución a este problema era “12 horas”. 1 estudiante solo realizó operaciones aritméticas con los datos proporcionados en el problema, 2 estudiantes realizaron un procedimiento confuso para resolverlo y 1 estudiante no respondió.

Cabe señalar que muchos alumnos realizaron representaciones externas como operaciones, diagramas, tablas o incluso gráficas como se muestra en la siguiente Figura. Los ejemplos que se muestran fueron realizados por diversos estudiantes para resolver el problema de área del “Bart Simpson” ampliado.

Operaciones (Suma)	Tabla	Gráfica	Recta	Diagrama								
$56 + 56 + 56 = 168 \text{ cm}$ $\downarrow \downarrow \downarrow$ $6 \text{ m} / 6 \text{ m} / 6 \text{ m} / = 18 \text{ m} /$	<table border="1"> <tr> <td>m</td> <td>cm</td> </tr> <tr> <td>6</td> <td>56</td> </tr> <tr> <td>12</td> <td>112</td> </tr> <tr> <td>18</td> <td>168</td> </tr> </table>	m	cm	6	56	12	112	18	168			
m	cm											
6	56											
12	112											
18	168											

Figura 1. Ejemplos de representaciones externas utilizadas por los alumnos.

Las representaciones externas realizadas por los estudiantes no fueron de suficiente ayuda para la resolución correcta de los problemas pues en la gran mayoría de los casos los estudiantes “cayeron” en la ilusión de la linealidad a pesar de dichas representaciones.

Reflexiones o conclusiones

Los alumnos de bachillerato deberían ser más analíticos debido al nivel académico en el que se encuentran y deberían de ser capaces de utilizar sus conocimientos del mundo para resolver los problemas, sin embargo, pareciera que no los toman en cuenta y solo pretenden dar una solución numérica. Lo anterior conlleva a que más de la mitad de los alumnos aplicara el modelo lineal o proporcional para resolver los diferentes problemas cuando en realidad no debieron de haber realizado dichos cálculos. En general, se observó que los estudiantes utilizan con mayor frecuencia el modelo lineal para resolver problemas de área y volumen (aunque en un problema con falta de autenticidad hubo una gran mayoría que utilizó este modelo), los estudiantes en este tipo de problemas tienden a creer que si la medida de la arista de una figura crece *k-veces*, entonces el área o volumen también crece *k-veces*. Aunque los estudiantes utilizan con menor frecuencia el modelo lineal para resolver problemas constantes o con falta de autenticidad, más de la mitad los estudiantes aplicaron el modelo lineal y tienden a no utilizar o suspender sus conocimientos del mundo para dar paso a la resolución numérica para este tipo de problemas, incluso, en algunos casos es cuestionable o inadecuada dicha resolución.

En México desde primaria hasta altos niveles educativos se abordan infinidad de problemas que pueden ser resueltos con “la regla de tres” (en la cual se dan tres datos, dos de ellos

pertenecen a una relación y el tercer dato pertenece a otra relación, el cuarto dato tiene que ser encontrado) y se le da poca importancia a problemas donde no es conveniente aplicar el modelo lineal. Con base en lo anterior, es necesario verificar la aplicabilidad del modelo lineal en determinadas situaciones, pues como se observó en la presente investigación, no es adecuado utilizar dicho modelo en todas las situaciones en las que pareciera que es correcto utilizarlo.

Referencias

- De Bock, D., Van Dooren, W., Janssens, D. & Verschaffel, L. (2002). Improper Use of Linear Reasoning: An In-Depth Study of the Nature and the Irresistibility of Secondary School Students' Errors. *Educational Studies in Mathematics*, 50(3), 311-334.
- De Bock, D., Van Dooren, W., Janssens, D. & Verschaffel, L. (2007). *The illusion of linearity: From analysis to improvement*. New York: Springer.
- Van Dooren, W., De Bock, D., Evers, M. & Verschaffel, L. (2009). Students' Overuse of Proportionality on Missing-Value Problems: How Numbers May Change Solutions. *Journal for Research in Mathematics Education*, 40(2), 187-211.
- Van Dooren, W., De Bock, D., Hessels, A., Janssens, D. & Verschaffel, L. (2005). Not Everything Is Proportional: Effects of Age and Problem Type on Propensities for Overgeneralization. *Cognition and Instruction*, 23(1), 57-86.