

FIGURAS DE ANÁLISIS: SU USO EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN ESCENARIOS ESCOLARES Y NO ESCOLARES

Mónica Lorena Micelli; Cecilia Rita Crespo Crespo
Instituto Superior del Profesorado “Dr. Joaquín V. González”. Buenos Aires
monikmathis@gmail.com - crcresco@gmail.com

Resumen

El presente trabajo forma parte de una investigación realizada en la línea de la construcción social del conocimiento desde un enfoque socioepistemológico, centrada en el uso de la figura de análisis en la resolución de problemas. La elaboración de dichas figuras es recomendada en varios modelos que describen el proceso heurístico. El mismo Descartes sugería realizar figuras simples para resolver un problema. A partir de estos conceptos se analizarán varios casos tomados de escenarios académicos pertenecientes no sólo a la geometría. Por otro lado, también se presentarán otros casos pertenecientes a escenarios no escolares relacionados con diferentes oficios.

Palabras clave: figuras de análisis, resolución de problemas, visualización.

1. Introducción

El trabajo que aquí se presenta es una parte de una investigación llevada a cabo para obtener el grado de Maestría en Ciencias, cuya tesis se tituló: “Las figuras de análisis en geometría. Su utilización en el aula de matemática” (Micelli, 2010). Dicha investigación partió de observar dificultades en la utilización de las figuras de análisis en la clase de matemática, más precisamente en la materia geometría en el profesorado de Matemática. Durante la práctica docente en el nivel superior, pudo observarse que los estudiantes no representaban correctamente los datos dados en los enunciados o tomaban figuras que constituían casos particulares, obviando situaciones generales llegando, así, a conclusiones erróneas o incompletas.

La investigación se enmarcó dentro de los lineamientos de la construcción social del conocimiento matemático. La elección de esta línea de investigación se debe a que en ella se considera a la matemática no sólo como un saber sino que se la ubica en un escenario donde se juegan variables sociales, además de las variables didácticas, cognitivas y epistemológicas. Por lo tanto, el marco teórico desde el cual se llevó a cabo la investigación es la socioepistemología. Castañeda establece que “la construcción de la matemática responde a ciertos intereses o preocupaciones, ya sea eruditos o socioculturales, pero que se crea con el propósito expreso de ser enseñable, al grado de que no tendría sentido un conocimiento de tal naturaleza”, a lo cual añade, con respecto al saber destinado a ser enseñado, el sufre un proceso que se resume en “un conjunto de transformaciones adaptativas” (2002, p.32).

En esta comunicación se abordará uno de los aspectos desarrollados en la investigación mencionada, haciendo solo foco en el proceso de visualización en el cual las figuras de análisis juegan un papel importante para luego analizar la resolución de problemas tanto en escenarios escolares como no escolares.

Pero ¿a qué nos referimos cuando se habla de las figuras de análisis? Para dar respuesta a este interrogante se partió de considerar a las figuras de análisis como “aquellos dibujos que pueden ser realizados a mano alzada o con el uso de regla pero sin respetar la medida o estar elaborada según una determinada escala numérica”. Ampliando esta

idea puede decirse que son “figuras o bosquejos que no poseen rigurosidad geométrica, en donde se vuelca la información dada como primer paso ya sea para resolver un problema geométrico, una demostración o realizar una construcción geométrica” (Micelli, 2010, p. 11). También conocidas como diagramas, croquis o esquemas.

Poincaré afirmaba que “(...) la géométrie est l’art de bien raisonner sur des figures mal faites” (Poincaré 1913, p.27), cuya traducción es “la geometría es el arte de razonar bien sobre figuras mal hechas”. Pero la pregunta que surge es ¿por qué estas palabras proveniente de un gran matemático? Puede encontrarse una respuesta en las explicaciones dadas por Santaló “Los griegos (...) dibujaban las figuras en la arena, que tenía la ventaja de poder borrar, pero faltaba precisión” (citado en Galina, 2008, p.15). Pero actualmente, aún de esas figuras mal hechas realizadas sobre un papel a modo de bosquejos de ideas internas surgen conclusiones correctas, razón por la cual la investigación se centró en estas figuras de análisis tratando de llegar a una respuesta para las preguntas que surgieron: ¿cómo se logra encontrar dicho éxito en su uso? ¿Cómo poderlo transmitir a nuestros alumnos de forma tal que sea una verdadera herramienta que favorezca el razonamiento y un obstáculo que los conduzca a errores?

Los objetivos que se plantearon fueron: comprender la naturaleza de las figuras de análisis, el origen de su utilización al momento de resolver un problema matemático, más precisamente en aquellos enunciados relacionados con geometría; detectar, por lo tanto, cómo son utilizadas, dichas figuras, en el discurso matemático escolar y cuáles son los factores que inciden o conducen a confusiones en la lectura o interpretación de las mismas figuras para convertirse en una herramienta útil y eficaz.

Retomando la idea de que las figuras de análisis son una herramienta sobre la cual se trabaja para hacer visible la organización de datos, la comparación de los mismos y la reflexión sobre ellos. Tomando las palabras de Alsina, “en nuestros días la imagen ha adquirido en todos los niveles comunicativos una importancia capital, sustituyendo en muchos casos a mensajes de otro tipo. (...) El dibujo tiene en Geometría doble interés: como lenguaje para meditar, ejemplificar o representar conceptos y propiedades, y como finalidad de representación fiel y rigurosa” (citado en Ferragina, Fisichella y Rey, 1999, p.32).

No se debe perder de vista que los objetos con los cuales se trabaja en matemática son entes abstractos aunque existen varios registros para representarlos o abordarlos, tales como: registros algebraicos, numéricos, analíticos y visuales. Bajo esta visión, las figuras de análisis son parte de este registro visual. Chevallard (1998) hace mención de dos tipos de nociones, por un lado las nociones propias de la matemática las cuales son construidas, mientras que por otro lado hace referencia a las nociones paramatemáticas. Estas nociones, en particular hacen referencia a “nociones-herramientas” y dentro de esta categoría es donde se debe ubicar a las figuras de análisis ya que no son un conocimiento matemático que se encuentra explícito en el currículum de matemática pero que están presente en el discurso matemático escolar tanto en el quehacer del docente, en su práctica o también, como se ha dejado registro en la investigación, se encuentran presenten en los libros de textos escolares.

2. Proceso de visualización y figuras de análisis

Se parte de entender al proceso de visualización como “el acto por el cual un individuo establece una fuerte conexión entre una construcción interna y algo cuyo acceso es adquirido a través de los sentidos” (Zazkis, en Torregrosa y Quesada, 2007, p.278). Relacionado con las figuras existen variados y múltiples estudios realizados sobre las

imágenes tanto mentales como físicas o pictóricas. Estos trabajos aunque hacen referencia a las imágenes en general son de gran importancia pues permiten hacer un acercamiento a las figuras de análisis. Estas figuras cumplen un rol importante en el proceso de visualización pues permiten representar en el papel las imágenes mentales que el sujeto se construye al leer los datos del problema y sobre las cuales se van pensando ideas hasta arribar a la solución buscada.

Al referirse a las figuras geométricas se debe diferenciar entre los dibujos que son “modelos materializando las entidades mentales con las que el matemático trata” (Fischbein, 1993, p.2) y las propias figuras geométricas que “no es un mero concepto. Es una imagen, una imagen visual”. Esta imagen se debe a la existencia de la propiedad de poderlas pensar y representar mentalmente sin necesidad de un papel que este de por medio, propiedad que no poseen todos los conceptos o ideas generales no sensoriales. Lo importante es que las figuras de análisis son dibujos en donde el individuo que las realiza trata de volcar todo al papel, es decir, todos aquellos datos que se encuentran en su imagen mental creada al leer el problema. Por lo tanto, las figuras de análisis no son una representación del concepto sino que son un dibujo que da idea de la construcción de la imagen mental necesaria para asociar los datos ya sea tanto de un ejercicio, una demostración geométrica o una construcción geométrica, es entonces la representación de una imagen mental.

Las figuras de análisis, en este trabajo, fueron consideradas como un dibujo a mano alzada, por eso es importante la distinción realizada por Fischbein quien establece que “una figura geométrica es una imagen mental, las propiedades de ella son controladas completamente por una definición; un dibujo no es la figura geométrica en sí, sino una personificación material gráfica o concreta de él (...)” (1993, p.8). En estas líneas se puede notar una marcada diferencia entre lo que es una “imagen conceptual” y un dibujo. Similar distinción hacen Torregrosa y Quesada (2007) aunque los términos que ellos utilizan son diferentes, el vocablo “figura” es entendido como “imagen mental”, mientras que el objeto físico es el “dibujo”.

La diferencia entre dibujos y las figuras geométricas, también, es abordada por Rodríguez al trabajar el aprendizaje de la demostración en geometría en la educación secundaria y se refiere a ellos con las siguientes palabras “el alumno pasa así del ‘universo de los dibujos’ al ‘universo de las figuras’”. Este pasaje requiere una serie de rupturas en donde el alumno deberá aprender que no todo lo que se ve es verdadero y que una figura es una representación de los objetos geométricos ‘perfectos’ o ‘ideales’” (2005, p.1).

3. Resolución de problemas

Las figuras de análisis como se ha dicho son herramientas que se utilizan al momento de resolver un problema, por lo tanto se ha realizado una revisión sobre distintos modelos que describen el procedimiento heurístico. Procedimiento que puede resumirse como las acciones o modos de actuar de quien se enfrenta a un problema pero estos caminos no garantizan llegar a la solución correcta. Quien se interesó por este procedimiento heurístico fue el matemático e investigador Polya cuya obra influyó, en gran medida, en los trabajos que centraron su estudio en dicho proceso. Esto se debió a que Polya no sólo daría importancia a la necesidad de enseñar los conocimientos matemáticos sino también a la forma de “hacer matemática” (Valverde, 2003, p.15). El método presentado por Polya consiste de cuatro fases (este procedimiento puede ser puesto en acción para problemas no sólo de matemática o escolares, sino también ante cualquier tipo de

problemas). A cada una de estas fases le asigna una serie de preguntas que sirven de guía para quien quiere resolver un problema. Estas fases son: comprensión del problema, concepción de un plan, ejecución del plan y la última fase, visión retrospectiva. Nos centraremos especialmente en la segunda fase donde se integran tanto los conocimientos que pondrá en juego el sujeto quien se enfrenta al problema, así como también su creatividad. Las preguntas que presenta Polya, en esta fase, están dirigidas a llevar el problema a regiones ya conocidas, entre las preguntas que interesan se encuentra: “He aquí un problema relacionado con el suyo, y que se ha resuelto ya. (...) ¿Podría utilizarlo introduciendo algún elemento auxiliar?” (Nieto, 2004, p.9). Puede conjeturarse que uno de estos “elementos auxiliares” es incluir en la resolución del problema a las figuras de análisis. Otros autores, como Tarifa y González (2000), incluyen las “figuras de análisis” en la primera fase donde se analizan los datos y las incógnitas presentes en el enunciado, en este caso, estas figuras de análisis serían parte de la decodificación y codificación del propio enunciado.

Se han descrito a continuación otros modelos como el de Schoenfeld, el de Wheatley o el modelo de Kantowski. En todos ellos se describen en forma variada las distintas fases o etapas del proceso heurístico pero aún usando términos diferentes, todos ellos coinciden en hacer mención, en alguna de estas fases, a la realización de un dibujo en el cual volcar los datos y las incógnitas dadas en el enunciado, razón por la cual se consideró importante para destacar dándole pertinencia al uso de las figuras de análisis. Pero otro hallazgo importante referido al uso de las figuras en la resolución de problemas, se encuentra en el tratado “Regulae ad Directionem ingenii” (“Reglas para la Dirección de la mente”, publicado en 1701, en “Obras Póstumas”) en donde Descartes (1596–1650) estableció las pautas de su método para la resolución de problemas. En este tratado se hace referencia a un total de veintiuna reglas donde el autor explica los pasos rigurosos a seguir para resolver un problema. Entre ellas existen algunas reglas que hacen referencia a las figuras, entendiendo por figura “el límite del objeto extenso”, como lo define Descartes, durante la explicación de la regla XII (1983, p.207).

Más precisamente, las reglas que pueden relacionarse con las figuras de análisis son: “REGLA XIV: La misma regla debe aplicarse a la extensión real de los cuerpos y propuesta por entero a la imaginación con ayuda de figuras puras y desnudas³⁶: de esta manera, en efecto, será comprendida con mucho mayor distinción o claridad por el entendimiento” (Descartes, 1983, p.229).

Aunque en ella, no se da el término preciso de “figuras de análisis” se puede conjeturar que estas figuras simples tienen la misma finalidad, ya que en la regla XII también definió, el matemático, que ha de llamar “cosas simples” a aquellas que son puramente intelectuales haciendo alusión a la idea de un término o las puramente materiales en las cuales incluye a las figuras, la extensión, entre otros (Descartes, 1983). Por lo tanto, estas “figuras simples” deben de ser lo más claras posibles para poder a partir de ellas hallar la solución al problema por ello es que las asociamos a nuestro tema de estudio, “las figuras de análisis”.

“REGLA XV: Es también útil el trazar de ordinario estas figuras y presentarlas a los sentidos externos, a fin de que sea más fácil por este medio mantener atento nuestro pensamiento” (Descartes, 1983, p.245).

En la representación de las figuras simples, Descartes pone énfasis en la visualización de los datos que intervienen para poder resolver el problema, dándole un papel importante para lograr llegar a una correcta solución, pues como explica en la regla anterior, que es por medio a dichas figuras que uno puede formarse una idea.

“REGLA XVI: Las cosas, empero, que no requieren una atención actual o inmediata de la inteligencia, aún cuando sean necesarias para la conclusión, vale más designarlas por las notaciones más breves que por medio de figuras enteras: de esta manera la memoria no podrá equivocarse y no obstante, durante este tiempo, el pensamiento no se distraerá en el intento de retenerlas, mientras se aplica a otras deducciones” (Descartes, 1983, p.247).

Así también señala la forma de indicar la frecuencia o las relaciones que se presentan, con el fin no sólo de economizar palabras sino también de presentar a la vista toda la información útil con una lectura sencilla o simple. Una aclaración importante es que, para Descartes lo visual era lo relacionado con el uso de la visión, lo que entraba por los ojos únicamente, mientras que lo intelectual, era lo relacionado con la razón.

4. Estudio de casos en escenarios académicos

A continuación se presentarán algunos de los casos estudiados en la investigación. En principio se exponen dos ejemplos donde un alumno de nivel medio emplea las figuras de análisis para resolver ejercicios del orden aritméticos. Lo cual nos lleva a plantear que las figuras de análisis no se encuentran únicamente ligadas a problemas de carácter geométrico como puede pensarse en un primer momento.

Caso 1: Augusto, emperador romano, nació en el año 63 a.C. y murió en el 14 d.C. ¿Cuántos años vivió?

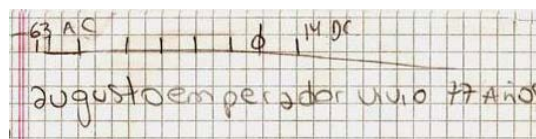


Figura 1: Figura de análisis de ejercicio 2

Caso 2: Una bomba extraen el petróleo de un pozo a 975 m de profundidad y lo eleva a un depósito situado a 28 m de altura. ¿Qué cantidad de metros recorre el petróleo?

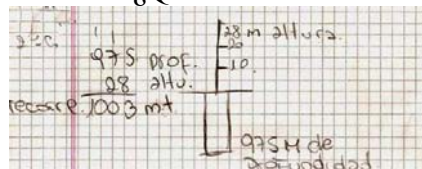


Figura 2: Figura de análisis de ejercicio 2

En el primer ejercicio, la gráfica que realiza el alumno para hallar la edad de Augusto se podría asociar con una recta numérica, no se puede afirmar fehacientemente que se trate de una recta numérica pues no mantiene una escala para los años registrados, por lo tanto sólo es una representación esquemática que le permitió dar un orden a los datos dados y relacionarlos con los números enteros para poder resolver exitosamente el problema. En cambio, en el segundo problema, en el cual se podría haber realizado también un esquema similar al anterior, asociado a la recta numérica, puede verse que el alumno realizó una gráfica que esta directamente relacionada con la situación planteada en el problema. Por lo tanto, el dibujo tiene una dirección vertical, en lugar de horizontal, debido a que el problema hace referencia a la extracción de petróleo, aunque sigue siendo una representación esquemática y no pictórica.

Caso 3: “Calcular el perímetro y el área de un cuadrado sabiendo que un lado mide $3x-1$ cm y el otro $x+3$ cm.”

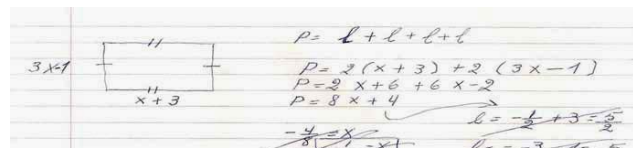


Figura 3: Figura de análisis de ejercicio 3

La estudiante realiza una figura de análisis para volcar los datos que se brindan en el problema. Pero en la figura de análisis realizada comete un error que se arrastra luego en toda la resolución del problema, percibiendo, al final, la alumna sólo que el resultado al que llega es incorrecto pero sin lograr deducir donde tuvo origen el error.

5. Estudio de casos en escenarios no académicos

En la investigación pudo observarse que las figuras de análisis no se confeccionaban solo en escenarios escolares sino que su realización se llevaba a cabo a la hora de resolver problemas en escenarios no académicos. Se hizo un rastreo de su presencia en distintos casos pero aquí solo se presentarán aquellos asociados a distintos oficios como son el de tejedora, modista, albañilería, entre otros.

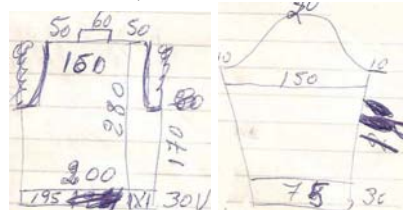


Figura 4: dibujos de una tejedora

En la entrevista llevada a cabo a una tejedora pudo concluirse que el conocimiento relacionado al tejido fue aprendido en forma asistemática, dependiendo, mayormente, por la propia experiencia que fue perfeccionando para poder obrar en su oficio. Oficio que aprendió de sus mayores, en una transmisión oral de la cultura. Pudo observarse en los dibujos que realizaba que ellos sirven de soporte para volcar en ellos el registro de los cálculos realizados para establecer los puntos y vueltas necesarios para la confección de la prenda.

Otro caso son los dibujos realizados por una costurera tomados de la tesis de Elguero (2009, p.91) donde se realizó una entrevista a una costurera.

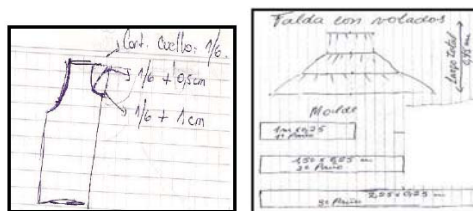


Figura 5: dibujos de una costurera

Estos croquis son figuras de análisis confeccionadas y creadas por la propio sujeto para responder a sus necesidades laborales ya sea para cocer una prenda como para tejlarla. Resumiendo lo analizado se han registrado diferentes oficios que en su labor, pueden encontrarse la confección de figuras de análisis, aún siendo oficios tan diferentes, tienen una característica en común, en todos ellos se construye, ya sea una prenda o una pared por ejemplo, y para dicha construcción se debe tener previamente una visualización de los datos necesarios para que la construcción responda a las necesidades requeridas. Por tal motivo, es que se han seleccionado estos oficios que a simple vista son tan diferentes pero como se ha analizado tiene un eje en común, todos giran en torno a la construcción.

En este proceso de visualización es que se realizan las figuras de análisis para luego llevarlo a cabo y confeccionar lo buscado.

6. Cometarios finales

Las figuras de análisis se realizan durante la etapa de confección de un plan, en ellas se vuelca la información que se posee y se identifican cuáles son los propósitos que se desean alcanzar. Sin embargo la utilidad de estas figuras no termina en esta etapa. Durante el proceso de elaboración, las figuras de análisis son asumidas como una herramienta que facilita la visualización y en muchas oportunidades son trabajadas y modificadas por quien está realizando la actividad matemática, registrando los nuevos datos que se concluyen. Podría afirmarse que las figuras de análisis tienen varias funciones en la construcción del conocimiento matemático. Por una parte, es posible identificar en su uso un apoyo a las circunstancias cognitivas puestas de manifiesto: al volcar en ellas los datos conocidos y los objetivos planteados, actúan facilitando procesos como la visualización, tanto en actividades académicas como no académicas. Las funciones didácticas y sociales de las figuras de análisis son indiscutibles ya que se utilizan como herramientas de apoyo para la transmisión de ideas por ejemplo entre docentes y estudiantes o entre autores y lectores de los libros de textos matemáticos.

Su aparición como práctica social dentro de un grupo que comparte códigos y normativas para su trazado, que en muchas oportunidades son tácitas y en otras se explicitan a través de pasos para su trazado, permiten que en enfoque socioepistemológico dé la posibilidad de encarar en el futuro una investigación más profunda que se oriente a identificar esas normativas en las distintas áreas de la matemática y la manera en la que colaboran a la comprensión de conceptos en el aula de matemática.

7. Referencias

- Castañeda, A. (2002). Estudio de la evolución didáctica del punto de inflexión: una aproximación socioepistemológica. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*. 5(1), 27-44.
- Chevallard, Y. (1998). *La transposición didáctica. Del saber sabio al saber enseñado*. Argentina: Aique Grupo Editor.
- Descartes, R. (1983). *Reglas para la dirección de la mente* (de Samaranch, F., Trad.). Barcelona: Gráficas Ramón Sopena, S.A. (Trabajo original publicado en 1701).
- Elguero, C. (2009). *Construcción social de ideas en torno al número racional en un escenario sociocultural del trabajo*. Tesis de Maestría no publicada, Cicata - IPN, México.
- Ferragina, R., Fisichella, L. y Rey, G. (1999). *Matematizando*. Buenos Aires: UPR, Un problema resuelto.
- Fischbein, E. (1993). *The Theory of figural concepts*. *Educational Studies in Mathematics* 24, 139-162.
- Galina, E. (2008). *Medida, geometría y el proceso de medir*. LVIII Reunión Anual de la Unión Matemática Argentina. Mendoza.
- Micelli, M. (2010). *Las figuras de análisis en geometría. Su utilización en el aula de matemática*. Tesis de Maestría no publicada, Cicata - IPN, México.
- Nieto, J. (2004). *Resolución de problemas Matemáticos*. Material de apoyo de un taller de formación matemáticas en la Licenciatura de Matemáticas. Maracaibo.
- Poincaré, H. (1913). *Dernières pensées*. París: Flammarion.

Rodríguez, R. (2005). *El aprendizaje de la demostración en geometría: el pasaje de la geometría experimental a la geometría deductiva*. IUFM de Basse-Normandie Caen Francia.

Tarifa, L. y González, R. (2000). *Algunas reflexiones sobre la resolución de problemas matemáticos*. En Colectivo de autores de Universidad del Ministerio de Educación Superior (Eds.), *Resolución de problemas* (pp. 5-9). Cuba: Editorial Universitaria del Ministerio de Educación Superior.

Torregrosa, G. y Quesada, H. (2007). Coordinación de procesos cognitivos en geometría. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*. 10(2), 275-300.

Valverde, L. (2003). *Los métodos de enseñanza-aprendizaje*. Sesión 4. La heurística. Diplomado en didáctica Universitaria. Universidad de Medellín, Colombia.