

REFLEXION DE FUTUROS PROFESORES DE MATEMATICAS SOBRE LAS DIFICULTADES DEL APRENDIZAJE ALGEBRAICO

María Teresa Castellanos Sánchez – Pablo Flores – Antonio Moreno
mcastellanos@unillanos.edu.com – p.flores@ugr.es – amorenoverdejo@gmail.com
Universidad de los Llanos Colombia Universidad de Granada España

Núcleo temático: Formación del profesorado en Matemáticas

Modalidad: CB

Nivel educativo: Formación y actualización docente

Palabras clave: reflexión, prácticum, álgebra escolar

Resumen

En el contexto de la formación inicial de futuros profesores de matemáticas (FPM), se analiza la reflexión de dos futuros profesores sobre los errores y las dificultades del aprendizaje algebraico. Con este objetivo se diseñó e implementó un módulo formativo en el prácticum de un programa de licenciatura en matemáticas en Colombia. La investigación se configuró bajo la teoría del aprendizaje realista para promover la reflexión, en coherencia con este marco teórico se orientó la realización de un ciclo reflexivo bajo el modelo ALaCT. Siguiendo el enfoque de la investigación cualitativa, de carácter interpretativo y usando el análisis de contenido se han examinado las producciones de los participantes, los registros obtenidos en la intervención y del diario de campo del investigador. Los resultados muestran, que los futuros profesores llevaron a cabo cinco fases de reflexión, en las cuales el análisis de los errores y las dificultades del aprendizaje algebraico transita por mínimo cuatro momentos, que implican a los futuros profesores en decisiones y alternativas para abordar la instrucción. Se informa cómo evolucionó este análisis y el conocimiento profesional involucrado para fundamentarlo.

Fundamentos teóricos

Investigaciones en educación matemática han estudiado la reflexión de profesores en diferentes contextos, para conducir al entendimiento y al desarrollo de la teoría, en la formación, y para promover la relación entre el conocimiento del oficio (práctico) y el conocimiento académico (Kieran, Krainer y Shaughnessy, 2013).

Entendemos la reflexión como un proceso de pensamiento activo, persistente y responsable (sistemático) que surge de una situación problemática (Dewey, 1989), para analizar la práctica con el propósito de significar el conocimiento, de comprender dicha práctica y de afrontar situaciones profesionales. Este proceso parte por detectar una situación de duda, que

hay que *describir* (Flores, 2007). Posteriormente el profesor *fundamenta la situación*, *verbaliza sus teorías* y principios desde donde él enfoca el problema y manifiesta las dimensiones de ese problema. Cuando ha *profundizado en sus ideas y concepciones*, está en disposición de *contrastarlas con las teorías y principios externos*. La confrontación le lleva a *buscar nuevas formas de contemplar el problema*. Finalmente, el profesor *decide su actuación* en consideraciones contrastadas que le parecen significativas.

La reflexión del profesor sobre su práctica se considera un elemento fundamental en su desarrollo profesional y un medio para la progresiva comprensión de la práctica dentro de un aprendizaje continuo (Climent y Carrillo, 2003), por tanto favorece la conexión entre las experiencias en la práctica y formación teórica.

La reflexión es uno de los principios del enfoque de la formación realista, que se basa en la teoría sociocultural y en la visión realista del aprendizaje (Melief, Tigchelaar, Korthagen y Van-Rijswijk, 2010). Dicho enfoque, busca que el profesor integre sus experiencias personales, conocimientos teóricos y experiencias prácticas, a través de la reflexión.

Desde esta perspectiva entendemos que la reflexión también ayuda a que los futuros profesores estructuren sus pensamientos sobre experiencias prácticas y le lleven a acciones fundamentadas por nuevos conocimientos. Siguiendo estos presupuestos, asumimos para el propósito de nuestro estudio el modelo reflexivo que se ha consolidado como una alternancia entre “acción” y “reflexión”, el ciclo ALaCT (Korthagen, 2001).

Metodología

El estudio se realizó con 12 FPM que cursaban el prácticum de la Licenciatura en Matemáticas de Unillanos-Colombia. Siguiendo el enfoque de investigación cualitativa, de carácter interpretativo y usando el análisis de contenido examinamos con Nvivo- 11 las producciones de los participantes y los registros de intervención. En el análisis, apreciamos cómo evolucionan en la identificación y formulación *de problemas profesionales* sobre las limitaciones del aprendizaje algebraico, así como qué *conocimiento didáctico del álgebra* se manifiestan durante el proceso reflexivo. La primera variable se estudia a partir de la definición, caracterización y formulación del problema (Castellanos, Flores y Moreno, 2017), mientras que la segunda a través de los organizadores curriculares provenientes del Análisis Didáctico del álgebra.

En esta comunicación describimos el segundo módulo formativo de un experimento de enseñanza de una investigación más amplia (Castellanos, Flores y Moreno, 2015). El módulo involucró un ciclo reflexivo ALaCT (Figura 1) en el que los futuros profesores (FPM) identifican errores y dificultades del aprendizaje algebraico de escolares cuando responden a una prueba.

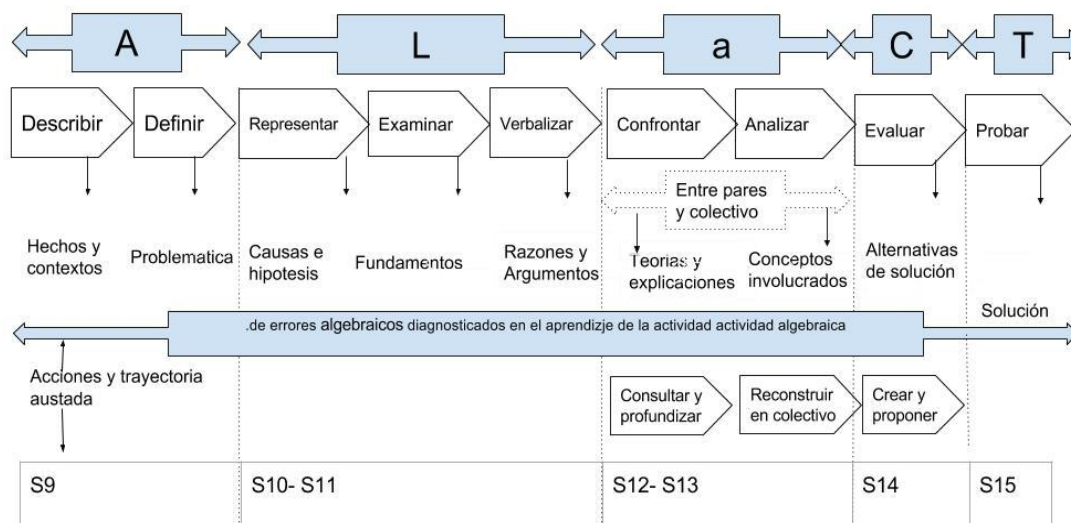


Figura 1. Trayectoria de acciones reflexivas en el ciclo

Análisis y resultados

Realizamos dos estudios de caso (Stake, 1998), que informan del proceso reflexivo de dos FPM (Lina y Juan) en las cinco fases de reflexión ALaCT.

En la fase A: Partir de la acción o experiencia

Los FPM en la sesión 9 (figura 1), analizaron las respuestas de los alumnos a una prueba para diagnosticar el aprendizaje del álgebra escolar, e *identificaron, describieron y formularon* limitaciones del aprendizaje algebraico.

Lina Los chicos tienen “falencias en los preconceptos”, tienen problemas con la letra y se equivocan con los procedimientos algorítmicos...Ah! también...los despistes o respuestas descabelladas...aquí los tenemos [adjunta lista]

Lina, percibió carencias de conocimiento de los escolares: “*falencias en los preconceptos*” (e.g. *propiedades usadas en productos notables, identidad entre expresiones de forma $(a \pm b)^2$*). Apreciaba como problemática la “*falta de conocimiento proveniente de cursos anteriores*”. Alude como errores a hechos generales, de origen incierto, reconociendo “*poca experiencia en este asunto*”. Se interesó por: “*notar errores y dificultades de los estudiantes*”.

al resolver tareas con expresiones algebraicas” y estimaba que le *“guiarían las estrategias para enseñar los binomios cuadrados y propiciar el sentido sobre estas estructuras”*, por lo que formuló la siguiente cuestión:

¿Qué dificultades tienen los estudiantes para hacer uso de sus conocimientos en la solución de operaciones con expresiones algebraicas?

La cuestión responde a un planteamiento general, deja ver una situación de déficit de conocimiento profesional, que no es evidente e inmediato para ella.

Juan percibió *“situaciones en las que proceden los estudiantes de manera incorrecta o equivocada”*, identificó estos hechos como errores y describió ejemplos (*ej. uso equivocado de la notación, aplicación incorrecta de la propiedad distributiva*). Identificó su problemática del aprendizaje algebraico de los escolares, con errores debidos a la ausencia de sentido. Aunque la formulación es general, entendemos que se trata de errores originados en las características del lenguaje y en los procedimientos (Socas, 1998).

La inquietud de Juan, más allá de evaluar el estado cognitivo de los estudiantes, se interesó en conocer *“las estrategias que usan los alumnos al tratar y/o transformar una expresión algebraica”*. Su preocupación estaba en comprender *“las habilidades que tienen los estudiantes y, las necesarias para hacer uso eficiente de los procedimientos algebraicos con expresiones”*. Las cuestiones formuladas quedaron así:

“...ver cómo los jóvenes proceden, qué propiedades usan y cómo justifican una técnica aplicada”. Complementó con la cuestión: *¿En qué características de las expresiones, prestan atención los jóvenes, cuando proceden con ellas?*

Juan espera que *“los alumnos reconozcan las características de las expresiones algebraicas”*. Focalizó su atención en el uso de propiedades de los R y en técnicas algebraicas (ejemplificamos el análisis de variables en el anexo).

Fase L: Mirar hacia atrás en la acción

Los FPM en la sesión 10 (figura1) examinaron el origen de los errores acudiendo a *“la explicación que dieron los niños”* y a las variables de tarea de las situaciones matemáticas (*ej. significados del tema, metas y complejidad cognitiva establecida*). En consecuencia, apreciaron necesario *“examinar los errores debidos a la falta de conocimientos previos y a*

la complejidad de los procedimientos involucrados”. Con ejemplos justificaron “el origen de los errores cometidos por sus escolares” y ubicaron algunas dificultades.

Para **Lina** los “despistes”, como inicialmente los había denominado, “se tratan de errores que proceden del uso de esquemas antiguos”. Apreció procedimientos heredados de la aritmética, ya que se sustenta en “la aplicación que hacen los niños en álgebra, de las reglas y de conceptos que traen del sistema numérico”.

Al verbalizar los fundamentos de la problemática, Lina desvela su concepción de las limitaciones de aprendizaje, “el error, procede de una carencia de capacidades y conocimientos de los escolares”. **Juan** identificó el “manejo inadecuado de las propiedades para el álgebra”, apreciando el origen de errores en la ausencia de sentido. Por ejemplo, el error en la propiedad distributiva deriva de “la tendencia lineal de los jóvenes”.

En su explicitación Juan evidencia su inclinación por el sentido que los escolares dan a la estructura algebraica, manifiesta una concepción procedimental del álgebra y reconoce que, “la falta de comprensión sintáctica se convierte en una dificultad”.

El grupo de compañeros, durante la puesta en común en la sesión 11 (figura 1), señaló ayudó a definir creencias a Lina y Juan, mediante preguntas que les obligan a precisar las dificultades del aprendizaje algebraico.

FPM3	¿A qué se refiere con la incapacidad para pensar algebraicamente?
P1	¿Por qué cree, que la comprensión de las nociones involucradas en la estructura aritmética, reducen las dificultades con el tratamiento de la estructura algebraica?
FPM5	Cree, que las dificultades del aprendizaje algebraico se deben a inmadurez de los alumnos
FPM7	Porque piensa, que al dar sentido a la literal, se tendrán menos dificultades de aprendizaje.
FPM9	¿A qué se refiere con abstraer simbólicamente?

Cuadro 1 Explicitación de creencias en Fase L.

Estas consideraciones llevaron a Lina y Juan a examinar con mayor precisión sus problemáticas sobre las limitaciones del aprendizaje algebraico. Expresaron su concepción sobre la noción de sentido estructural y sobre la distinción entre errores y dificultades.

Finalmente las reformularon señalando las siguientes cuestiones:

Lina	¿Por qué los alumnos no puedan ver la expresión algebraica como un objeto?
Juan	¿Cuáles son los procedimientos que usan los jóvenes para transformar con éxito las expresiones algebraicas? y complemento con el interrogante: ¿Cómo reconocen la equivalencia sintáctica entre expresiones algebraicas?

Cuadro 2 La nueva cuestión formulada en fase L

Fase a. Conocimiento de los puntos importantes

Juan y Lina, en la sesión 12 (figura 1) centraron su atención en el conocimiento de aspectos relacionados con su problemática (*ej. dificultades debidas a la ausencia de sentido*). Por ejemplo, dieron importancia a la estructura conceptual del cuadrado del binomio y a su relación con los sistemas de representación.

Confrontaron sus concepciones entorno a “*la integración de la visión procedimental y estructural para abordar transformaciones y equivalencias entre productos notables*”. Discutieron sus presupuestos para distinguir las formas estructurales de estas expresiones, el sentido de la letra y el signo igual implicado en ellas.

En la sesión 13 (figura 1) expusieron ideas sobre “*el desarrollo cognitivo de los escolares asociado a su edad*”, haciendo explícitas las limitaciones del aprendizaje debidas a la abstracción simbólica y a la sustitución formal (*ej. simplificación, eliminación, compilación estructural*). Interpretaron los obstáculos cognitivos a raíz de la conexión entre las estructuras aritméticas y algebraicas al inicio del aprendizaje algebraico y abordaron el origen de las dificultades debidas a dicho tránsito.

Los FPM se centraron en “*¿Cómo interpretar la comprensión de las relaciones y procedimientos que los alumnos efectúan al establecer la equivalencia entre las diferentes subestructuras de los binomios?*” Las lecturas le llevaron a identificar en las respuestas de sus alumnos “*la comprensión relacional y procedimental que rige las subestructuras de los binomios del tipo $(a \pm b)^2$ y el origen de errores cuando se trata de establecer la equivalencia entre las diferentes subestructuras*”. Asumieron que la ausencia de sentido “*se caracteriza por la coherencia que establecen los jóvenes entre los significados de la equivalencia del binomios y los procesamientos ejecutados a partir de sus interpretaciones*”.

De manera complementaria cada uno formuló una cuestión sobre el diseño de las tareas matemáticas escolares y la visión del sentido algebraico.

Lina	¿Cómo aprovechar los sistemas de representación geométrico, simbólico y verbal para enseñar las transformaciones y equivalencias de producto notable $(a \pm b)^2$?
Juan	¿Cómo abordar desde la visión del sentido estructural tareas con expresiones algebraicas que implican la factorización de TCP?

Cuadro 3. La nueva cuestión formulada en fase a.

Fase C. Crear situaciones de acción

Apropiados los referentes profundizados, crearon en la sesión 14 (figura1) una estrategia, que llamaron "ruta cognitiva", para “analizar tareas, estimar errores e interpretar cómo los alumnos comprenden relaciones y se desempeñan con los procedimientos algebraicos, al tratar las equivalencias del binomio cuadrado.

Representamos en la figura 2 la explicación que hacen Juan y Lina de su estrategia. Apreciamos que se apoyan en tres elementos de la estructura conceptual: conceptos, nociones y propiedades. Estos le permiten examinar la validez de las respuestas de escolares y justificar los procedimientos de resolución (figura 2 izquierda). Además identifican los significados, interpretaciones, estrategias y argumentos dados por los escolares, observando y analizando cómo comprenden la equivalencia (figura 2 derecha). Para ellos “*la falta de coherencia entre estos elementos, muestra la presencia de una dificultad que está asociada a la ausencia de sentido*”. Destacamos la responsabilidad de los FPM para dar fundamento a sus análisis a partir de los referentes.

La problemática fue reformulada en la cuestión: *¿En qué medida la visión estructural promueve la comprensión relacional y procedimental involucrada en: la factorización de TCP y en la equivalencia de los binomios del tipo $(a \pm b)^2$?*

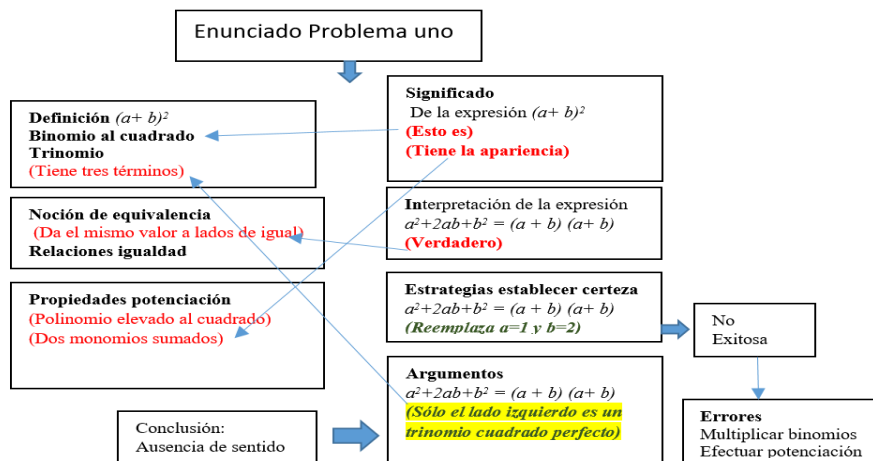


Figura 2. Alternativa presentada en la Fase C

Fase T. Comprobar en una nueva situación e Iniciar un nuevo ciclo

Los FPM, usaron la ruta cognitiva creada en la fase anterior para “*analizar las demás tareas de la prueba*” y para confirmar algunos presupuestos estimados (*ej. la mayoría de los errores tiene origen en la herencia de la aritmética*). En consecuencia lograron “*establecer un listado más objetivo de errores y dificultades que dan cuenta del estado cognitivo de los alumnos*” y planificar la instrucción de las temáticas. Precisaron los errores y dificultades del aprendizaje que están asociados a la factorización y al tratamiento de la equivalencia de binomios. Al mismo tiempo buscaron coherencia entre competencias y objetivos de la secuencia didáctica, e hilaron con las capacidades

La fase T se cerró con la reformulación de la pregunta, que no sufre mayores transformaciones: *¿Cómo abordar desde la visión del sentido estructural tareas con expresiones algebraicas para promover la comprensión relacional y procedimental en la factorización de TCP y en la equivalencia de los binomios del tipo $(a \pm b)^2$?. La complementaron planteándose ¿Qué impacto tiene dicha la comprensión en las limitaciones del aprendizaje algebraico?*

Consideraciones finales

Examinamos la reflexión a lo largo de las cinco fases del ciclo ALaCT (Korthagen, 2001) interpretando la evolución en la definición de la problemática sobre las limitaciones del aprendizaje algebraico y del conocimiento profesional de dos FPM. Apreciamos que ambos atravesaron las fases del ciclo. En la fase A realizaron la *descripción y el planteamiento de la situación problemática*, sobre los resultados del aprendizaje algebraico de un grupo de escolares.

Identificamos en la fase L *cómo se implican* en identificar errores que comenten los escolares en tareas algebraicas, observando que los FPM *apreciaron el origen* de dichos errores y *precisaron situaciones* atribuidas a *la complejidad de los procedimientos involucrados*. En las explicitaciones de Juan y Lina se observan sus formas de concebir las causas de los errores algebraicos, muestran disposición para analizar sus concepciones, contemplando ir *más allá de las carencias de capacidades y conocimientos de los escolares*.

En la fase "a" percibimos la toma de conciencia de qué entienden por limitaciones del aprendizaje algebraico, aclarando la distinción entre errores y dificultades. Profundizan sobre

las nociones de sentido estructural, las relaciones y procedimientos que rigen las subestructuras de las expresiones del tipo $(a \pm b)^2$ y las limitaciones de su aprendizaje.

Esquematisamos la estrategia que plantean los FPM en la fase C, para identificar y comprender las soluciones de sus alumnos y el origen de errores cuando tratan la equivalencia de las diferentes subestructuras del binomio cuadrado. Y finalizan planteando una nueva cuestión, cerrando la fase T, dispuesta para iniciar nuevo ciclo.

Referencias bibliográficas

Castellanos, M. T., Flores, P. y Moreno, A. (2017). Reflexión de futuros profesores de matemáticas sobre problemas profesionales relacionados con la enseñanza del álgebra escolar. *Bolema*, 31, (en prensa)

Castellanos, M.T., Flores, P. y Moreno, A. (2015). Iniciación al desarrollo profesional de futuros profesores de matemáticas y reflexión durante las prácticas de enseñanza. *Revista Colombiana de Matemática Educativa*, 1, 27-31.

Climent, N. y Carrillo, J. (2003). El dominio compartido de la investigación y el desarrollo profesional. Una experiencia en Matemáticas con maestras. *Enseñanza de las ciencias*, 21, 387-404.

Dewey, J. (1989). *Cómo pensamos*. Barcelona, Paidós.

Flores, P. (2007). Profesores de matemáticas reflexivos: formación y cuestiones de investigación. *PNA*, 1, 139-158.

Kieran, C., Krainer, K. y Shaughnessy, J. (2013). Linking research to practice: Teachers as a key stakeholders in mathematics education research. In M. Clements, A. Bishop, C. Keitel, J. Kilpatrick, y F. Leung (Eds.), *Third international handbook of mathematics education*, pp. 361-392. New York: Springer.

Korthagen, F. (2001). *Linking Practice and Theory. The Pedagogy of Realistic Teacher Education*. Londres: Lawrence Erlbaum Associates.

Melief, K., Tigchelaar, A., Korthagen, F. y Van-Rijswijk, M. (2010). Aprender de la practica. En O. Esteve, K. Melief y A. Alsina (Eds.), *Creando mi profesión: una propuesta para el desarrollo del profesorado*, (pp. 39-64). Barcelona: Octaedro.

Rico, L., Lupiañez, J. y Molina, M. (2013). *Análisis didáctico*. Granada, Comares.

Socas, M. (1997). Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las matemáticas en la educación secundaria. En L. Rico (Coord.), *La educación matemática en la enseñanza secundaria*, (pp. 125-154). Barcelona: Horsori.

Stake, R. (1998). *Investigación con estudio de casos*. Barcelona, Morata.

REFLEXION DE FUTUROS PROFESORES DE MATEMATICAS SOBRE LAS DIFICULTADES DEL APRENDIZAJE ALGEBRAICO

María Teresa Castellanos Sánchez – Pablo Flores – Antonio Moreno

mcastellanos@unillanos.edu.com – p.flores@ugr.es – amorenoverdejo@gmail.com

Universidad de los Llanos Colombia Universidad de Granada España

Anexo 1: Ejemplo del análisis de rasgos para las variables del estudio en la fase A

FPM	Definición de la problemática	Conocimiento profesional
LINA	<ul style="list-style-type: none"> • Sujetos: Escolares (12-13 años) • Objeto: Expresiones algebraicas • Foco: Operaciones con expresiones algebraicas. • Origen: Carencia de conocimiento que provienen de cursos anteriores • Naturaleza: Los errores ocurren por carencias en el manejo de conceptos, contenidos y procedimientos al resolver tareas algebraicas • Acción: Identificar errores y dificultades que comenten escolares en una prueba diagnóstico • Cuestión: ¿Qué dificultades tienen los estudiantes para hacer uso de sus conocimientos en la solución de operaciones con expresiones algebraicas? • Déficit: Necesidad de conocer las dificultades del aprendizaje algebraico • Percepción de la solución: hay una respuesta que indica cuales son las dificultades... 	<ul style="list-style-type: none"> • Aludió a las propiedades del producto de binomios como expectativa de aprendizaje • Reconoció importancia del sentido de la literal en binomios cuadrados (como parámetro). • Manifestó las relaciones entre los sistemas de presentación (S-G) para significar los binomios cuadrados • Planteó la identidad entre expresiones de la forma $(a \pm b)^2$ • Identificó errores por la falta de atención en procedimientos, “despistes” • Clasificó las respuestas erróneas en relación a los contenidos algebraicos
JUAN	<ul style="list-style-type: none"> • Sujetos: Escolares (13-14 años) • Objeto: Trinomios cuadrados perfectos TPC • Foco: Factorización de TCP • Origen: Habilidad para hacer uso eficiente de procedimientos algebraicos con expresiones • Naturaleza: Los errores provienen de la ausencia de sentido de los escolares al efectuar procedimientos algebraicos • Acción: identificar aciertos y errores en las estrategias de resolución de las tareas • Cuestión: ¿Cómo proceden, qué propiedades usan y cómo justifican una técnica aplicada?... ¿En qué características de las expresiones prestan atención cuando proceden con ellas? • El déficit necesidad de conocimiento para interpretar actuación de escolares (errores) • Percepción de la solución: Existe variedad en los procedimientos y justificaciones usadas por estudiantes que se requieren conocer 	<ul style="list-style-type: none"> • Concibe los TCP como expansión sintáctica de los binomios cuadrados • Establece equivalencias entre expresiones algebraicas de los TCP • Advierte de las transformaciones sintácticas que dan lugar a los TCP • Identifica y describe errores algebraicos producidos por la notación y el lenguaje algebraico. • Ubica errores procedentes de la ausencia de sentido. • Plantea identidades a la expresión $(a \pm b)^2$ • Acudió a las propiedades y relaciones de los R para identificar errores • Planteó capacidades y expectativas de aprendizaje para la factorización de TCP • Identificó el uso anómalo de las propiedades de R como error.