UNA PROPUESTA PARA LA SUPERACIÓN DE SESGOS EN EL RAZONAMIENTO PROBABILÍSTICO

Ferley Ortiz (farla82@yahoo.es, fortiz@icfes.gov.co)
Sandra Segura (sajesemo@gmail.com)
Cra 103B No 82-92 Int. 1 Apto. 407 Bogotá-Colombia

Mención de Honor: Premio Nacional de Educación Francisca Radke
Trabajo de grado a nivel de Especialización
Universidad Distrital Francisco José de Caldas
Colombia

Palabras claves: Investigación-acción, enseñanza, probabilidad, sesgos, Resolución de problemas

RESUMEN

Los problemas de enseñanza y aprendizaje de la probabilidad y la ausencia de reflexiones suficientes sobre el tema en el contexto educativo colombiano, llevan a que dos profesores de matemáticas de educación básica y media, se den a la tarea de diseñar y desarrollar una propuesta para la superación de sesgos en el razonamiento probabilístico de sus estudiantes.

De esta manera, en el marco de la investigación-acción, se recoge la experiencia y reflexión de tres implementaciones de aula consecutivas: La primera con estudiantes de grado décimo, cuyo énfasis estuvo dado en el enfoque clásico de probabilidad, que llevó a que los estudiantes no tuvieran cambios significativos en sus argumentaciones respecto a los fenómenos de probabilidad; la segunda con estudiantes de grado séptimo, donde el enfoque fue netamente experimental, convirtiéndose en un obstáculo para desarrollar procesos de institucionalización del saber, que permitieran a los estudiantes formalizar algunos conceptos. Las reflexiones suscintas a esta experiencia llevaron al desarrollo de una tercera, también con estudiantes de grado séptimo, pero en otra institución, donde se construyó de manera conjunta y horizontal con los estudiantes una situación problema abierta a los dos enfoques de probabilidad (clásico y experimental) que permitió desarrollar las actividades de acuerdo al avance de cada grupo en el proceso de resolución. De ésta manera se contribuyó en forma significativa a la superación de sesgos probabilísticos, y se consolidó para nosotros un instrumento modelo para la enseñanza de las matemáticas.

1. LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS ¿SUFICIENTE PARA LA ENSEÑANZA DE LA PROBABILIDAD?

Los fenómenos aleatorios son una componente esencial en la naturaleza misma. No se puede saber con certeza cuáles son los acontecimientos que van a suceder el año entrante, mañana, en la hora siguiente, e incluso lo que pueda pasar con exactitud el próximo segundo.

¿Cuáles serán los resultados de clasificación de las selecciones nacionales en el próximo mundial?, ¿Cuál será el resultado de la lotería? Son cuestionamientos que suelen tener para algunos mayor relevancia que para otros, pero cuyo desenlace, en principio, ninguno puede controlar. Sin embargo:

> La teoría de la probabilidad y su aplicación en los fenómenos aleatorios han construido un andamiaje matemático que logra manejar acertadamente esta incertidumbre. Fenómenos que en un comienzo parecen caóticos, regidos por el azar, son ordenados por la estadística mediante leyes aleatorias de una manera semejante a las leyes determinísticas sobre otros fenómenos de las ciencias (MEN, 1997, p.69).

Es así como el Ministerio de Educación Nacional de Colombia (M.E.N) en los Lineamientos curriculares sustenta la consideración del pensamiento aleatorio dentro del programa curricular de matemáticas en la escuela.

Se plantea como metodología la exploración y la investigación por parte de estudiantes y de docentes, la construcción de modelos físicos y el desarrollo de estrategias como las de simulación de experimentos y de conteos, la comparación y evaluación de diferentes formas de aproximación a los problemas con el objeto de monitorear posibles concepciones y representaciones erradas (MEN, 1997, p.69). Esto se puede entender como: trabajar mediante la resolución de problemas[1].

Pero esto no implica *per se* un trabajo exitoso en el aprendizaje de la probabilidad. Serrano, 1996, menciona que:

> Hay al menos tres fuentes diferentes de posibles dificultades de aprendizaje, si la enseñanza se realiza según esta metodología.
>
> El uso de heurísticas, como la representatividad y la existencia de sesgos en la asignación de probabilidades a los sucesos. De acuerdo con la representatividad los sujetos evalúan la probabilidad de un suceso tomando como referencia sólo el parecido con la población que proviene y olvidando la variabilidad de los procesos de muestreo.
>
> … Otro sesgo importante es la equiprobabilidad, por el cual los sujetos generalizan indebidamente la regla de Laplace aplicándola en situaciones en la que no es pertinente.
>
> La interpretación incorrecta de enunciados de probabilidad desde el punto de vista frecuencial es el enfoque en el resultado aislado descrito por Konold (1989) según este autor ciertos sujetos interpretan las afirmaciones probabilísticas como referidas a la predicción de un resultado en un solo experimento y no a la frecuencia de aparición de un resultado en una serie de ensayos. No consideran equivalentes las repeticiones del mismo experimento aleatorio. (Serrano, 1996, p.11)

Con base en estos pronunciamientos, es posible afirmar que la resolución de problemas basada en la experimentación, sin condiciones adecuadas, conlleva a la existencia de sesgos como la representatividad, la equiprobabilidad y el enfoque en el resultado aislado en los estudiantes. En este sentido, habría que pensar en formas más efectivas de trabajo de aula para el desarrollo del razonamiento probabilístico, con las cuales no se fomente este tipo de heurísticas en los estudiantes y se posibilite la superación de ellas durante el proceso de enseñanza.

Así, en el presente documento se expone una experiencia de investigación de aula, fundamentada en la metodología Investigación-acción, cuyo propósito fue responder los siguientes interrogantes: ¿Bajo qué condiciones debería hacerse el trabajo de aula para la enseñanza de las nociones básicas de probabilidad, de tal manera que se promueva la superación de sesgos en el razonamiento probabilístico en los estudiantes?; ¿Qué actividad(es) de aula sería(n) pertinente(s) para desarrollar el razonamiento probabilístico de los estudiantes?

2. LA PROPUESTA DE AULA DESDE LA INVESTIGACIÓN-ACCIÓN

Elliot, (1994) define investigación-acción como aquella que interpreta los problemas prácticos y cotidianos de los profesores desde el punto de vista de los actores implicados, permitiendo así la construcción de una teoría con sentido y lenguaje común, mediante un "proceso de investigación continuo (en forma de espiral) en donde se van dando *"los momentos de problematización, diagnóstico, diseño de una propuesta de cambio, aplicación de la propuesta y evaluación, para luego reiniciar un nuevo circuito partiendo de una nueva problematización"*.

Es así como la estructura de nuestro proyecto se compone de tres ciclos de investigación a los cuales denominamos: Momento uno: Una primera intervención con énfasis en el enfoque clásico, Momento 2: Enseñanza de la probabilidad desde el cálculo de la frecuencia relativa y Momento 3: Una propuesta de apertura a

[1] La Resolución de problemas propicia la investigación, la construcción de modelos físicos, la interacción de los estudiantes con el entorno y otros procesos de socialización.

los dos enfoques de probabilidad (El clásico y el experimental) . En cada uno de estos momentos se presentan las fases propuestas por Elliot, con algunas modificaciones que mencionamos más adelante debido al contexto escolar en el que nos movemos los profesores-investigadores de ésta propuesta.
En cada uno de los momentos se hace una breve descripción de la institución y el grupo de estudiantes con el cual se trabaja, las actividades diseñadas, los momentos más relevantes de la propuesta didáctica y por último la evaluación y las implicaciones para el siguiente momento. Para la recolección de la información se utiliza el diario de campo (el cual es llevado por una persona externa en el momento 1 y por el profesor en los momentos 2 y 3), el registro de audio y algunos artefactos como las carpetas y/o trabajos de los estudiantes.

Para la evaluación de la propuesta se tienen en cuenta la información recolectada a través de los artefactos, notas de campo y grabaciones de audio, en donde se busca evidencia (expresiones) que indiquen la presencia ó superación de alguno de los sesgos, así como de las relaciones que se dan entre estudiante-profesor-conocimiento al desarrollar la propuesta. También se tiene en cuenta la información arrojada por los instrumentos de diagnóstico y de evaluación de finalización de proceso, para los cuales se establecen como categorías de análisis los tres sesgos (representatividad, enfoque en el resultado aislado y equiprobabilidad).

3. UNA PRIMERA INTERVENCIÓN CON ÉNFASIS EN EL ENFOQUE CLÁSICO

La primera propuesta fue llevada a cabo en la Institución Educativa Compartir, una institución de carácter semi-privado, fundada en 1999, y ubicada en la localidad de Engativá, al Noroccidente de la capital. Tiene dos jornadas y en cada una se cuenta con aproximadamente 1000 estudiantes.

Como consecuencia de su reciente constitución, el plan de estudios de cada una de las áreas aún no ha sido absolutamente legitimado, hecho que ha llevado a que los distintos docentes que han trabajado en el colegio enseñen de acuerdo a su particular perspectiva y no con base en unas necesidades institucionales definidas.

Indudablemente esto afecta el proceso de aprendizaje de las matemáticas por parte de los estudiantes, quienes han tenido un contacto mínimo con conceptos aleatorios. Ausencia que se ve reflejada en los bajos resultados de las evaluaciones externas.

Los resultados del año 2004 dan cuenta de un bajo rendimiento de los estudiantes en el área de matemáticas, especialmente en el ámbito de la aleatoriedad, como era de esperarse por su respectiva inexperiencia en el ámbito escolar. Preocupante situación para nosotros como docentes de dicha institución quienes tendremos que contemplar dentro del currículo una solución que conlleve acciones inmediatas.

Más aún cuando estudiantes de grado noveno en el año citado obtienen en el eje de aleatoriedad el puntaje más bajo a nivel institucional: 23 puntos de 100 posibles. Esto constituye un punto de partida y una tensión a superar en nuestro ejercicio como docentes y aspirantes a especialistas en educación matemática: El estudio, diseño y ejecución simultáneos de una secuencia didáctica que sirva para contribuir al desarrollo de pensamiento aleatorio en el aula para 43 estudiantes que hoy día cursan el grado décimo.

Nos apoyamos del diario de campo[2], de trabajos de los estudiantes y de algunas grabaciones de audio para hacer las descripciones correspondientes. Las actividades diseñadas inicialmente se plantearon de la siguiente manera:

Actividad 1: El juego de los dados

Duración: 6 horas clase
Organización: Grupos de dos personas

[2] El diario de campo, en este momento, fue llevado por una estudiante del curso: Xiomara Riveros. En los demás momentos el registro fue realizado por los investigadores.

Objetivo: Propiciar la alusión a los puntajes que más y menos salen y las posibles causas de estos resultados, para así comenzar a construir conceptos como *espacio muestral, eventos favorables y medida de probabilidad.*

Desarrollo de la actividad: Cada jugador escribe 6 puntajes en el cuaderno. Deciden quien comienza a lanzar. Luego que lance uno, el otro tomará el(os) dados y hará lo mismo. A medida que el puntaje que resulte de lanzar los dados coincida con alguno de los escritos por el jugador, éste tendrá que tacharlo. El primero que tache todos los puntajes es el ganador. Primero jugarán con un dado, luego con dos y por último con tres.

Después de jugar y solamente tachar los puntajes, los estudiantes deberían, además, anotar los resultados de cada uno de sus lanzamientos. Luego vendría el momento de la socialización.

Actividad 2: La ruleta y los pimpones

Duración: 4 horas clase
Organización: Grupos de trabajo voluntariamente establecidos
Objetivo: Aplicar y establecer la diferencia del concepto de probabilidad en distintas situaciones aleatorias.

Desarrollo de la actividad: Se presentará a los estudiantes la siguiente situación: Si yo tengo una ruleta de 5 regiones iguales, numeradas de 1 a 5 ¿Cuál es la probabilidad de que al girarla tres veces obtenga el número 3?… Ahora piensen en 5 pimpones (rojo, azul, verde, amarillo, blanco) y extraigan 3 ¿Cuál es la probabilidad de que uno de los pimpones sea azul? ¿Cuál es la diferencia con el experimento anterior?, ¿En cuál de los dos juegos convendría más apostar?. Después de tener una respuesta se propicia un debate con todo el grupo de estudiantes, en la cual se aprovecha para introducir diferentes técnicas de conteo.

Actividad 3: Cara y sello

Duración: 2 horas clase
Organización: Grupos de trabajo voluntariamente establecidos
Objetivo: Inducir a la idea de probabilidad como límite de la frecuencia relativa.

Desarrollo de la actividad: Se pedirá a los estudiantes que apuesten a la moneda, y miren las diferencias entre las frecuencias relativas de cara y sello al realizar 10, 20, 50 y 100 lanzamientos

Actividad satélite: Análisis de experimentos aleatorios

Duración: Toda la unidad
Organización: Grupos de trabajo voluntariamente establecidos
Objetivo: Abrir dentro y fuera del aula espacios para que los estudiantes apliquen y contrasten los conceptos de probabilidad trabajados en las sesiones de clase.

Desarrollo de la actividad: La instrucción dada a los estudiantes que escojan un experimento aleatorio y sobre él examinen los diferentes conceptos trabajados en clase. En cualquier instante de la unidad pasa el grupo, por indicación del profesor, a exponer lo analizado hasta el momento.

Efecto de las actividades en el proceso de superación de sesgos

Representatividad

Dentro de la propuesta de aula, los estudiantes no compararon permanentemente, medidas de probabilidad con frecuencias relativas[3]. La aplicación de teorías a los experimentos por ellos trabajados no llevó más allá de la

[3] En la actividad inicial los estudiantes hicieron varios lanzamientos, pero no hallaron frecuencias relativas; solamente infirieron cuáles eran los puntajes que más y menos salían. En la actividad de cierre (cara y sello), la mayoría de los

medición de la probabilidad de cada uno de los posibles eventos del espacio muestral, en lo que algunos grupos notablemente fallaron:

> DC[4] (09-03-05 p.20) *asignación incorrecta del valor de probabilidad* Exposiciones: El juego de EST16 y EST38 es de picas y fijas, explican la metodología del juego y dicen que la probabilidad de adivinar una pica es de 1/9: adivinar qué números de 0 a 9 conforman la cantidad de 4 dígitos, cuando realmente la probabilidad es de 4/10
>
> DC (02-03-05 p.11)21 en la baraja La configuración con mayor número de cartas es: (as,as,as,2,2,2,2,3,3,3) y la probabilidad de obtenerla es (1/352)
> Con dos cartas (1/64)
> Con tres cartas (17/156)
> Con cuatro cartas (51/208)
> Con 5 cartas (85/260). Observan que el cardinal del espacio muestral es distinto, por lo que la probabilidad está hallada de manera incorrecta.

Estos pronunciamientos son muestra de que los estudiantes fijan su interés en hallar la probabilidad de sucesos en modelos uniformes, pero no dirigen la atención a la comparación de esta medida con la frecuencia relativa correspondiente. Por lo tanto, en relación con la representatividad, según lo descrito anteriormente, las actividades propuestas por nosotros, no fomentaron la superación de este sesgo ya que nuestra preocupación fue que los estudiantes calcularan correctamente las medidas de probabilidad, pues lo que mostraban era que no manejaban el algoritmo. Como reacción a esta problemática, lo que hicimos fue alejar a los grupos de sus actividades y enfocar su mirada a experimentos sugeridos por nosotros: principalmente ruleta y extracción de balotas. Esto provocó que el énfasis fuese dado en la aplicación de técnicas de conteo para hallar el cardinal del espacio muestral y no tanto la interpretación de la frecuencia relativa dado el resultado de una serie de experimentos.

Sin embargo rescatamos momentos que bien aprovechados, pueden servir de base para un óptimo desarrollo del razonamiento probabilístico en los estudiantes. Uno de ellos, la objeción de uno de los estudiantes cuando el profesor señaló la conveniencia de escoger los puntajes de la mitad en la actividad de los dados:

> DC (22-02-05 p4) *Socialización de puntajes que más y menos salían con dos dados.* EST3 dijo que eso no siempre se cumplía ya que el profe cuando jugó con nuestro grupo escogió los números con mayor posibilidad, sin embargo había perdido…

El comentario no se exploró lo suficiente, no se indagó sobre lo que sucedería al jugar más veces, qué implicaría esto en otros juegos. Fue una situación que pasó desapercibida y que hubiera propiciado la necesidad de pensar sobre algunas hipótesis referentes a la efectividad de la teoría probabilística.

A pesar de ello, en la actividad satélite, la misma estudiante que consultó en un libro la fórmula de la combinación, hizo comparaciones de probabilidad con frecuencia relativa:

> Como dijo EST14: la fórmula para hallar la cantidad de posibilidades cuando el orden de los eventos es intrascendente es $C(n,k) = \dfrac{n!}{(n-k)!\,k!}$, y se lee n combinado k es igual a n factorial sobre n menos k factorial por k factorial, siendo n la cantidad de elementos del conjunto y k el cardinal del grupo que vamos a formar. En el ejemplo de las balotas n = 5 y k = 3, de esta manera se obtienen 10 ternas distintas.

---

estudiantes como lo vimos en el subtítulo: "Desarrollo de actividades" se dedicaron a hallar la frecuencia relativa, pero no hicieron comparación alguna con la medida de probabilidad.

[4] Procedemos a explicar la notación: "DC" se refiere al instrumento (Diario de campo), en el cual se señala el día, mes y año; "p" es la página citada del diario de campo; "EST" hace alusión a estudiante cuyo código específico, sirve para distinguirlo de los demás.

> Cuando el orden es importante, desaparece k! del denominador y estamos hablando de una permutación. La fórmula sería: $P(n,k)=\frac{n!}{(n-k)!}$ y el cardinal del espacio muestral se ampliaría a 60." DC (11-03-05 p.24)

> DC (26-04-05 p33): El juego consiste en lanzar una canica en un orificio que tiene varias bifurcaciones EST14 concluye que las diferencias entre las frecuencias relativas y las medidas de probabilidad son cada vez menores, más cercanas a cero.

No fuimos lo suficientemente perspicaces para indagar acerca de las diferencias entre las muestras pequeñas y las muestras grandes, aspecto relevante dentro de la representatividad, ni de comparar sus iniciales hipótesis con su conclusión final. Solo la última actividad "cara y sello" fue motivada intencionalmente para contribuir a la superación del sesgo de la representatividad. Sin embargo, por no haber sido a lo largo de las sesiones un ejercicio constante, los resultados no fueron los esperados. Ninguno de los estudiantes aludió la cercanía de la frecuencia relativa con la probabilidad del evento a medida que se incrementaba la cantidad de lanzamientos:

Cuadro 1. Conclusión de los grupos en el lanzamiento de moneda

GRUPO	CONCLUSIÓN
1 (EST15, EST17, EST13)	Salió más sellos que caras, al principio salió ganando caras y después dominó todo el juego sellos
2 (EST5, EST39, EST36)	Mi conclusión es que si yo fuera apostador y fuera por medio de la moneda, se elegiría el sello por lo que hemos visto anteriormente.
3 (EST6, EST16, EST12)	C3 Resultados: 50 caras, 50 sellos. En 5 lanzamientos la cara avanza más, en 10 lanzamientos los dos avanzan igual, en 20 lanzamientos el sello avanza más, en 50 lanzamientos la cara avanza más, en 100 lanzamientos los dos avanzaron lo mismo
4 (EST2, EST14, EST20)	Concluimos que la probabilidad de que caiga sello es más alta y la probabilidad de que caiga cara es menos probable (sic)
5 (EST22, EST8, EST34)	Concluimos que sumando las caras tenemos 118 en total, que sumando los sellos tenemos 78 en total. Obteniendo los resultados totales podemos deducir que es más fácil que obtengamos más caras que sellos
6 (EST40, EST9)	Hay más probabilidades de sacar cara que sello. Los puntajes tienen poca ventaja, primero iban de menor a mayor, luego se empataron y después de mayor a menor.
7 (EST1, EST26)	El sello salió mucho más que la cara tal vez por cuestión de suerte o cuando salió sello la fuerza que se imprimía en la moneda hace que salga más continuo el sello, de cada tres lanzamientos que se hacían eran cara y dos eran sello

En cambio manifestaron estar notoriamente sesgados por el enfoque en el resultado aislado (del cual hablaremos más adelante).

<u>Equiprobabilidad</u>

En cuanto a la equiprobabilidad, se puede afirmar que las distribuciones no equiprobables que constantemente fueron presentadas en el aula: (puntajes con dos dados, pimpones, ruletas) favorecieron aparentemente la superación de este sesgo desde la primera socialización:

> DC (22-02-05 p3) Entre todos empezamos a hacer una tabla de datos para mirar los números que más habían salido y pudimos observar que hay números como el 7 que sale más seguido que por ejemplo un número 2, y pudimos deducir que hay distintas maneras de sacar los puntajes por lo que se puede decir que hay números con mayor posibilidad que otros… concluimos que el 7 era el que tenía más posibilidades y el 2 y el 12 son dos que tienen menor posibilidad

Como la probabilidad de ganar en cada uno de los juegos no era igual a la probabilidad de perder, los estudiantes daban cuenta de dichas relaciones, en primera instancia comparando con las posibilidades en el mismo juego para luego comparar la conveniencia en los distintos juegos:

> DC (09-03-05 p19) *Los estudiantes están comparando donde hay más posibilidades de ganar, si se gira una ruleta de 5 regiones tres veces y se adivina un número, o se extrae una terna de pimpones y se apuesta por el color de un pimpón*. EST7 y EST35 dicen que el número de ternas en los pimpones es de 10, y 6 para sacar azul, por lo que la probabilidad es de 0,6; mientras que con la ruleta es de 0,42; ya que son 15 de 35.
> DC (14-03-05 p.23) EST35: Uno como apostador es perjudicado con la ruleta ya que pierde más plata
> EST18: Va a ser más viable los pimpones ya que en la ruleta va ser más complicado por la gran cantidad de posibilidades en la ruleta.
> EST14 dice que en los pimpones es más fácil ya que el espacio muestral es mucho más pequeño…

Podría pensarse entonces que los estudiantes comprenden que, en términos técnicos, entre mayor sea el cardinal del espacio muestral, menor es la probabilidad de un evento. Sin embargo no todos lo conciben así, entre quienes manifestaron sus argumentos hay quienes piensan que existen mayores posibilidades de ganar entre más grande sea el cardinal del espacio muestral:

> DC (14-03-05 p.23) EST8: Es mejor jugar en la ruleta porque hay más posibilidades. EST22 piensa de la misma manera que EST8, a pesar de que los cálculos de probabilidad anteriormente realizados por ella fueron correctos.
> DC (14-03-05 p.22) EST22: Hay 60 posibles ternas en el juego de pimpones; dentro de ellas 36 incluyen el pimpón azul. La ruleta tiene más posibilidades 125 en total.
> DC (14-03-05 p.23) EST22: Es más viable apostar en la ruleta ya que hay más posibilidades

Hallar correctamente la probabilidad en distribuciones no equiprobables no conlleva de manera directa a tomar una posición coherente acerca de la conveniencia en la toma de decisiones, es decir, es importante que se piense en actividades que medien entre uno y otro proceso. Como la conveniencia es una decisión más fácilmente ligada a la intuición, podría comenzarse por ella, para seguir con la matematización de la probabilidad:

La última actividad, cuya distribución es equiprobable, resultó desfavorable para nuestros intereses como docentes, ya que los estudiantes se inclinaron, curiosamente la mayoría, por el sello (Ver cuadro 4), en vez de concluir que no importaba cuál fuera el lado de la moneda que se escogiera, el resultado iba a tender al equilibrio. De esta manera lo mostramos en el siguiente apartado.

Enfoque en el resultado aislado

Con respecto al "Enfoque en el resultado aislado", dadas las actividades de tipo combinatorio orientadas por nosotros, no planteamos con suficiencia actividades que atendieran a la superación de este sesgo, en lugar de esto, la última nos dejó ver que ésta era una heurística marcada por el grupo en general. (Ver cuadro 1)

Es notoria la ausencia de actividades que propicien hacer conciencia de la inconveniencia de la utilización de esta heurística, que también habría podido ser superada al ahondar en el comentario de EST3:

> DC (22-02-05 p4) *Socialización de puntajes que más y menos salían con dos dados.* EST3 dijo que eso no siempre se cumplía ya que el profe cuando jugó con nuestro grupo escogió los números con mayor posibilidad, sin embargo había perdido…

Plantearle al estudiante la posibilidad de seguir apostando con los puntajes con los cuales ganó su grupo, habría llevado probablemente a que aumentarán las situaciones de pérdida respecto a las de ganancia, y por ende, propiciar la reflexión del razonamiento incorrecto que se tiene al asumir como resultados más probables los de un solo juego, , tal y como lo sugirió este estudiante.

Conclusiones acerca de la primera propuesta

1) Las actividades planeadas por nosotros no tuvieron intención de fomentar la superación del enfoque en el resultado aislado, así mismo, la cantidad de preguntas dedicadas a indagar al respecto, en los instrumentos aplicados, son insuficientes para inferir sobre los efectos de la propuesta respecto a este sesgo. Por lo tanto, hay que planear actividades que atiendan a esta necesidad, esto es, promover en los estudiantes el uso de la frecuencia relativa.

2) Las actividades desarrolladas no favorecieron la superación del sesgo de la equiprobabilidad, de hecho hubo un aumento de casi el 5% de estudiantes que manifestaron este sesgo al final del proceso, en comparación con los resultados iniciales; a pesar de la permanente presencia de distribuciones no equiprobables en el aula. En gran medida, el tiempo dedicado correspondió a la aplicación de técnicas de conteo para determinar el cardinal del espacio muestral, y la comparación de favorabilidad entre los eventos no fue lo suficientemente significativa para los estudiantes. En este sentido, las actividades propuestas deben generar mayor cuestionamiento para ellos, más allá de la búsqueda de resultados y medidas de probabilidad.

3) La repetición de experimentos que permitan el cálculo de frecuencias relativas y la comparación de los sucesos que estás aluden, debió haber sido una actividad permanente y no lo fue. Como lo indicamos anteriormente, las actividades se centraron en la aplicación de métodos combinatorios. Esto no solamente no contribuye a la superación del sesgo de representatividad, sino que, según lo observado, propicia que cuando se haga la experiencia, se desarrolle un enfoque en el resultado aislado. Entonces hay que buscar hacer un ejercicio continuo y constante de actividades que permitan la comparación de la probabilidad con la frecuencia relativa de un suceso.

4) Se hace necesario desarrollar procesos de reversibilidad en el aula de matemáticas. A pesar de la efectividad para hallar la probabilidad de un evento, los estudiantes demuestran no ser igualmente efectivos cuando se les indaga por el proceso inverso, es decir, dada una determinada medida, inferir acerca del evento correspondiente a ella. Es decir, hay que generar desde las actividades planteadas, el ejercicio argumentativo en los estudiantes.

Implicaciones para la segunda intervención en el aula

Con base en la reflexión acerca de nuestras acciones en esta primera intervención en el aula, acordamos la ejecución de las siguientes tareas:

Modificar las actividades de aula: A pesar de la contextualización permanente de las situaciones de probabilidad presentadas, es necesario examinar dentro de la dinámica propuesta, situaciones que comprometan en mayor medida el interés y la afectividad de los estudiantes para propiciar reflexiones más profundas a favor de su desarrollo del razonamiento probabilístico. Dentro de las condiciones a tener en cuenta, según las conclusiones presentadas, es necesario generar en mayor medida el uso de la frecuencia relativa, lo que implica proponer actividades, fundamentalmente de experimentación, dentro del aula. Además es importante cuestionar permanentemente a los estudiantes, las actividades deben fomentar en ellos mayor reflexión, en lo que el papel de la pregunta dentro de la situación es protagónico.
Ampliar nuestro referente teórico: Son evidentes nuestras limitaciones en cuanto a la comprensión misma de los sesgos y sus manifestaciones. Tenemos que estudiar con más profundidad los planteamientos de autores reconocidos en el tema, para poder proponer mejores actividades.

Esto nos lleva directamente, en el marco de la Resolución de problemas, a la búsqueda de propuestas didácticas para la enseñanza de la probabilidad, es decir, puntualizar momentos en la Resolución de problemas donde se lleven a cabo actividades pertinentes que se constituyan en posibilidades de aprendizaje de las nociones básicas de probabilidad, de manera que se contribuya a la superación de sesgos en el razonamiento probabilístico.

Replantear nuestro rol en el aula: Debemos darle mayor protagonismo a los estudiantes y permitir en el aula la simulación de varios experimentos acompañados de la continua reflexión por parte de ellos. Esto no quiere decir que dejemos de lado los momentos de institucionalización, pero no hay que precipitarlos. A pesar de que esto implique no abordar algunos conceptos, es importante que el trabajo que se haga sirva para que la gran mayoría de los estudiantes pueda desarrollar un mejor razonamiento probabilístico.

Es importante que se de mayor espacio a la acción y la exploración, las situaciones deben representar retos, problemas que motiven al estudiante a la participación activa en el proceso de solución.

4. ENSEÑANZA DE LA PROBABILIDAD DESDE EL CÁLCULO DE LA FRECUENCIA RELATIVA

Los pronunciamientos sobre Resolución de problemas encontrados, nos llevan a plantear una situación, de la vida real, que sea coherente con las situaciones de acción, formulación, validación e institucionalización planteadas por Brousseau, y que permita la experimentación, el razonamiento, la formalización, y la construcción de mejores instrumentos para un coherente razonamiento probabilístico.

En este sentido, se pretende llevar al estudiante al ejercicio del cálculo de la frecuencia relativa en el marco de la resolución de problemas, sin embargo el grupo de estudiantes con el cual se trabajaría sería distinto.

Decidimos en este segundo momento, no atender a necesidades fundamentales de la institución, sino buscar un grupo en el cual pudiéramos trabajar, comparar y reflexionar simultáneamente sobre lo ocurrido y que además no sintiera irrupción con las temáticas propuestas en el plan de estudios de la institución. Se ajustaban a estas condiciones los grupos correspondientes a grado séptimo: 37 estudiantes entre los 12 y los 14 años, cuyo rendimiento general en matemáticas era bueno a la luz de los resultados académicos obtenidos, acostumbrados a un trabajo no permanente con situaciones problema, sin recibir instrucción formal acerca de la probabilidad.

Para esto se plantean las siguientes actividades:

Actividad 1: Presentación del problema "Casino" (Contextualización)

Duración: 2 horas
Organización: Grupos de tres personas designados por nosotros
Objetivo: Concienciar a los estudiantes de la situación problema a desarrollar, de manera que permita, por iniciativa suya, la permanente repetición de experimentos aleatorios.

Desarrollo de la actividad: Se hablará a los estudiantes respecto a la conveniencia de un casino como negocio. Vamos a montar un casino, pero la idea es que en él existan juegos que sean atractivos para los jugadores, de tal manera que apuesten porque vean que es fácil ganar, pero no tan fácil como para arruinar al casino. Entonces, lo primero que habría que hacer sería sugerir juegos, y lo segundo responder a la siguiente pregunta: ¿De qué manera pruebo que mi juego sí es conveniente para el casino?[5]

Actividad 2: Evaluación de posibilidades ¿Cuántas posibilidades hay?, ¿Qué sale más? (Acción)

Duración: *2 horas*
Objetivo: Inducir a los estudiantes a la repetición de experimentos, como base para establecer algunas conclusiones respecto a los fenómenos aleatorios.

[5] Anticipándonos a la posibilidad de que alguien dijera simplemente que en su juego hay más posibilidades de perder que de ganar (principio de probabilidades), nosotros haríamos el siguiente cuestionamiento: ¿Cómo sé que efectivamente porque haya más posibilidades de perder, el jugador no va a ganar más veces? Es claro, nuestra intención es inducirlos a la experimentación.

Desarrollo de la actividad: Esperando que los estudiantes vean la necesidad de jugar para solucionar el cuestionamiento inicial y probar que su juego es conveniente para el casino, los estudiantes sacarán las primeras conclusiones basados en su experiencia: qué puntajes salen más, cuáles menos ¿Por qué?[6]

Actividad 3: Predicciones y puntuaciones (Formulación)

Duración: *4 horas*
Objetivo: Estimular en los estudiantes la intención de confirmar hipótesis mediante la experimentación.

Desarrollo de la actividad: Los estudiantes tratarán de adivinar qué va a pasar antes de realizar las correspondientes experimentaciones. Para confirmar sus creencias los estudiantes deberán registrar datos que posteriormente serán la base para examinar frecuencias relativas y longitudes de rachas.

Actividad 4: Análisis de experimentos aleatorios (Formulación)

Duración: *4 horas*
Objetivo: Aproximar a los estudiantes al cálculo de frecuencias relativas y su consecuente tendencia a la medida de probabilidad.

Desarrollo de la actividad: Los estudiantes compararán los resultados que obtienen en sus experimentos al hacer 5, 10, 20, 30, 50 y 100 lanzamientos, con base en los registros ya realizados. La intención es cuestionarlos hasta hacerlos conscientes de la importancia de establecer frecuencias relativas. Posteriormente se cuestionará a los estudiantes sobre la magnitud de la misma a medida que se incrementa la cantidad de experimentos: ¿Es mayor?, ¿Es menor? ¿Tiende a algún valor?

Actividad 5: Exposiciones (Validación)

Duración: *4 horas*
Objetivo: Propiciar en el aula un espacio para que los estudiantes dialoguen y pongan de manifiesto sus ideas respecto a las actividades desarrolladas, estableciendo con ellas algunos principios de probabilidad.

Desarrollo de la actividad: Los estudiantes expondrán su trabajo, y tendrán en cuenta los planteamientos enunciados en las exposiciones anteriores. Será fundamental y decisiva nuestra intervención con el propósito de llevar a cabo el proceso de institucionalización.

Actividad 6: Eventos no equiprobables (Institucionalización)

Objetivo: Reflexionar con los estudiantes acerca de la ocurrencia de eventos aleatorios en contextos no equiprobables

Desarrollo de la actividad: De acuerdo con los juegos sugeridos por los estudiantes, se propondrán situaciones desde las cuales se genere una distribución probabilística no uniforme, por ejemplo, en el evento de que un grupo haya escogido el lanzamiento de un dado como experimento, se propondrá que evalúe la frecuencia relativa en el lanzamiento de dos dados, de igual manera con ruletas y otros. De esta manera los estudiantes examinarán que características en los fenómenos aleatorios se mantienen y cuales se modifican a propósito de la nueva situación

[6] A partir de este momento el docente será un tutor en cada uno de los grupos, pasando por cada uno de ellos, indagando y cuestionando para motivar la argumentación y por ende el ejercicio de su razonamiento, en este contexto: probabilísitico.

Efecto de las actividades en el proceso de superación de sesgos

Representatividad.

La dinámica propuesta por nosotros, en la cual los estudiantes debían hacer varias repeticiones de su experimento para sacar conclusiones acerca de la favorabilidad del juego para los intereses del casino, trajo consigo implicaciones satisfactorias en lo que tiene que ver con no fiarse de las muestras pequeñas para tomar una decisión. Algunos grupos para los cuales menos de cinco repeticiones eran suficientes para decir cuál era el evento de mayor probabilidad cambiaron de posición en la medida que incrementaba la frecuencia acumulada de su juego:

> (A2 09-08-05[7])PROF: ¿Qué es eso? ¡Cuéntame!
> EST: Lo que nosotros hicimos fue el naranja, el azul repite y el rojo.
> EST: Hicimos unas pruebas y vimos más el azul.
> PROF. ¿Lo que más sale es el azul?
> EST: Sí, señor!
> PROF: Y en azul repite.
> ¿Cuántas veces lo hicieron?
> EST 1: Lo hicimos cinco veces.
> PROF: ¿Creen que con cinco ya es suficiente?
> EST: No
> PROF: ¿Por qué no?
> EST: Porque son tres colores.
> PROF: Y el que más salió fue el azul o sea que ustedes piensan que si se hace diez veces va a salir más el azul todavía?
> ESTS: SÍ
> PROF: Miren a ver

Momentos más tarde:

> (A2 09-08-05)EST: Hicimos una estadística a varias personas y nos habíamos equivocado en la naranja salía nueve veces, en el azul ocho y luego el rojo salía seis.
> En conclusión hay más posibilidades de sacar el naranja o sea ganar, a sacar el azul volver a sacarlo o el rojo que es perder.
> PROF: O sea que sale más el naranja, antes decían que el más era el azul ahora más el naranja.
> PROF: O sea que si siguen lanzando más veces va a salir más el naranja.
> EST: Pues sí… pero igual eso va a seguir variando.
> PROF: Y entonces, cual es la gran conclusión.
> EST: Va a ir variando entre cada color.
> PROF: O sea que eso depende de las veces que quede y si lanzo veinte veces qué va a pasar? Si saco papelito veinte veces.

Esta fue una ventaja que se presentó en la dinámica de aula, gracias a que la mayoría de los eventos trabajados en ella fueron simples y equiprobables. Permitió además que los estudiantes manifestaran en sus trabajos que pocas repeticiones no eran suficientes para decidir qué eventos tenían mayor probabilidad de ocurrir:

> C8.8[8]: Juego de ruleta de 24 casillas con igual área) "¿Con pocas repeticiones se puede hacer la idea de lo que va a suceder? Creemos que no se puede porque se necesita de más lanzamientos para llegar a una conclusión correcta…"

Y efectivamente repetir varias veces un experimento, los lleva a tomar posiciones y a expresar la inconveniencia de quedarse con lo ocurrido en muestras pequeñas:

---

[7] Este código hace referencia a: casete de audio (A), el número del casete (2), y la fecha de la grabación: 9 de agosto de 2005.
[8] C8.8: Quiere decir carpeta 8, página 8. Se extraen algunas de las afirmaciones que los estudiantes incluyen en sus capetas de trabajo en el Anexo 6 (Carpetas de los estudiantes 701 Momento 2).

> EST 17: Este grupo está conformado por EST16, EST17 y EST 18. Nuestro juego consta de tres colores, tres pelotas diferentes y de una bolsita.
> La pelota azul es la ganadora. Hay tres colores la azul, amarilla y roja. La roja y la amarilla son de perder y la azul es de ganar.
> La probabilidad de ganar depende de la cantidad de pelotas ganadoras y de cada color.
> El casino tiene más probabilidades de ganar que de perder nosotros encuestamos cuarenta y tres personas, trece sacaron pelota azul, trece también sacaron amarilla y rojas fueron diecisiete, el casino gana.
> Necesitamos un voluntario para que vean que el casino va a ganar.
> PROF: ¿Cuántas bolas hay?
> EST 17: Hay cinco amarillas, dos rojas y tres azules.
> PROF: Pero ¿Con qué bolas jugaron?
> EST 17: Con una amarilla, una azul y una roja obtuvimos treinta, en las cuales ganó el casino y trece ganaron las personas. Fue más el <u>porcentaje</u> de ganancia para el casino.
> PROF: Miremos los resultados. En los primeros lanzamientos va perdiendo el casino, luego se iguala y después comienza a ganar el casino.
> EST 6: Además mirando los resultados, ellos comienzan a ganar pero es posible que venga un jugador afortunado y pierdan, entonces no se pueden confiar de eso.
> EST 16: Pero si usted ha visto esos señores que le dicen a uno meta la mano y saque una balota, ellos nunca van a meter más balotas del color ganador.
> EST 6: Ese no es el caso de su juego. Ahí hay las mismas posibilidades de ganar que de perder.
> EST 16: No, hay dos posibilidades de perder y una de ganar.
> EST 11: Sí, o sea que si la gente juega poco el casino va a perder más.

La pregunta aquí es: ¿43 es cardinal para una muestra que se pueda considerar grande? He aquí una desventaja: no poder hacer comparaciones con los resultados obtenidos por otros grupos, ya que cada uno escogió un juego diferente. Aunque algunos grupos tomaron muestras más grandes de 100 y hasta 300, esto no se constituye en una respuesta a este interrogante. Si todos los grupos hubieran trabajado en la misma situación se habría podido hacer una comparación de los resultados acumulados y tomar una muestra, incluso, más grande que 1000 en cardinal.

<u>Equiprobabilidad.</u>

Como la mayoría de situaciones fueron equiprobables, no había asimetría en la distribución probabilística[9]. Así, se pudieron apreciar en los trabajos manifestaciones como la siguiente:

> C1.6: (Juego de la ruleta: 2 casillas de igual área) "Los resultados que salieron son: 1: 48 veces, 2: 40 veces. O sea que el número 1 es el que salió más veces. Esto puede pasar pero el 2 también puede tener probabilidades de que salga y nosotros no nos inclinamos en ninguno porque sabíamos que podía salir cualquiera de las dos…

La pregunta al respecto es: ¿Por qué los estudiantes piensan que puede ocurrir cualquiera de los eventos, porque las distribuciones son equiprobables o porque están sesgados?

En primera instancia, por los argumentos presentados en diálogo con un grupo de estudiantes, se podría pensar que el sesgo es evidente:

> (A4: 18-08-05) (Diálogo con EST 6, 7 y 8. Lanzamiento con un dado)
> ESTUDIANTE 7: Al jugar 100 veces descubrimos que el 20% nos salio el 1, el 19 el 2%, el 18 el 3% …el 5 el 19%, el 6 nos salió el 14%.
> Al hacer una tabla donde comparemos que el casino esté ganando y perdiendo, descubrimos que al jugar poquitas veces el casino va perder, digamos acá jugamos una vez y el casino perdió, tenemos el 60% perdido y el otro 40% estamos ganando...Pero prácticamente al jugar muchas veces hemos comprobado de que mas del 50% hemos ganado y el otro pues hemos perdido.
> PROF: ¿Qué más del 50% han ganado? ¿Quién?

---

[9] Como lo dijimos anteriormente, nuestra pretensión era trabajar con distribuciones asimétricas luego de hacerlo con las de igual probabilidad, pero desafortunadamente, razones institucionales, de cumplimiento con el currículo preestablecido, nos obligaron a acelerar el cierre de la actividad.

EST 7: Nosotros el casino.
PROF: ¿Cuánto más ha ganado?
EST 6: ¡Eh! 55 ha estado entre el 50 y 70%
PROF: Entre el 50 y el 70%
EST 6: Cuando jugamos las 100 veces, y salieron 20 veces el uno eso quiere decir que un 80% gana el casino y el 20 esta ganando la persona
PROF: ¿Como que salio 20 veces el uno, luego solamente se gana con el uno?
EST 7: ¡No! ¡No! No es que la persona tiene que decir el numero, 20 personas dijeron el número o sea 20 personas les salio 20 veces.
No son 20 personas ¡no! Son más
PROF: Que tienen que decir al respecto con lo que los resultados sean tan cercanos
EST 7: Desde que ahí esta comprobado que al jugar varias veces, pues podemos ganar mas de lo esperado
PROF: No yo estoy preguntando de los resultados cercanos
EST 6: Coincidencia
PROF: O sea solo coincidencia y no más, o sea que si yo juego 200 veces, es posible que me salga 50 veces un numero, y que se yo 10 veces otro?
¿Por qué ustedes me dicen que es coincidencia?
EST 6: Entonces, ¿qué más puede ser?,
PROF: Pues eso depende de las preguntas que ustedes se hagan.

Aquí la manifestación es clara. En otras palabras, se podría pensar que el pensamiento de los estudiantes es: "*Esto fue lo que ocurrió, pero pudo haber ocurrido cualquier cosa".* Y la situación en estudio (lanzamiento con un dado) no favorecía la ocurrencia de algún particular evento. Sin embargo, la situación proponía una comparación en situaciones de ganancia y pérdida. Es decir, sugería que los estudiantes no solo compararan las frecuencias de los eventos, sino la conveniencia para el casino. A favor de la intención de superar este sesgo, en una de las carpetas encontramos la siguiente manifestación:

> C8.1: (Juego de ruleta, 24 casillas con igual área) "Si nos pusiéramos a pensar el casino tendría más posibilidades de ganar que el apostador porque al haber más divisiones, hay menos posibilidades de que caiga el número apostado…"

Era importante que tanto estudiantes como nosotros, no perdiéramos de vista el contexto, en el momento de observar el fenómeno aleatorio, así se presentaba la asimetría en la distribución, nuestro medio para superar la equiprobabilidad. Entonces insistir en hacer los cuestionamientos respecto a los eventos de ganancia y pérdida fue conveniente para este propósito. Así lo muestran los siguientes diálogos en dos momentos distintos de la actividad:

(A2 09-08-05): (El profesor indaga a los estudiantes acerca de lo que han observado al jugar varias veces. En este grupo el juego consiste en sacar una balota azul de un grupo de tres, una roja y una amarilla)
PROF: ¿Qué han visto?
EST 18: Que es más difícil ganar que perder.
PROF: ¿Por qué creen que es más difícil ganar?
EST 16: Porque solo hay una posibilidad de ganar o perder.
PROF: ¿Y con cuál se gana?
EST 17: Con la azul.
PROF: O sea que es más difícil que salga la azul. ¿Cual es la que más sale?
EST 18: La roja y la amarilla.
PROF: ¿Cuál de las dos sale más la roja o la amarilla?
EST 18: La roja.

(A4: 18-08-05) (Diálogo con estudiantes 19, 20 y 21)
EST 20: El jugador tiene que adivinar dónde está la tapa después de mover tres vasos.
EST 20: Que en cada uno de los juegos nosotros escribamos el 50% ganado y el 50% de los tiros de los jugadores, si me entiende o sea creíamos 50% ganadas y 50% perdidas. Pero entonces aquí los resultados dicen lo contrario, porque de 10 tiros que significan el 100%, 70% fueron perdidas y el 30% fueron ganadas, entonces ahí vamos bien, estamos beneficiando al casino. A los 20 tiros, el 60% fue pérdida y el 40% ganó, o sea que de nuevo se ha beneficiado al casino. A los 40 tiros, el 60,2% fueron las veces que perdió y el 39, 8 fueron las veces que ganó el jugador, entonces se ve beneficiado el casino.

> A los 60 tiros el 60,3% fueron perdidas y el 36,7% fueron las veces ganadas, de nuevo beneficia al casino. A los 80 tiros el 53,74% fue ganancia para el casino y el 46,25% fueron las veces que ganaron los jugadores o el jugador, entonces ahí beneficia al casino, hay muy poca cantidad pero eso esta beneficiando al casino. Y a los 100 tiros el 57% fueron las veces perdidas y el 43% ganadas, entonces ahí se está beneficiando al casino.
> PROF: ¿Qué conclusión sacaron?
> EST: Podríamos decir que el juego de nosotros estaría beneficiando al casino…

Más que el espacio muestral del juego, fue el contexto, la situación problema la que propició este tipo de argumentos, correspondientes a la superación de la equiprobabilidad.

Otra situación de conveniencia al respecto, se dio gracias a que un grupo de estudiantes construyó una ruleta con regiones desiguales. Lo que geométricamente y en atención a la simetría podría considerarse un error, llevó a conclusiones que evidencian manifestaciones de superación de este sesgo:

> (A2 09-08-05) EST 5: Es que los números que más nos han salido son el ocho y el cuatro y los que menos nos han salido son el uno y el cinco.
> Si miramos la ruleta cada uno va en diagonal, si miramos por ejemplo el ocho y aquí el cinco en los lanzamientos que hemos hecho.
> PROF: Pero si se dan cuenta que el ocho y el cuatro son más grandes que el resto de números.
> EST 5: Sí
> PROF: …Bueno ese cartoncito está muy bueno porque ahí pueden concluir algo.
> EST 9: Depende del tamaño.

De esta manera hicieron las siguientes manifestaciones en su carpeta de trabajo:

> C4.1-7[10]: (Juego de ruleta, 8 casillas, 2 de ellas con un área mayor que las otras) "En la ruleta el tamaño de cada casilla influye en la cantidad de veces que sale el número. Entre más grande sean las casillas más posibilidad va a haber de que el jugador gane y el casino pierda.… Entonces vamos a realizar otra ruleta con medidas exactas para poder saber la probabilidad… pensamos que cualquier número podía salir las veces que fuera ya que todos los espacios son iguales.

Es decir, este grupo de estudiantes concluyó que el área de las regiones de la ruleta influye en la favorabilidad de que salga un número. Un propósito no previsto por nosotros, pero que sirve como referente para pensar en la posibilidad de sugerir la asimetría, no solo por el contexto de ganancia y pérdida, también como característica propia del (os) juego (s) en estudio.

Enfoque en el resultado aislado.

Para superar este sesgo se propuso que los estudiantes compararan permanentemente los resultados que obtenían al jugar. Mirar qué pasaba a las 5, a las 10, a las 15… 100 repeticiones del juego fue una tarea que se propuso en las últimas sesiones. El hecho de que los fenómenos en estudio fueran equiprobables, favoreció que los estudiantes no se dejaran llevar por los resultados que obtuvieron:

> C1.6: (Juego de la ruleta: 2 casillas de igual área, lanzamientos) "Los resultados que salieron son: 1: 48 veces, 2: 40 veces. O sea que el número 1 es el que salió más veces. Esto puede pasar pero el 2 también puede tener probabilidades de que salga y nosotros no nos inclinamos en ninguno porque sabíamos que podía salir cualquiera de las dos…".

Lo que ese grupo afirma podría interpretarse como sesgo de equiprobabilidad, pero las condiciones de la situación nos muestra esta deducción no como sesgo, sino como una característica del fenómeno que los estudiantes están describiendo. Pero la propuesta sugería analizar el contexto ganancia-pérdida para el casino, como lo hizo el siguiente grupo en su trabajo:

---

[10] Carpeta 4, páginas de la 1 a la 7

> C8.7: (Juego de ruleta, 24 casillas con igual área) “Lo único que concluimos es que el juego asegura que siempre va a ganar porque en todos los porcentajes lo demuestra, y que a medida que juega más el porcentaje del juego va bajando más…”

De esta forma, el decir que el porcentaje del juego va bajando, es una expresión que se puede interpretar como: Las frecuencias relativas no son tan altas como en el comienzo para algunos puntajes, pero también corre con el riesgo de que los estudiantes piensen que no va a estabilizarse en un punto sino que va a llegar a ser cero. Esto fue lo que expresaron algunos estudiantes al referirse a lo que habían observado en su juego, no fue disminución sino aumento exacerbado de los porcentajes de ocurrencia de un evento:

> (A4: 18-08-05) (El profesor dialoga con EST 31, 32 Y 33)
> PROF: ¿Qué pasó?
> EST: Pues ya sacamos las conclusiones
> PROF: ¿El juego cuantas posibilidades tiene? Dos de que pierda y una de que gane, ¿cuándo jugaron 3 veces que pasó?
> EST 33: Cuando jugamos 3 veces había una persona ganando y las otras 2 perdieron
> PROF: ¿Cuando jugaron 10 veces?
> EST 31: Ahí si fueron 5 y 5
> PROF: ¿Si y en 20?
> EST 32: 8 y 12
> PROF: 8 y 12 ¿qué porcentaje les dio?
> EST 31: 40% o sea que el casino es el que más ha ganado
> PROF: Sí. Pero miren los números, este 76 acá bajo va 66 acá sube a 78.
> ¿Qué ven ustedes ahí?
> EST 32: Que el casino está comenzando a ganar a corto y a largo plazo, entre más juegue más va perdiendo el casino
> PROF: Más va ganando el casino
> EST 32: más va ganando el casino
> PROF: ¿O sea que hay una posibilidad de un momento a que llegue al 90%?
> EST 33: Sí, si continuamos jugando
> PROF: ¿Si continuamos jugando llegamos al 90%? Eso hay que comprobarlo, y hay que seguir mirando datos, esa es la única forma de aprender. Jugando y analizando, jugando y sacando conclusiones, porque ahí tienen unos números bien interesantes, pero si solamente los dejo como para presentar un informe pues yo no voy aprender, ya están ahí si ustedes siguen pensando un poco más lo que están haciendo sacan una muy buena conclusión, pero hay que pensarlo.
>
> (A5: 25-08-05): *(Los estudiantes sacan sus deducciones a partir de unos resultados en el juego de ruleta que muestran que un porcentaje que se incrementa entre los dos y los quince lanzamientos a favor de las ganancias del casino)*
> PROF: Hay 8 casillas de las 8 con una se gana, con las otras 7 si cae cualquier otro resultado se pierde… Entonces de acuerdo a eso ellos sacaron un porcentaje que es el 12.5% de ganancia para el jugador entonces gana el jugador y 87.5% para el casino esto es lo que supuestamente pasaría 80 para el casino 20 para el jugador acá 50 para el jugador 50 para el casino
> EST 41: o sea entre menos lanzamientos el casino gana más, si porque mira en la primera ronda hay 80% y acá ya es 50 y 50 y acá ya es 54 y ahí seria menos
> PROF: o sea que tu piensas que va haber un momento donde sea 20 para el casino y 80 para el jugador
> EST 41: Sí señor.

Estos son enfoques en el resultado aislado, en tanto que los resultados en muestras pequeñas los llevó a deducir que la frecuencia de ganancia para el casino va a ser cada vez mayor. Para solucionar esta situación, hubiera sido conveniente que los estudiantes compararan sus resultados con lo obtenido por otros grupos, que no fue posible porque cada grupo estudio su propio juego. En este caso, los estudiantes sacaron una conclusión apresurada sobre lo que obtuvieron, lo cual no fue una manifestación general.

Sin embargo, también encontramos estudiantes que observaron como los resultados al principio eran distintos a los obtenidos luego de jugar varias veces, y así propusieron que no hay que confiarse de lo que se pueda manifestar al principio:

> (A5 25-08-05) EST 6: Además mirando los resultados, ellos comienzan a ganar pero es posible que venga un jugador afortunado y pierdan, entonces no se pueden confiar de eso.

Precaución que mantuvieron algunos, incluso en el caso de la ruleta con dos casillas más grandes que las otras, en la cual se indagó acerca de qué podría ocurrir si la ruleta era girada una vez. Un estudiante manifestó sin titubear que se obtendría uno de los dos puntajes que correspondían a las casillas de área mayor, mientras que otros dos no respondieron así. Uno de ellos expresó que en un solo giro podría suceder cualquier cosa.

> (A3: 12-08-05) (El profesor le pregunta a sus estudiantes sobre qué va a pasar ya que la ruleta tiene dos casillas más grandes que las otras. De quince repeticiones estas dos casillas tuvieron mayor frecuencia que las demás)
> Los de mayores resultados fueron los del cuatro y el ocho que sumados dan seis de quince con respecto a los otros ¿Sí o no?
> Les pregunto si yo giro la ruleta una sola vez qué número me puede salir?
> A ver… responda EST 28.
> EST 28: Cuatro y ocho
> PROF: ¿EST 40?
> EST 40: No sé
> PROF: ¿EST 7?
> EST 7: Cualquiera de los ocho.
> PROF: Cualquiera de los ocho dice EST 7. ¿Por qué cualquiera EST 7?
> EST 7: En un solo lanzamiento puede pasar cualquier cosa.

Y no se trata solamente de obtener muestras "grandes", aunque grande es un adjetivo muy relativo en tanto no hay una cantidad que lo defina, sino de hacer comparaciones de los resultados que se van obteniendo, como lo propusimos nosotros. Quienes no lo hicieron, también hicieron deducciones equivocadas a la luz de la teoría de probabilidad:

> Diálogo con estudiantes 16, 17 y 18 (Grupo de las balotas de colores.)
> (A4: 18-08-05)EST 18: Nosotros concluimos que en el primer round el porcentaje que el jugador gane va hacer de 66,6, en el segundo round ya bajó a 33,3. En el tercer round siguió igual el porcentaje, En el cuarto y quinto round no va ganar nada el jugador.
> PROF: ¿Por qué no va a ganar nada el jugador?
> EST 18: Por lo que habíamos hablado en la clase de las exposiciones, que entre más juegue el jugador, más va a perder. En el round 1 ganó, en el 2 y 3 ya bajó a la mitad y en el 4 y 5 ya empezó a perder.
> PROF : Es que ustedes están hablando de los rounds por separado, lo que hay que hacer es tener en cuenta los resultados anteriores para mirar el cambio, por eso yo les decía no se pongan a mirar quién gana, quién pierde, sino cuantas veces sale la pelota, ahí se puede mirar alguna variación con respecto a eso, porque si no los resultados les van a dar muy diferentes y no se van a dar cuenta de un comportamiento, que sea parecido o algo así, no, así como le dio 33,3 acá le puede volver a dar 0 aquí.
> Porque esto no depende de lo que dio acá, ¿si me entiende? Entonces ese trabajo hay que replantearlo.

A diferencia de los estudiantes que hicieron las comparaciones progresivas, quienes intuyeron que la estabilidad en las frecuencias relativas era una característica del fenómeno a medida que se incrementaba el número de repeticiones:

> (A4: 18-08-05) (Diálogo con estudiantes 19, 20 y 21)
> EST 20: El jugador tiene que adivinar dónde está la tapa después de mover tres vasos.
> EST 20: Que en cada uno de los juegos nosotros escribamos el 50% ganado y el 50% de los tiros de los jugadores, si me entiende o sea creíamos 50% ganadas y 50% perdidas. Pero entonces aquí los resultados dicen lo contrario, porque de 10 tiros que significan el 100%, 70% fueron perdidas y el 30% fueron ganadas, entonces ahí vamos bien, estamos beneficiando al casino. A los 20 tiros, el 60% fue pérdida y el 40% ganó, o sea que de nuevo se ha beneficiado al casino. A los 40 tiros, el 60,2% fueron las veces que perdió y el 39, 8 fueron las veces que ganó el jugador, entonces se ve beneficiado el casino.
> A los 60 tiros el 60,3% fueron perdidas y el 36,7% fueron las veces ganadas, de nuevo beneficia al casino. A los 80 tiros el 53,74% fue ganancia para el casino y el 46,25% fueron las veces que ganaron los jugadores o el jugador, entonces ahí beneficia al casino, hay muy poca cantidad pero eso esta beneficiando al casino. Y a los 100 tiros el 57% fueron las veces perdidas y el 43% ganadas, entonces ahí se está beneficiando al casino.

PROF: ¿Qué conclusión sacaron?
EST: Podríamos decir que el juego de nosotros estaría beneficiando al casino… También podemos concluir con estos resultados es que el casino gana, pero pierde, digámoslo así porque aquí el resultado empieza como a bajar, en cambio este si se mantiene estable y este baja, pasa de 70 y después vamos a ganar 60, con los resultados que están acá, pero mas que todo esto es como una suposición porque nosotros tampoco es que vayamos a hacer 100 tiros en un día.
PROF: Bueno yo creo que esos resultados se pueden pensar mucho más, mucho, mucho más, porque miren no solamente mirar que de aquí ganan, sino que aquí se mantiene como estable y luego comienza a bajar, eso nos da como un acercamiento de qué es lo que puede pasar, que puede pasar en el futuro, será que se mantiene ese 57, será que no.
EST 20: Lo mas probable es que este entre 53 y 57. Es como una aproximación que uno tiene.

Pero esta situación nos lleva a pensar un poco más. Miremos como los estudiantes antes de experimentar pensaban que la probabilidad de ganancia y de perdida iba a ser del 50%, esto no corresponde con la regla de Laplace, puesto que la probabilidad debería ser de 33% de pérdida para el casino y 66% de ganancia. ¿No sería conveniente proponer en el aula situaciones que favorezcan la utilización de la regla de Laplace para que después sea contrastada con la frecuencia relativa? De hecho, lo que los estudiantes concluyen no es correcto en la misma medida (estabilidad de ganancia para el casino entre el 53 y el 57%), y fue una conclusión que sacaron de la misma experiencia.

De nuevo aparece el interrogante: ¿100 es un número suficientemente grande?, ¿Podría ser menor?, ¿Tendría que ser mayor? ¿Cuánto?. Tal vez, si los estudiantes tuvieran conciencia de la aplicación de la probabilidad a partir de técnicas de conteo, podrían decidir. Esta es una hipótesis a tener en cuenta en un próximo momento.

Conclusiones acerca de la segunda propuesta

1) La situación problema permitió que desde la frecuencia relativa los estudiantes se acercaran a la medida de probabilidad de un evento. Sin embargo, el hecho de que cada grupo trabajara en juegos distintos, llevó a que no se pudiera hacer comparaciones con los resultados obtenidos por otros grupos, por lo cual, la mayoría de estudiantes no llegó a una cantidad de repeticiones de su juego mayor que la centena. Este hecho se constituyó en desventaja para la superación del sesgo de la representatividad porque a pesar de que los estudiantes manifestaron la inconveniencia de fiarse de muestras pequeñas, no establecieron una medida de probabilidad para cada uno de los sucesos del espacio muestral planteado. En consecuencia y según los resultados de los instrumentos aplicados, los estudiantes mejoraron en dar argumentos que dan cuenta de la superación de este sesgo (antes había un porcentaje de 45,05 de estudiantes sesgados según argumentos y luego de la evaluación bajó a un 29,7%), pero desmejoraron en el hecho de que su respuesta fuese evidencia de éste (hubo un incremento del 47,4 al 54,8%).

2) El hecho de que todos los juegos propuestos por los estudiantes fueran equiprobables no favoreció la superación del sesgo de la equiprobabilidad, es más, fue el sesgo de más alta presencia en los resultados de diagnóstico y de finalización de proceso (50,9 y 55,2% respectivamente). Sin embargo, analizar las circunstancias de ganancia y pérdida de cada uno de los juegos, exigió al estudiante argumentar a favor de su propuesta, ejercicio argumentativo que llevó a mejores resultados en cuanto a las evidencias de este sesgo en relación con los argumentos, (de un 43,9% inicial el porcentaje bajó a un 14,6).

3) La situación problema favoreció la superación del enfoque en el resultado aislado en la medida que los estudiantes no se dejaron llevar por resultados que aventajaban un suceso por encima de otros, se dieron cuenta como este fenómeno ocurría cuando las muestras eran pequeñas, pero que las frecuencias relativas tendían a estabilizarse cuando la cantidad de repeticiones de sus experimentos era mayor. Sin embargo, insistimos en que no calcular una medida de probabilidad específica, lleva a que los estudiantes den respuestas que podrían interpretarse como evidencia de este sesgo, , pero no sus argumentos. (En cuanto a argumentos, el porcentaje de estudiantes que manifiestan este sesgo bajó de 32,2% a 20,02%).

4) En general, la dinámica de aula propuesta favoreció la superación de sesgos en el razonamiento probabilístico. Evidencia de esto es que el porcentaje de argumentos presentados por los estudiantes como manifestación de cada uno de los tres sesgos bajó notablemente comparando los resultados de diagnóstico y finalización de

proceso. Pero las respuestas presentadas por ellos aluden a que hay que hacer algunas modificaciones a la actividad, que permitan el acercamiento de los estudiantes al cálculo de probabilidad. De hecho insistimos que en más de una ocasión, el cálculo de la frecuencia relativa no se generó como una necesidad generada por ellos mismos y éste es uno de los aspectos que en la siguiente aplicación se debe contemplar.

Implicaciones para la tercera intervención en el aula

Con base en las apreciaciones citadas anteriormente, acordamos la realización de las siguientes tareas para el tercer momento de la investigación.

Ampliar nuestro referente teórico: A pesar de haber consultado más acerca de la Resolución de problemas y acercarnos a las exigencias de una situación didáctica para la enseñanza de la probabilidad, es importante volver sobre la resolución de problemas, entre otras cosas porque es nuestro objeto de estudio y porque teniendo la intención de plantear situaciones significativas a los estudiantes, es fundamental buscar otras fuentes que atienda esta necesidad.

Además, existe una inquietud que nos lleva a acudir a la historia de la probabilidad, ésta es: ¿Cómo fue que la frecuencia relativa se constituyó en instrumento para medir la probabilidad? Interrogante del que subyacen otros: ¿Fue la frecuencia relativa posterior o a anterior a la Regla de Laplace?, ¿Hay situaciones que favorecen la frecuencia relativa y otras que favorecen la combinación?, ó, ¿todas son susceptibles de ambas aproximaciones? Esto nos va a llevar a plantear una situación, que generé en el resolutor la necesidad o no del cálculo de la frecuencia relativa y que en esa medida sea más significativa que la anterior.

Modificar la situación problema: Además de las pretensiones para la situación anteriormente expuestas, queremos esta vez respetar la dinámica que los estudiantes propongan, es decir, plantear una secuencia de actividades que permita al estudiante exigirse cada vez más en su avance, desarrollar un razonamiento probabilístico cada vez menos sesgado y profundizar en las nociones básicas de probabilidad, conservando algunas características de la situación que se propuso para el segundo momento. Las fases de la secuencia van a ser desarrolladas al ritmo de trabajo del estudiante, es decir, cuando el estudiante termina una guía, se le entrega la otra para que la desarrolle, pero todas tendrán que estar enmarcadas en la misma situación problema.

5. UNA PROPUESTA DE APERTURA A LOS DOS ENFOQUES DE PROBABILIDAD (EL CLÁSICO Y EL EXPERIMENTAL)

En este momento no laboramos en la institución inicialmente mencionada (I.E. Compartir Bochica), así que la propuesta se implementa en la Institución Educativa Distrital Manuel del Socorro Rodríguez, lugar de trabajo de uno de nosotros. Ésta es una institución pública, ubicada al sur de la ciudad de Bogotá. Tiene 50 años dedicados a la enseñanza primaria y solo 5 a la secundaria. Sus estudiantes pertenecen a los estratos socio-económicos más bajos.

De nuevo se trabaja con grado séptimo. Son alumnos que nunca han tenido una clase de probabilidad y que estuvieron de acuerdo con hacer parte de esta investigación.

En este momento, tenemos claro que hay que personalizar aún más el trabajo con los estudiantes. Conscientes de la imposibilidad de dedicarnos al trabajo individual, decidimos que luego de conformar unos grupos de trabajo[11], llevaríamos el ritmo que cada uno de ellos propusiera .

La situación inicial, que consideramos podría resolverse desde los dos enfoques de probabilidad, es la siguiente:

[11] El criterio de selección fue conformar equipos de trabajo heterogéneos: estudiantes de buen desempeño académico, con estudiantes de no tan buenos resultados.

LOS CASINOS Y EL NÚMERO 7
Un casino es un lugar donde la gente apuesta su dinero en alguno (s) de los juegos que se encuentran en él: el póker, la ruleta, la hípica electrónica. También en uno muy conocido por nosotros: los dados. La mecánica de este juego es muy sencilla: El jugador lanza dos dados, si obtiene como puntaje el número 7 gana. Más allá de la costumbre: ¿Por qué los casinos han escogido este puntaje y no otros para motivar a apostar en el juego? ¿Cuántas veces tiene que jugar un apostador para ganar de manera segura? Si tuvieras la oportunidad de que las reglas del juego cambien ¿Qué reglas cambiarían? ¿Crees que los apostadores tendrían el mismo interés en jugar? ¿El casino ganaría lo mismo?

Como lo esperábamos, algunos estudiantes decidieron lanzar los dados y hacer sus conjeturas, que iban transformando según los interrogantes que nosotros hacíamos y que obligaban a nuevos lanzamientos y otras mediciones. Otros estudiantes decidieron listar las posibilidades y posteriormente contrastar las hipótesis que se pudieron generar a partir de esta lista con la experimentación. A continuación describimos los momentos más importantes para efectos de la investigación:

Efecto de la situación problema en el proceso de superación de sesgos

Representatividad.

La situación problema favoreció la superación de este sesgo, en tanto que proponía que se establecieran comparaciones de datos desde el enfoque frecuentista, y una posterior contrastación de las razones de probabilidad con la experimentación, para quienes habían escogido el enfoque clásico. Si los estudiantes se dejaban llevar solo por lo que ellos habían experimentado, es posible que esta sea una muestra no significativa y por ende, no movilizaría las iniciales creencias de los estudiantes. Pero la dinámica de comparación de los resultados permitió a los estudiantes cambiar su posición respecto a por qué los casinos escogían el número 7:

> C3.1 El 7 no es tan posible que caiga, por eso los casinos escogieron ese número. Es un poco difícil que caiga el 7. Para mí, yo cambiaría ese número

En otro momento de la actividad:

> C3.3 Yo escogería el número 7 para apostar porque es el número que a la mayoría le salió.

Exigía que los estudiantes no se quedaran solamente con lo que habían obtenido en los 10 primeros lanzamientos:

> C10.1 Cambiaría el número que tiene que salir, por uno que salga más seguido, que es el 4 en esta ocasión (10 tiros)

En el caso anterior, el estudiante toma la decisión de cambiar el puntaje a conveniencia del apostador, por lo que él obtuvo al lanzar 10 veces. La mayoría de los estudiantes que decidió incrementar el número de lanzamientos, se dio cuenta que el puntaje de mayor frecuencia era distinto al de los 10 primeros, y también que en la mayoría de los casos fue el 7:

> C9.1 Yo tire diez veces y el número que más me salió frente a los otros fue el 10… Ya lo comprobé, lancé más y el número que más me salió fue el 7

Pero esta debe ser una dinámica acompañada por la reiterada comparación. Para algunos 20 es una cantidad suficiente para tomar decisiones, para otros no. Lo importante es orientar al estudiante para que genere acciones como la siguiente:

> C2.2 El porcentaje de 7 fue el siguiente: a los 10 tiros el 30%, a los 30, el 16,66%, a los 60 el 20% y a los 100 el 18%

Aquí, no hubiese sido tan productivo que el estudiante hiciera los 100 lanzamientos y calculara la frecuencia relativa del puntaje 7. Esta acción induciría, como veremos más adelante, al enfoque en el resultado aislado. Para evitar esto, es necesario sugerir al estudiante la dinámica de variación en la frecuencia relativa. Proponer el encuentro con una función, donde la variable independiente es la cantidad de lanzamientos, y la dependiente, la frecuencia relativa. Así, el estudiante tendrá la capacidad para evaluar en qué momento una muestra se puede considerar representativa (cuando tiende a estabilizarse la frecuencia relativa).

Equiprobabilidad.

Para superar este sesgo, era necesario que el estudiante interiorizara la situación, que fuera realmente un cuestionamiento de interés saber qué tenía de especial el No 7. De otra manera, sería lo mismo escoger 7 u otro número:

> C5.7 El 7 es un número común y corriente… no hay ninguna diferencia entre el 7, el 12 o el 6. Son números comunes y corrientes.
> C6.1 Escogen el 7 porque de pronto es el más fácil o el más difícil de sacar

No fueron muchos los estudiantes que se quedaron con esta forma de razonar. El cuestionar permanentemente, insistir en movilizar al estudiante de esta primera creencia es fundamental para combatir el sesgo de la equiprobabilidad. Esta heurística comienza a superarse en la situación después de examinar las posibilidades de ocurrencia del 7 en relación con los demás puntajes. Es ahí donde deja de ser lo mismo sacar 7 que algún otro puntaje, por ser el de la mayor cantidad de posibilidades en relación con los demás:

> (A5 05-04-06) EST 8: Entonces en el caso de siete serían el 6 y 1, 5 y 2, 4 y 3, 1 y 6, 2y 5, 3 y 4. Ahí tenemos la seis primeras posibilidades y sumando las otras 30 posibilidades nos darían las 36 posibilidades entonces esas son nuestras posibilidades de ganar en el casino.

De esta manera se muestra en el siguiente modelo tabular, seguido por los estudiantes que decidieron hacer la comparación de posibilidades existentes:

Cuadro 2. Comparación de posibilidades existentes en el lanzamiento de 2 dados

PUNTAJE	POSIBILIDADES	CANTIDAD	RAZÓN
2	(1,1)	1	1/36
3	(1,2); (2,1)[12]	2	2/36
4	(1,3); (2,2); (3,1)	3	3/36
5	(1,4); (2,3); (3,2); (4,1)	4	4/36
6	(1,5); (2,4); (3,3); (4,2); (5,1)	5	5/36
7	(1,6); (2,5); (3,4); (4,3) (5,2); (6,1)	6	6/36
8	(2,6); (3,5); (4,4); (5,3); (6,2)	5	5/36
9	(3,6); (4,5); (5,4); (6,3)	4	4/36
10	(4,6); (5,5); (6,4)	3	3/36
11	(5,6); (6,5)	2	2/36
12	(6,6)	1	1/36

[12] La mayoría de los estudiantes consideraron (1,2) y (2,1) como el mismo evento. Algunos cambiaron su posición después de dialogar con el profesor. Ver C12.1, C1.2, C13.1, C18.1, C19.1

En este momento 7 deja de ser lo mismo que 12, 3 o 4; no tiene la misma probabilidad.Pero también deja de ser igual que los demás después de haber realizado una tabla de datos. Ésta permitió comparar los resultados personales con los de los demás[13]:

(C14.2):

Cuadro 3. Resultados personales al lanzar los dos dados

NOMBRE	# TIRADAS	# SALIÓ	CUÁNTAS VECES
EST 2	20	7	10
EST 36	12	3	3
EST 3	10	10	2
EST 12	11	9	2
EST 22	41	5	13
EST 24	36	7	7
EST 15	7	7	2

La mayoría de los estudiantes concluyó que 7 fue el puntaje que más le salió a sus compañeros, por tal motivo, tenía diferencia en relación con los demás.

Podemos observar que la distribución no equiprobable propuesta en la situación generó acciones de superación del sesgo de equiprobabilidad. No obstante, la misma situación sugería una perspectiva no equiprobable al exigir comparaciones de ganancia para el casino y ganancia para el jugador. De esta manera fue escuchada en más de una ocasión la siguiente conclusión:

> (A5 05-04-06) EST 8: ...Entonces aunque el siete es el de mayor posibilidades no hay que olvidar que el otro también tiene posibilidades, si a uno le sale el dos el tres el 4 el cinco el 6 el ocho el 9 el 10 el 11 y el 12 pierde y si juntamos todas ésas posibilidades nos saldrían 30/36 lo que significa una gran ventaja para el casino.
>
> (A5 05-04-06) EST 7: …Yo llegué a la conclusión de que la gente gana pero finalmente el casino gana mucho más, sino que el casino incita a la gente a jugar.
>
> C2.2-3 El casino se quedaría con la mayor parte de lo apostado
>
> C9.3 El casino escogió este número porque comprobándolo, el 7 es el número que más cae, y de acuerdo a esto el jugador gana y se motiva, y al casino le conviene que el jugador vuelva
>
> C14.1 Los casinos escogen el 7 porque la gente se entusiasma, porque gana, pero cuando se dan cuenta, los casinos es más lo que ganan y menos lo que pierden.

Esta evidencia es para nosotros una muestra de que la situación que propicia la superación del sesgo de la equiprobabilidad.

Enfoque en el resultado aislado.

La primera, y pregunta eje de la actividad ¿Por qué el casino escoge el 7 para que gane el jugador?, por la forma de trabajo que los estudiantes estaban acostumbrados a llevar, tuvo en principio respuestas causales, que tenían que ver con mitos y creencias de buena y mala suerte. Evidencia clara de este sesgo:

> (A1 28-03-06) EST 7: Profe mire la primera, era el por qué escogieron el 7, y yo siempre he escuchado que el 7 es el numero de suerte y pues la gente se entusiasma más porque es el de la suerte y por eso lo escogen.

---

[13] Varios estudiantes siguieron este modelo tabular, la mayoría de ellos concluyeron que el 7 era el puntaje que más había salido. Ver C17.3, C13.3, C10.4, C9.2, C8.3, C7.2, C6.4, C5.5, C3.4

> C8.6 Se escoge 7 porque cuando se hacen apuestas uno siempre dice 7 porque es el número de días, el número de mares, y así la gente se entusiasma.

> C5.1 Es un número emocionante porque es un número bonito, tal vez el número da ánimo de jugar y es uno de los intermedios

La situación no incitaba de manera directa a que los estudiantes realizaran lanzamientos o conteo de posibilidades, por lo cual era válido desde ellos apoyarse en las creencias para argumentar al respecto.

Con las orientaciones pertinentes, los estudiantes decidieron utilizar los dados para responder esta pregunta. Sin embargo, en principio no vieron la necesidad de hacer varios lanzamientos, sino que con los primeros resultados hicieron inferencias al respecto.

> (A2 30-03-06) (La pregunta es: ¿Te parece el 7 un buen número para jugar?)
> EST 34: No, porque puse el 6 ya que fue el que más me salió
> PROFESOR: ¿El 6 fue el que más te salió, ¿Cuántas veces te salió el 6?
> EST 34: 3
> PROFESOR: 3 de cuántas
> EST 34: De 10 veces
> PROFESOR: Y solamente lanzaste 10 veces y te salio 3 veces el 6.
> EST 34: Sí
> C4.3 De 21 personas obtuvieron el 7 ocho personas… ganaría pero perdería más de lo que ganó

No decía cuántos lanzamientos había que hacer, de nuevo nos enfrentamos a la pregunta ¿Cuál es un número suficientemente grande para ser considerado como cardinal del espacio muestral? En esta situación, a diferencia de la anterior, estaba previsto que los estudiantes pudieran hacer comparaciones de los resultados que obtenían, lo que todavía no había hecho este estudiante:

> C10.1 Cambiaría el número que tiene que salir, por uno que salga más seguido, que es el 4 en esta ocasión (10 tiros)

A diferencia de la dinámica de aula propuesta en el momento anterior, aquí era posible que el estudiante viera que los resultados obtenidos diferían de lo que habían encontrado los demás, de esta manera cuestionarse respecto a lo que el había planteado inicialmente.

> C3.1 El 7 no es tan posible que caiga, por eso los casinos escogieron ese número. Es un poco difícil que caiga el 7. Para mí, yo cambiaría ese número

En otro momento de la actividad:

> C3.3 Yo escogería el número 7 para apostar porque es el número que a la mayoría le salió.

También hay que decir al respecto que algunos estudiantes se quedaron con el 7 porque fue el que más les salió. A nuestro juicio, muestra un enfoque en el resultado aislado, en la medida que no hay variación del porcentaje, no hay comparación de datos:

> C11.2 Yo escogería el número 7 para apostar, porque en 20 tiros el 50% fue el número 7 que más me salió. El casino escoge el 7 para jugar porque es el número más fácil de sacar

Es decir, el hecho de que la frecuencia relativa sea variable, no un cálculo determinado, es un factor determinante para examinar si los argumentos de los estudiantes son consecuencias de enfoques en resultados aislados o no:

> C2.1 Después de lanzar las 100 veces me di cuenta da algo: a los 30 tiros el 7 solo llevaba 3 tiros, y el 3 llevaba 9 tiros. Cuando lancé 20 veces, el 7 se emparejó con el 9, 8 y 6, pero a los 60 tiros rebasa a los otro.

Esta acción lleva justamente a no aislar el resultado, sino a ponerlo a variar en distintos momentos, insistimos, fundamental para la superación de este sesgo.

CONCLUSIONES ACERCA DE LA TERCERA PROPUESTA

1) La situación problema propuesta fue favorable para la superación del sesgo de la representatividad, puesto que permitió que los estudiantes no hicieran deducciones de lo ocurrido en muestras pequeñas. Llevó a que los estudiantes cambiaran sus iniciales creencias y concluyeran que la probabilidad tiende a estabilizarse a medida que la cantidad de repeticiones de un experimento se incrementa. Evidencia de esto son los resultados de la evaluación final que muestran un notable mejoramiento en relación con la evaluación inicial en tanto bajó el índice de argumentos correspondientes al sesgo de la representatividad después del desarrollo de la situación problema (De 69,4 a 40%).

2) El espacio muestral no equiprobable planteado en la situación problema llevó a que los estudiantes, desde los dos enfoques de la probabilidad se dieran cuenta rápidamente que hay eventos con mayor posibilidad que otros . Aunque los resultados de la evaluación final no dan cuenta de una mejoría de los argumentos al respecto, cabe anotar que éste es el sesgo de más baja presencia en los estudiantes (10%).

3) La situación problema favoreció la superación del enfoque en el resultado aislado, en tanto incitó a la comparación de los resultados obtenidos con cantidades distintas de lanzamientos. Fue evidente la variación en las frecuencias relativas de los puntajes, que, en general, no llevó al siete como puntaje de mayor frecuencia en los primeros diez lanzamientos , pero que notablemente incrementaba su índice de ocurrencia cuando se hacía mayor la cantidad de lanzamientos. Los resultados de la evaluación avalan este hecho dado que el índice de argumentos que muestran este sesgó bajó casi un 12% luego de desarrollada la dinámica propuesta.

4) En general, la dinámica de aula propuesta favoreció la superación de sesgos en el razonamiento probabilísitico. Evidencia de esto es que el porcentaje de argumentos presentados por los estudiantes como manifestación de cada uno de los tres sesgos bajó notablemente comparando los resultados de diagnóstico y finalización de proceso . En relación con las respuestas presentadas por ellos, no hay mayor movimiento, porque aunque hubo bastante ejercicio en materia argumentativa, fue poco el tiempo dedicado a la institucionalización, fase a la que se llegó durante la actividad, pero que no coincidió con la dinámica de muchos estudiantes que aún no llegaban a esta etapa en el desarrollo de la situación.

IMPLICACIONES PARA UNA PRÓXIMA INTERVENCIÓN EN EL AULA

Con base en las apreciaciones citadas anteriormente, sugerimos las siguientes recomendaciones para una próxima intervención en el aula:

Ampliar el referente teórico. Acudir a la teoría debe ser un ejercicio permanente en la medida que la educación matemática está en movimiento y diariamente se hacen nuevos pronunciamientos al respecto de la enseñanza de las matemáticas. Además, en coherencia con los referentes teóricos expuestos, nuestro rol es el de estudiantes aventajados; no sólo es necesario acudir a las investigaciones en educación matemática, sino a la matemática misma, en actitud epistemológica para ganar en comprensión y facilitar a los estudiantes los instrumentos que van a propiciar en ellos la construcción de conceptos –probabilísticos en este caso-.

Adaptar la situación problema a las necesidades de los estudiantes. La propuesta del contexto "casino" fue válida porque los estudiantes se mostraron interesados en el tema. Sin embargo, es posible que en otra población o en otras condiciones, este contexto no sea atrayente, por lo que no sería conveniente su aplicación. Sin embargo, mantener la bifurcación de enfoques para abordar la probabilidad en una misma situación, es conveniente en la medida que muestra a los estudiantes que la matemática no tiene un solo camino para ser abordada, que la coherencia argumentativa es la columna vertebral de la validez en esta ciencia.

Replantear la institucionalización del saber como fase común a todos los estudiantes. Las aclaraciones que se exponen en este momento por parte del maestro, no son comprensibles del todo para todos. Es decir, los estudiantes que mantienen la dinámica propuesta por el profesor llegan a comprender en gran medida lo que en este momento se expone, pero los demás, como aún no han llegado, no logran comprender algunos enunciados que allí se manifiestan. Por lo tanto, creemos que la institucionalización del saber debe.

6. CONCLUSIONES GENERALES

Sobre las condiciones para el trabajo de aula

Con base en las experiencias de aula realizadas para la superación de sesgos en el razonamiento probabilístico de los estudiantes de secundaria, además de las condiciones inicialmente señaladas (Ver p. 2, MEN, 1997, p.69), se hace necesario tener en cuenta dentro de la Resolución de problemas:

1) La búsqueda de un problema en el contexto aleatorio que sea propio del interés de los estudiantes, no solo el juego y la experimentación descontextualizada, una situación que lleve a la interiorización permanente, al debate, a la movilización de iniciales creencias. En ese sentido, más que el simple juego de dados, la situación que se propone en el tercer momento de investigación es pertinente porque lleva a que se planteen hipótesis sobre el funcionamiento del casino y permite al resolutor evaluar la conveniencia de participar en él. Además en relación con cada uno de los sesgos:

- No se resuelve con resultados basados en una cantidad mínima de repeticiones de un determinado experimento: Condición necesaria para la superación del sesgo de la representatividad.
- Propone un espacio muestral no equiprobable: Condición relevante a propósito de la superación del sesgo de la equiprobabilidad.
- Lleva a la necesidad de la comparación permanente de la frecuencia relativa para cardinales distintos del espacio muestral: Con lo cual se supera un posible enfoque en el resultado aislado.

2) La permeabilidad de la situación a la apertura de los dos enfoques de la probabilidad –el clásico y el frecuencial-, donde es el estudiante quien decide la conveniencia de la utilización de uno u otro, a partir de la manera como decida abordarla.

3) La posibilidad de una dinámica de aula donde el estudiante se apropia de la situación y la desarrolla de acuerdo con sus necesidades. De esta manera la institucionalización del saber será una fase relativa al proceso de cada estudiante, y solo cuando él llegué a esta instancia estará en facultad de socializar y recibir la orientación pertinente para asimilar los conceptos que son propuestos desde la situación problema.

Sobre la secuencia de actividades

Después de haber concertado el contexto con los estudiantes, y si para ellos resulta ser interesante, más que proponer una secuencia de actividades , sugerimos que se plantee una situación problema y se desarrolle bajo unos principios de aprovechamiento, tanto para los estudiantes como para el docente, que pueda ser desarrollada respetando las diferencias en los procesos de aprendizaje, sino de manera individual, por grupos de estudiantes con características similares.

BIBLIOGRAFÍA

AGUDELO, A.C. (1995). Mejorando el currículo nacional de matemática en Colombia: “Matemáticas para todos”. En: Educación Matemática Vol. 7 No. 2. GEI.

ÁLVAREZ, O; BARBOZA, J; BERTEL, J; CANOLE, Y; RAMÍREZ, S; TOVAR, J; & VÁSQUEZ, V. (2001). Las situaciones problema, un dinamizador para el trabajo de aula orientado al desarrollo de competencias comunicativas en matemáticas (Monografía de Especialización). Universidad Distrital-Universidad de Sucre.

BATANERO, C; GODINO, J & NAVARRO-PELAYO, (1994). Razonamiento Combinatorio. Madrid: Síntesis.

BISHOP, A. (2005). Aproximación sociocultural a la educación matemática. Cali. Universidad del Valle: Instituto de educación y pedagogía.

BROUSSEAU, G. (1986). Fondements et méthodes de la didactique des mathematiques. En: Recherches en Didactique des mathemátiques, Vol. 7, n.2, pp. 33-115

CANAVOS, G. (1988). Probabilidad y estadística: aplicaciones y métodos. Mc Graw Hill. México.

CHARNAY**,** R. (1994). Aprender (por medio de) la Resolución de Problemas, Capitulo III. Didáctica de las Matemáticas. Buenos Aires: Paidos

ELLIOTT, Jhon.(1994) Traducido por MANZANO, Pablo. La investigación-acción en investigación. Madrid. MORATA.

GODINO, J. D., BATANERO, C. y CANIZARES, M. J. (1987). Azar y probabilidad. Fundamentos didácticos y propuestas curriculares. Madrid: Síntesis.

HACKING, I. (1995). El surgimiento de la probabilidad. Barcelona: Gedisa

HADLEY, G. 1967. Introduction to probability and statistical decision theory. Editorial Holden- Day, Inc.USA.

Ley 115: General de Educación (1994). Colombia.

M.E.N. (1997). Lineamientos Curriculares en matemáticas. Bogotá: Magisterio

__________. (2003). Estándares Básicos de Calidad Para el área de matemáticas. Bogotá. Ministerio de Educación Nacional.

POMES, J. (1991). La metodología de resolución de problemas y el desarrollo cognitivo: Un punto de vista postpiagetiano. En: Enseñanza de las ciencias. Vol. 9(1).

POLYA, G. (2002). ¿Cómo plantear y resolver problemas? México: Trillas

SANTOS, L. (2002). Problematizar el estudio de las matemáticas: un aspecto esencial en la organización del currículum y en el aprendizaje de los estudiantes. Memorias Seminario Nacional: Formación de Docentes sobre el Uso de Nuevas Tecnologías en el Aula de Matemáticas. MEN. Bogotá.

STENHOUSE, L. (1991). Investigación y desarrollo del currículo. Madrid: Morata.

SERRANO, L. (1996). Significados institucionales y personales de objetos matemáticos ligados a la aproximación frecuencial de la enseñanza de la probabilidad (Tesis doctoral). Universidad de Granada. España.

SPIEGEL, SCHILLER & SNIRIVASAN, (2001). Probabilidad y estadística. México. Schaun

VERGNAUD, G. (1990). Teoría de los campos conceptuales. En: Recherches en Didactique des Mathematiques, Vol. 16.