

ANÁLISIS DE LA CONCEPTUALIZACIÓN DE LA FUNCIÓN EXPONENCIAL EN LA ESCUELA SECUNDARIA MEDIANTE EL USO DE LA TEORIA DE LOS CAMPOS CONCEPTUALES

Rolando Cortopasso¹; Patricia Sureda²; Otero María Rita²

¹Escuela de Educación Secundaria de la Provincia de Bs. As.

²Núcleo de Investigación en Educación en Ciencia y Tecnología (NIECyT).
Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires (UNICEN). Consejo
Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET).

rolocortopasso@hotmail.com, psureda@exa.unicen.edu.ar

Resumen

Este trabajo se enmarca en el análisis de la conceptualización de un grupo de alumnos cuando estudian las funciones exponenciales, mediante una secuencia diseñada en torno a cinco sistemas de representación (SR). La secuencia originalmente propuesta por Sureda y Otero (2013) fue adaptada e implementada en un quinto año de una Escuela Secundaria (ES) de Mar del Plata. Aquí, se describe la organización de la secuencia y se mencionan las diferencias con la original, se describe la conceptualización de los alumnos a partir de los cinco niveles propuestos por Sureda y Otero (2013) y se realizan algunas conclusiones.

Palabras clave: Conceptualización, Enseñanza, Funciones exponenciales, Escuela Secundaria.

Abstrac

This work is part of the analysis of the conceptualization of a group of students when they study the exponential functions through a sequence designed around five systems of representation (SR). The sequence originally proposed by Sureda and Otero (2013) was adapted and implemented in a fifth year of High School (HS) of Mar del Plata. Here, we describe the organization of the sequence and its differences with the original, we describe the conceptualization of students using the five levels proposed by Sureda and Otero (2013), and made some conclusions.

1. Introducción

En el trabajo se retoma una secuencia de doce situaciones diseñada, implementada y analizada por Sureda y Otero (2013), en el marco de la Teoría de los Campos Conceptuales, para la enseñanza de las funciones exponenciales en la ES. Se rediseñaron algunas de las situaciones, y junto con cuatro conjuntos de ejercicios, una síntesis y una evaluación, se implementaron en un quinto año de una escuela secundaria semiprivada de Mar del Plata. El nuevo diseño intenta profundizar en el estudio de cuestiones vinculadas a las transacciones financieras, a fin de ampliar la tarea escolar hacia cuestiones sociales un poco más reales. Para la implementación se consensuó con los alumnos una forma de estudio nueva. Los alumnos trabajarían en forma grupal, en grupos compuestos de cuatro integrantes, lo cual permitirá el intercambio de opiniones y la validación de una solución común. El docente le entregaba a cada alumno una situación para ser resuelta y ellos debían realizar la actividad en forma individual, a su vez podrían apoyarse en sus compañeros, discutir y consensuar con ellos una posible solución a la tarea, luego un integrante de cada grupo expondría lo resuelto y se analizaría cada solución. Esta forma de trabajo permite acceder a las primeras

estrategias de los alumnos, a fin de poder analizar la conceptualización a lo largo de las 12 situaciones.

2. Marco teórico

La Teoría de los Campos Conceptuales (TCC) afirma que un concepto está compuesto por un triplete de tres conjuntos, $C = (S, I, R)$ donde: S es el conjunto de situaciones que dan sentido al concepto; I es el conjunto de invariantes (objetos, propiedades y relaciones) sobre las cuales reposa la operacionalidad del concepto, un conjunto de invariantes que pueden ser reconocidos y usados por los sujetos para analizar y dominar las situaciones del primer conjunto; R es un conjunto de representaciones simbólicas (lenguaje natural, gráficos y diagramas, sentencias formales, etc.) que pueden ser usadas para indicar y representar esos invariantes y, consecuentemente, representar las situaciones y los procedimientos para lidiar con ellas.

El esquema es juntamente con el concepto de situación uno de los más importantes de la TCC, debido a que son los esquemas quienes se adaptan a las situaciones. Los esquemas se acomodan a las situaciones pues se relacionan con las características de las situaciones a las cuales se aplican y son funcionales a estas. Los invariantes operatorios forman la parte más epistémica del esquema, la que tiene la función de identificar y reconocer los objetos, sus propiedades, sus relaciones, y sus transformaciones. La función principal de los invariantes operatorios es tomar y seleccionar la información pertinente, e inferir luego, las consecuencias útiles para la acción, el control y la toma de información. Por definición, un concepto en acto es una categoría pertinente, y como tal no es susceptible de verdad o falsedad, sino solamente de la pertinencia o de la no pertinencia. En cambio, un teorema en acto es una proposición tenida por verdadera en la actividad. La relación entre teoremas y conceptos es dialéctica, en el sentido que no hay teorema sin conceptos y no hay concepto sin teorema. Finalmente, un *campo conceptual* es un conjunto de situaciones, conceptos y teoremas. Así, el campo conceptual de las funciones exponenciales es a la vez, el conjunto de las situaciones cuyo tratamiento implica una o más funciones exponenciales, y el conjunto de conceptos y teoremas que permiten analizar estas situaciones como tareas matemáticas. Por esto, el conjunto de situaciones (S) fue diseñada teniendo en cuenta más de un sistema de representación (R), y el análisis de las situaciones se hace justamente a partir de los invariantes operatorios (I).

3. Metodología

Se recogieron las respuestas de los 22 alumnos a cada situación y se escanearon. Las situaciones requerían acciones en los siguientes sistemas de representación: **SR Numérico (SRN)**: refiere tanto a las tablas como a los cálculos con números. **SR algebraico (SRA)**: involucra aquellos procedimientos algebraicos en los que los parámetros están inicializados. Por ejemplo, $2.5^x = 3$. **SR Algebraico de primer orden (SRA1)**: refiere únicamente a los procedimientos algebraicos en los que los parámetros no están inicializados. Por ejemplo, $a.b^x = c$. **SR Gráfico (SRG)**: refiere a la construcción gráfica en ejes cartesianos. **SR Verbal Escrito (SRVE)**: son las formas lingüísticas escritas, afirmaciones, conclusiones, etc.

A partir de las respuestas en cada SR se analizaron e infirieron los TA que estarían guiando las acciones de los estudiantes al formular la respuesta en cada sistema y se los clasificó según los cinco niveles de conceptualización propuestos por Sureda y Otero (2013):

Nivel	Indicador
Lineal	Respuesta lineal en todos los sistemas de representación.
Parcialmente no lineal	Respuesta no lineal en por lo menos un sistema de representación.
No lineal	Respuesta no lineal en todos los sistemas de representación.
Parcialmente exponencial	Respuesta exponencial en por lo menos un sistema de representación.
Exponencial	Respuesta exponencial en todos los sistemas de representación.

Tabla 1: Descripción de los niveles presentes en la conceptualización de la función exponencial.

Por ejemplo, se clasifica cómo Parcialmente Exponencial la respuesta del alumno A8 a la situación 5 (figura 2 y 3) debido a que en el Sistema de Representación Numérico (SRN), calcula el porcentaje de aumento para la primer hora 7,5, y lo va suma a la cantidad de bacterias iniciales (figura 3).

Situación 5

En un laboratorio, están experimentando con una población de bacterias. Se observa que, al reproducirse, la masa de la población aumenta 15% cada hora. En un principio el cultivo de bacterias tiene una masa de 50g.

- Construye una tabla en la que se pueda observar la variación del cultivo cada hora, para las primeras 20 horas.
- ¿Podrías dar una expresión que te permita calcular que masa tendrá el cultivo en una hora cualquiera? Analiza también el dominio de validez y la imagen para que sea función.
- Representa la función gráficamente. ¿Qué función es?

Figura 2: Situación 5.

Así, para el mes 1 obtiene $50 + 7,5 = 57,5$, para el mes 2 calcula $(57,5 \cdot 0,15) = 8,62$ y lo suma al valor anterior $57,5 + 8,62 = 66,12$ bacterias, y repite el proceso para las 20 horas solicitadas. Luego, en el SR Algebraico 1 escribe adecuadamente la expresión algebraica del modelo. Mientras que en el sistema de representación Grafico (SRG) dibuja una recta, y luego en el Sistema de Representación Verbal Escrito (SRVE) afirma que es una función lineal.

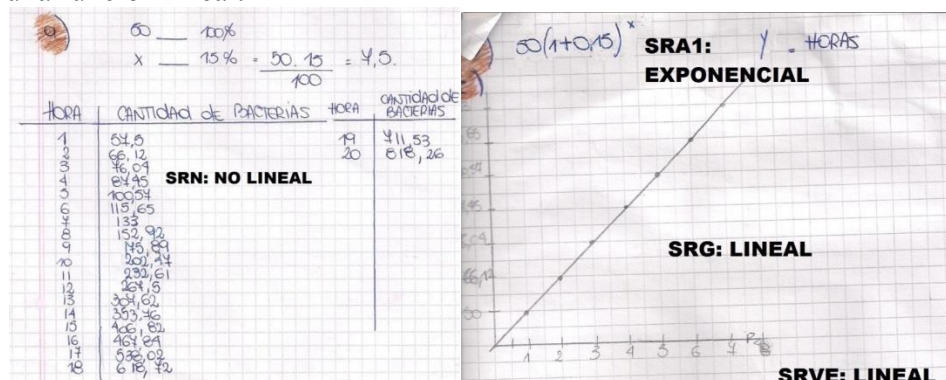


Figura 3: Resolución parcialmente exponencial de A8.

El conjunto de teoremas en Acto (TA) que estarían guiando las acciones de los alumnos en cada SR serían los siguientes:

SRN	TAN: Las bacterias aumentan una proporción de la cantidad anterior.	NL
-----	---	----

SRA1	TAA: La fórmula que permite calcular el aumento es: $50 \cdot (1 + 0,15)^x$	E
SRG	TAG: La gráfica que muestra la variación es una recta.	L
SRVE	TAVE: La función es una función lineal.	L

Tabla 2: Teoremas en Acto de una resolución parcialmente exponencial.

4. Propuesta y Análisis de datos

La secuencia rediseñada (Figura 1) comienza con la pregunta Q_0 : ¿Cuál es el mejor plan de ahorro para generar la mayor cantidad de ingresos usando plazo fijo? Esta pregunta, tomada de Donvito, Sureda y Otero (2013), se enmarca en el interés que tienen los alumnos por ahorrar dinero para su viaje de egresados, pero dar respuesta a Q_0 implica conocer la respuesta a preguntas como $Q_{0,1}$, $Q_{0,2}$, etc. Así, una vez que los alumnos recabaron información sobre tasas de interés, tipos de capitalizaciones, tipos de plazos fijos, etc., y se discutieron los respectivos términos financieros se les entregó la situación 2. Cabe aclarar que al momento que se les entrega esta nueva situación los alumnos no habían dado respuesta a la pregunta Q_0 formulada en la situación 1, pues ésta no es una pregunta que pueda contestarse en una sola clase, ya que requiere del estudio de una red de conceptos financieros y matemáticos.

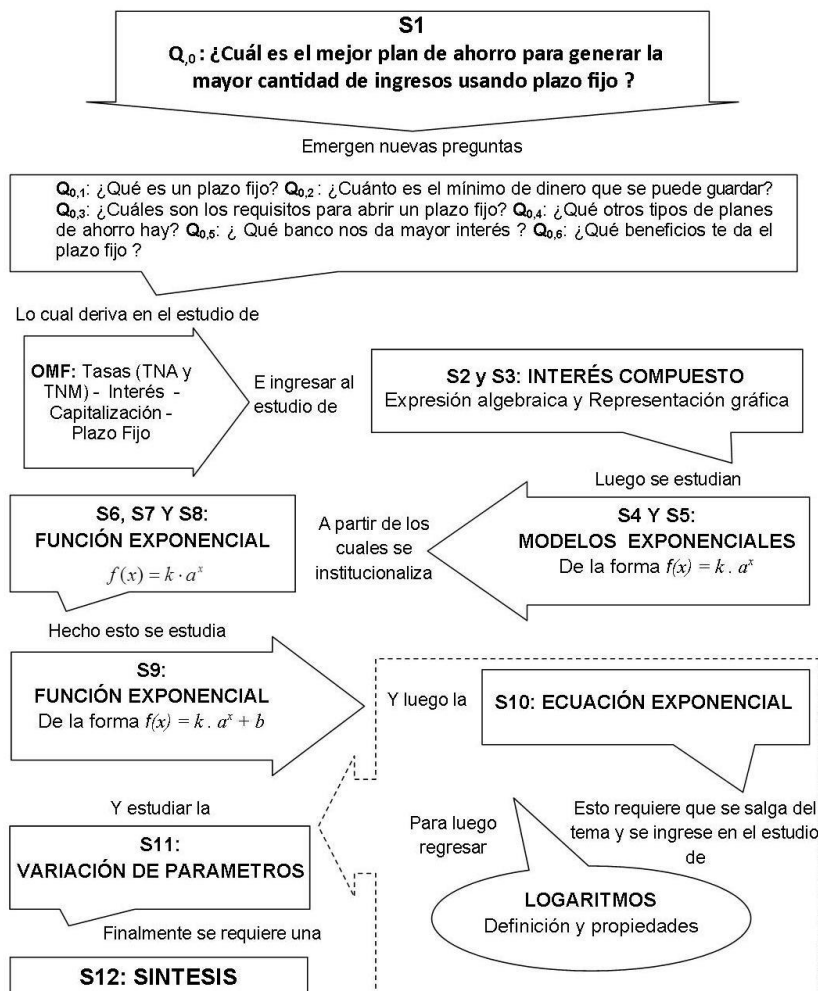


Figura 4: Organización de la secuencia propuesta.

Las situaciones 2 y 3, a diferencia de las propuestas por Sureda y Otero (2013) que evitan el análisis de los diferentes tipos de tasas, retoma las ideas formuladas en Donvito et. al. (2013) e introduce la TNA en las formulaciones, aunque sin la apertura que éste le dio. Las situaciones 4 y 5 refieren a la reproducción de amebas y bacterias

respectivamente, y evitan el problema del contagio de la gripe A propuesto por Sureda y Otero (2013) en la situación 4, debido a que el modelo exponencial solicitado por éstas da cuenta de los infectados cada hora, en lugar de los infectados totales por hora. La búsqueda de una fórmula que les proporcione la cantidad total de infectados por hora, había sido uno de los elementos que estorbó la conceptualización (Sureda, 2012). Finalmente, esta secuencia requiere que para completar el estudio de las ecuaciones exponenciales se “salga del tema”, y se ingrese al estudio de los logaritmos (figura 1). Así, de las trece situaciones que componen la investigación hay seis (situaciones 2, 3, 4, 5, 7, 8) que estaban destinadas a la modelización de la función exponencial, y en las cuales nos vamos a centrar en este trabajo; tres destinadas a la generalización (situaciones 6,9 y 9 bis), y dos de síntesis (situaciones 11 y 12).

En la tabla 3 se clasificaron las respuestas de los alumnos a las situaciones propuestas según los niveles mencionados en la tabla 1. En la primera columna se ubicaron las situaciones analizadas, en la anteúltima la cantidad de alumnos ausentes el día que se implementó la situación y desde la columna dos a la sexta los niveles de conceptualización descriptos en la tabla 1.

S	L	PNL	NL	PE	E	A
2	9	8	-	-	-	5
3	-	7	15	-	-	-
4	-	-	-	17	3	2
5	1	2	-	15	2	2
7	1	-	-	11	6	4
8	-	-	-	2	16	4

Tabla 3: Muestra el progreso de la conceptualización que va desde los totalmente lineales (L) a los exponenciales (E); a medida que se avanza en el estudio de la secuencia.

En las dos primeras situaciones referidas al interés compuesto las respuestas de todos los alumnos se corresponden con esquemas lineales o parcialmente lineales. Esto sugiere que al principio de la secuencia los TA vinculados a la linealidad eran la inicialización más disponible para los estudiantes, esto es normal pues son los esquemas que ellos conocen y dominan.

En la situación tres vinculada a la reproducción de amebas se advierten una progresión de la conceptualización hacia lo no lineal, pero sin llegar aun a construir TA exponenciales en ningún SR, y es recién en la situación cuatro referida a la reproducción de bacterias, que se observan las primeras resoluciones parcialmente exponenciales. Esto evidencia la complejidad que implica la conceptualización de este tipo de variaciones.

Finalmente en las situaciones seis, siete y ocho referidas al estudio de las funciones exponenciales se observa que una gran cantidad de alumno logró construir TA exponenciales en al menos un SR. Así, al igual que en los resultados obtenidos por Sureda y Otero (2014) la clasificación de las respuestas sugiere la existencia de una progresividad en la conceptualización de la función exponencial vinculada a los SR, que va desde los esquemas lineales, hasta los exponenciales.

5. Conclusiones

El análisis confirma los resultados de Sureda y Otero (2014) al mostrar, por una parte la complejidad que implica para los alumnos la variación de la función exponencial, y por

otra parte que aunque existe una progresividad en la conceptualización, ésta es lenta y no ocurre en todos los sistemas de representación de manera simultánea. Pues aun cuando los alumnos pueden resolver un problema en un sistema de representación, no logran hacerlo en otro, aun dentro de la misma situación. Esto se contrapone con la aparente transparencia con la que el grueso de los profesores de matemática introduce un concepto por medio de su definición y luego lo utiliza de forma natural en diferentes SR como si los TA involucrados en cada SR fueran los mismos, cuando no es así. Por lo tanto, sería importante repensar la enseñanza de las funciones en general, y de las funciones exponenciales en particular, a la luz de estos resultados sustentados en la teoría de Vergnaud.

6. Referencias bibliográficas

- Donvito A., Sureda P., y Otero M. R. (2013). *Rei bidisciplinar en tres escuelas secundarias*. En: La Teoría Antropológica de lo Didáctico en el Aula de Matemática. Otero, Fanaro, Corica, Llanos, Sureda y Parra. Editorial Dunken. Buenos Aires.
- Sureda, P., y Otero, M. R. (2014). *La Conceptualización de la función exponencial y los Sistemas de Representación*. En: La Teoría de los Campos Conceptuales Conceptualización en el aula de Matemática y Física. Otero, Fanaro, Sureda, Llanos y Arlego. Editorial Dunken. Buenos Aires.
- Sureda, P., y Otero, M. R. (2013). Estudio sobre el proceso de conceptualización de la función exponencial. *Educación Matemática*, 25(2).
- Sureda, P (2012). “Enseñanza de las Funciones Exponenciales en la escuela secundaria. Aspectos didácticos y cognitivos”. (Tesis de doctorado). Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires. Tandil.
- Vergnaud. G. (1990). La théorie des champs conceptuels. *Récherches en Didactique des Mathématiques*, 10 (23): 133-170.