Consideraciones sobre la enseñanza de la matemática en el ciclo diversificado colombiano[1]

Carlos Eduardo Vasco Uribe
Mary Falk de Losada
Jairo Charris Castañeda (†)
Ricardo Losada Márquez
Universidad Nacional de Colombia[2]

Colombia

Resumen

El documento comienza con un breve análisis del ciclo diversificado en Colombia. Los autores proponen y discuten algunos temas matemáticos sobre lógica y teoría de conjuntos, computación, cálculo, probabilidad y estadísticas que deberían tratarse en dicho nivel educativo.

Palabras clave

Matemáticas, currículo, educación secundaria, ciclo diversificado, lógica, teoría de conjuntos, computación, cálculo, probabilidad y estadística.

Abstract

The paper starts with a brief analysis of the diversified cycle for secondary schools in Colombia. The authors propose and discuss some of the mathematical topics in logic and set theory, computation, calculus, probability and statistics that should be treated in the above-mentioned educational level.

Key words

Mathematics, Curriculum, Secondary Dducation, Diversified cycle, Logic, Set Theory, Computation, Calculus, Probability and Statistics.

---

[1] Publicado en *Educación matemática en las Américas - IV: Informe de la Cuarta conferencia interamericana sobre educación matemática*, Caracas, Venezuela, 1-6 de diciembre de 1975, pp. 97-114. Montevideo: CIAEM-UNESCO-OREALC. Se incluye también una nota introductoria escrita por uno de los autores: Carlos Eduardo Vasco Uribe.

[2] Se ha dejado la referencia institucional que los autores usaron al publicarse por primera vez este trabajo.

Nota introductoria[3]

La *Primera Conferencia Interamericana de Educación Matemática* se llevó a cabo en Bogotá, Colombia, del 4 al 9 de diciembre de 1961. Fue auspiciada por la Comisión Internacional sobre Educación Matemática ICMI y por la Organización de Estados Americanos OEA. A ella asistió un joven estudiante de matemáticas, Ricardo Losada, compañero mío de entonces en algunos cursos con el Dr. Carlo Federici, quien había sido mi director de tesis de pregrado en filosofía de las ciencias. La *Segunda Conferencia* se realizó en Lima, Perú, del 5 al 12 de diciembre de 1966; la *Tercera Conferencia* en Bahía Blanca, Argentina, noviembre de 1972, y la *Cuarta Conferencia* en Caracas, Venezuela, en diciembre de 1975. Allí se presentó este texto que reproducen los *Cuadernos*. La publicación original fue en las memorias del IV CIAEM en Caracas en 1975, citadas arriba.

Fue famosa esa conferencia de Caracas por la presencia de Jean Dieudonné, líder indiscutido del grupo Bourbaki. Su conferencia en francés (publicada en las pp. 39-45 de las mismas memorias del IV CIAEM) era precisamente sobre el mismo tema del documento que sigue: la enseñanza de las matemáticas en las clases superiores de la escuela secundaria y sus relaciones con la enseñanza de las matemáticas en la universidad. Esperábamos una defensa radical de la matemática bourbakista, pero nos sorprendió a todos por su moderación respecto a la axiomática formal y a las demostraciones de teoremas, por su reconocimiento repetido de la necesidad de apoyarse en la intuición, y por su propuesta de centrar la enseñanza de las matemáticas preuniversitarias en tres ideas fundamentales: la idea de aproximación, la de linealidad y la de probabilidad.

Al final de la conferencia, ante una pregunta por la ausencia de la geometría en sus propuestas, Dieudonné proclamó de nuevo, ahora en español, su ya famoso grito “¡Muera Euclides!”, y prometió escribir un texto de geometría sin un solo dibujo. Los lectores atentos del documento que sigue notarán también allí la ausencia de la geometría, pero también de la aritmética y del álgebra, pues se trataba de analizar los cuatro temas nuevos que acababan de aparecer en el programa oficial colombiano de 1974: la “Nueva Matemática”, la computación, la probabilidad y el cálculo diferencial e integral.

La historia de este texto que ahora reproducen los *Cuadernos* empezó tres años antes. Hace 38 años, en 1972, llegué a la Universidad Nacional de Colombia en Bogotá con mi doctorado en matemáticas, con una tesis sobre álgebra abstracta, una de las primeras sobre ese tema con la incipiente álgebra apoyada por computador (CAA). Yo mismo debía escribir los programas con “Assembler” y lenguaje de máquina sobre segmentos de compilación en “Fortran”, para la entonces astronómica memoria del único y enorme computador de la universidad: 64 K.

---

[3] Escrita por uno de los autores: Carlos Eduardo Vasco Uribe, profesor del Doctorado Interinstitucional en Educación, énfasis en Educación Matemática. Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá y Universidad del Valle, Cali, Colombia.

En ese mismo año 1972, el profesor Carlo Federici me invitó a trabajar con él en las primeras investigaciones sobre cambio curricular que se realizaban en Colombia, en el Instituto Colombiano de Pedagogía ICOLPE. Sin tener en cuenta al Instituto, el Ministerio de Educación expidió en 1974, apenas dos semanas antes de comenzar las clases del año escolar, unos nuevos programas para la educación secundaria, cuyos autores se desconocían. Se creía que habían sido algunos miembros de los Cuerpos de Paz del Presidente Kennedy, que habían llegado a Colombia desde 1962 hasta 1978, algunos de los cuales diseñaron los programas para la educación primaria en 1963. En los programas de 1974 aparecía claramente la influencia de las recomendaciones del Comité Interamericano de Educación Matemática CIAEM, fundada por Marshall Stone en 1961 para promover en todo el continente las Matemáticas Modernas o Nueva Matemática ("New Math"): desde sexto grado aparecían la lógica y los conjuntos, en décimo las estructuras algebraicas, en todos los grados aparecía una unidad de probabilidad y estadística, y en el último grado, el undécimo, el cálculo diferencial e integral.

En ese tiempo, ni los profesores universitarios ni los docentes de matemáticas de la secundaria y media pensábamos en repudiar o hacer resistencia a los nuevos programas del Ministerio, proclamados por el Decreto 080 del 22 de enero de 1974. Más bien, la tarea que nos impusimos algunos profesores universitarios fue la de estudiar con cuidado esos programas, ofrecer a los docentes de secundaria cursos de capacitación sobre los temas nuevos de esos programas y preparar una propuesta escrita para una futura reforma de dichos programas. Esta propuesta fue la que presentamos en Caracas los cuatro profesores de la Universidad Nacional de Colombia, Ricardo Losada, Mary Falk de Losada, Jairo Charris y yo. Por deferencia al profesor Carlo Federici, quien defendía la entonces novedosa tesis de que el cero era el primer número natural, comenzamos la numeración por el cero. La introducción, el capítulo 4 sobre probabilidad y estadística y las conclusiones fueron revisados y reescritos conjuntamente por todos sobre un borrador escrito por mí. El capítulo 1, sobre lógica, conjuntos y estructuras, fue de mi exclusiva responsabilidad, con muchas reservas de parte de mis coautores. El siguiente, sobre computación, fue escrito conjuntamente con Ricardo Losada y Mary Falk, y en el capítulo sobre cálculo diferencial e integral intervino muy agudamente Jairo Charris, ya fallecido.

Al año siguiente de la conferencia, en 1976, el profesor Federici fue nombrado como asesor para la elaboración de los futuros programas de matemáticas del Ministerio de Educación Nacional. En 1978, Federici se jubiló de la Universidad, y yo recibí el encargo de continuar con la asesoría al equipo encargado de la elaboración y experimentación de los nuevos programas de matemáticas para la educación básica de nueve grados. Allí pude poner en práctica algunas ideas del capítulo 1, en particular las doce preguntas de la p. 100, con una reestructuración de los contenidos de matemáticas de cada grado por tres tipos de sistemas: los concretos o familiares a los alumnos, los conceptuales y los simbólicos. En cada sistema distinguí los conjuntos de objetos o elementos, los de operaciones o transformaciones sobre y entre ellos, y los de relaciones o nexos entre ellos. Los sistemas básicos eran los numéricos, los geométricos, los métricos y los sistemas de datos, con tres tipos de sistemas auxiliares: los conjuntistas, los lógicos y los sistemas generales cuyos elementos eran operaciones o relaciones de otros sistemas.

Esos programas se experimentaron y revisaron durante siete años, y en 1984 se expidió un decreto que ordenaba su implementación grado por grado para los cinco años de educación básica primaria. Las condiciones de antagonismo entre el magisterio y el gobierno eran entonces muy álgidas y, a diferencia del año 1974, en 1984 sí hubo resistencia activa del sindicato de maestros a adoptarlos. A pesar de esa resistencia, elaboramos y experimentamos nuevos programas para los otros cuatro grados de básica secundaria, pero a comienzos de 1994, cuando iban a ser extendidos de sexto a noveno grado, una nueva ley general de educación le quitó al Ministerio de Educación Nacional la potestad curricular, caso único en Latinoamérica. Todo el trabajo de 18 años de renovación curricular se vino abajo.

En la práctica, se siguieron utilizando los programas y textos de 1963 para los cinco grados de primaria, y los de 1974 para los seis grados siguientes. Así ocurre hasta el día de hoy. Los lectores disfrutarán con la lectura de esas propuestas de hace 35 años, y juzgarán de su oportunidad y actualidad, a pesar de haberse escrito en una época en la que todavía no existía la didáctica de las matemáticas como disciplina universitaria reconocida, la cual sólo se consolidó en la década de 1980 a 1990 (ver el estudio ICMI número 4, *Mathematics Education as a research domain: A search for identity*. Edited by Jeremy Kilpatrick and Anna Sierpinska. Dordrecht: Kluwer, 1997).

1. Introducción

Durante muchos años se dio en Colombia la aberrante situación de la Escuela Media Única, llamada "Bachillerato", de seis años de duración, después de los cinco años de escuela primaria. Esta situación de carril único para todos los alumnos que superaban la primaria (en el año 1968 solo el 26,8 % de los que ingresaron a primer año), sigue siendo determinante en la enseñanza media actual, pese a los aislados esfuerzos de diversificación que reseñaremos más adelante.

Tal organización escolar de carril único no permitía al estudiante otra alternativa que el abandono de la escuela en los años intermedios, y se orientaba a seleccionar grupos privilegiados que pasaban a la universidad.

Tan reducido es el grupo que entra a la universidad, que en 1971 el entonces Ministro de Educación dio a conocer la cifra que de cada mil niños que entran a primero de primaria, sólo 25 entran a la universidad y 11 de éstos se gradúan.

A las necesidades de esta minoría se orientaba todo el Bachillerato, de corte claramente enciclopédico con diez, doce y hasta catorce asignaturas por año, y sin objetivos específicos de ningún tipo.

Hacia 1950 empezó a proponerse la diversificación del Bachillerato en dos especializaciones de dos años después de los cuatro años básicos: una dirección científica y una dirección humanística. Pero este proyecto fracasó por haberse dejado al arbitrio de los colegios la organización de las dos ramas, la cual era administrativamente impracticable por el reducido número de alumnos de los dos últimos años de bachillerato y las fluctuaciones masivas en las preferencias de los alumnos por una u otra rama.

La idea básica de la diversificación no cuajó pues en los colegios ordinarios, pero sí fomentó la apertura de institutos que aceptaban estudiantes que hubieran terminado el 4° año de Bachillerato: se llamaron diversamente escuelas o bachilleratos comerciales, bachilleratos técnicos, vocacionales, industriales, agrícolas, etc. La principal razón para ingresar a estas escuelas era el pánico que despertaban los cursos de química y física de 5° y 6° de bachillerato.

En el año 1959 se creó el Servicio Nacional de Aprendizaje, SENA, según el modelo brasileño. Este servicio de aprendizaje empezó a captar estudiantes que no habían comenzado o completado el bachillerato. Pero no se le considera propiamente una rama de la enseñanza media.

Las Escuelas Normales sí pueden considerarse como indicadores de un ciclo diversificado pedagógico, pues después de cuatro años de bachillerato como el de los demás colegios, tienen dos años de preparación inmediata para la docencia a nivel elemental. Al fin de este ciclo, el estudiante obtiene el título de “Normalista”, que lo escalafona en el magisterio de la escuela primaria y le permite también ingresar a las Facultades de Educación de las universidades.

En el año 1969 el Gobierno Nacional creó los Institutos de Enseñanza Media Diversificada, INEM, con altos presupuestos de construcción y funcionamiento, y cierta autonomía respecto a los programas oficiales para el bachillerato.

En 1972 había quince INEM en el país que agrupaban aproximadamente 21.000 alumnos. Esto representa sólo el 2,3 % de los estudiantes de secundaria. La diversificación consiste en que a partir del tercer año se puede elegir una intensificación en el área académica (ciencias o humanidades), industrial (metalmecánica, eléctrica, química o construcción), agropecuaria (agrícola, pecuaria) o técnico social (salud, economía doméstica, organización de la comunidad). La especialización dentro de cada área se hace en los últimos dos años.

El programa de matemática de los INEM está bastante influido por el programa mínimo del II CIAEM de Lima en 1966. Su objetivo principal es “la presentación de la matemática en forma unificada y armónica insistiendo en ciertas ideas que permiten hacerlo, tales como: estructuras, operaciones, mediciones, funciones, vectores, amplio uso de la representación gráfica, sistemas de numeración, propiedades de los números, inferencias estadísticas, probabilidades, conjuntos, deducciones lógicas, generalizaciones válidas, topología”.

Jairo Charris Castañeda

Jairo Charris Castañeda nació en Ciénaga, Magdalena, Colombia, el 21 de noviembre de 1939. Obtuvo una maestría en Matemáticas en la Universidad de Chicago y un doctorado en *Arizona State University*. Fue profesor e investigador en la Universidad Nacional de Colombia; profesor visitante en la Universidad del Estado de Arizona y en la Universidad del Sur de la Florida, y miembro de varias sociedades académicas. En el periodo 1995-2000 fue uno de los editores de la Revista Colombiana de Matemáticas.

Recibió varias distinciones tales como: Profesor Emérito de la Facultad de Ciencias, Universidad Nacional, en 1989, el Premio de la Sociedad Colombiana de Matemáticas en 1990 y el Premio de la Academia Colombiana de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales a la Vida y Obra de un Científico, en 1991. En 1999 fue nombrado Profesor Honorario de la Universidad Nacional.

Murió el 17 de julio de 2003 en Bogotá, Colombia.

Se iniciaron también en 1965 los Institutos Técnicos Agropecuarios, ITA, con lo que comenzó a funcionar lo que podríamos llamar un ciclo diversificado agropecuario.

En los años 1970 y 1971 se presentó al Congreso un proyecto de modernización de la educación que contemplaba la homogenización de la nomenclatura educativa a nivel latinoamericano, con un periodo inicial de nueve años, llamado ciclo básico, y luego un período de dos o tres años de ciclo diversificado. La intención era la de reducir el número de bachilleres que pugnaban por ingresar a la universidad, y el deseo de orientar a los estudiantes a las carreras técnicas y medias que no exigían ampliación en los cupos universitarios y permitían un mejor ajuste de la calificación de mano de obra a las necesidades de la producción del país. Desafortunadamente, este proyecto no tuvo buena acogida en ese tiempo.

Ahora vuelve a hablarse en Colombia de una reforma de la enseñanza primaria y media, y aunque no se conocen los proyectos concretos, se espera que se revivan muchas de las ideas de la fracasada reforma de 1970; ciertamente se insistirá en la diversificación en los dos últimos años de bachillerato.

Hablar pues de “Ciclo Diversificado” en Colombia es una ficción. Oficialmente sigue existiendo como línea básica de la educación media el bachillerato de seis años con su mismo corte clásico enciclopedista, que ilusiona a miles de jóvenes con las posibilidades de ascenso social que les daría una carrera universitaria. La dificultad de ingresar a la universidad produce una pléyade de jóvenes frustrados, desubicados y pésimamente preparados para enfrentarse a la vida real en las diversas ocupaciones u oficios que les están abiertos.

En anticipación de una estructuración integral de la educación media en el plan de ciclo básico–ciclo diversificado, trataremos de dar algunas ideas para los futuros planes de matemáticas en esos ciclos diversificados, especialmente en el científico, siempre teniendo en cuenta que el bachillerato clásico todavía agrupa al 70 % de la población escolar entre los 12 y 18 años de edad.

Los temas discutidos a continuación son apenas algunos de los temas de matemática que se deberían tratar en el ciclo diversificado. Fueron escogidos por ser especialmente básicos o por ser en cierta manera novedosos en el programa de estudios de matemática en Colombia. Aunque los enfoques varían mucho, en algún sentido puede decirse que hay un hilo que teje todos los temas en un todo, y es nuestra preocupación por el excesivo formalismo. Aunque la canalización de los estudiantes hacia distintas especializaciones hace posible enseñar más y mejor matemática a los alumnos de la rama pre-universitaria, nosotros no creemos que “mejor” equivale a “más formal”. Insistimos en capitalizar la intuición detrás de mucha de la comprensión y actividad matemática, pues no se construye un modelo matemático ni se resuelve ningún problema no trivial "por formulario". Dadas las circunstancias de un profesorado con considerables deficiencias en su preparación y una población escolar acostumbrada a la memorización en vez del aprendizaje, tenemos que aceptar que una exigencia de rigor, hecha por un programa oficial se traduciría en un excesivo formalismo en el salón de clase. Además, se ha visto que se pone demasiada atención a las palabras y a las definiciones y demasiado poca a la actividad y a la intuición dentro de la enseñanza de la matemática. Así pues, las "fórmulas rigurosas" pasarían de los apuntes del profesor a los apuntes del alumno sin pasar por la inteligencia de ninguno de los dos.

2. Lógica, conjuntos y estructuras

Suponemos que los estudiantes que llegan al ciclo diversificado han tomado un primer contacto con los temas de la matemática moderna en los cursos de 1° a 4° de bachillerato, que serían los grados 6° a 9° del ciclo básico. En esos cursos se presentaría el simbolismo y el significado de la negación, las conectivas, los conjuntos, las operaciones de complementación, unión, intersección, y diferencia, y unos primeros ejemplos de la estructura de grupo.

No ignoramos que la capacitación real de los profesores de estos cursos básicos, especialmente en las ciudades pequeñas y en el campo, es tan deficiente, que en muchos años no podrá hacerse tan ingenuamente la suposición que hacemos nosotros .

Pero aún en el caso de que en el futuro los estudiantes que llegan al ciclo diversificado sí tengan esos conocimientos de matemática moderna, el objetivo de enseñar la lógica, la teoría de conjuntos y las estructuras en el ciclo diversificado no puede ser la presentación formal de la lógica matemática, de la teoría de conjuntos de Zermelo-Fraenkel, ni de las estructuras ordinales, algebraicas y topológicas. Proponemos más bien como objetivos para estas áreas de la matemática moderna en el ciclo diversificado los siguientes:

- el descubrimiento de las estructuras subyacentes a situaciones de la vida diaria, como la situación-lenguaje y las situaciones usuales de manipulación de objetos y números;
- el análisis de las estructuras allí descubiertas;
- la comparación de unas estructuras con otras y de diversas instancias de la misma estructura; y
- la simbolización de esas estructuras, lo que llamaremos la matematización de la situación real que sirvió de punto de partida

Tomemos por ejemplo el caso de la lógica. No se tratará de enseñar lenguajes formales ni teoría de la demostración. Se trataría de aprovechar la familiaridad con la lengua materna para descubrir en ella estructuras subyacentes, saberlas refinar, analizar, simbolizar, manipular: saber "jugar con ellas". Más bien que una lógica del lenguaje o una matemática del lenguaje, haríamos una física del lenguaje.

Nótese la estrecha conexión que debe existir entre la enseñanza de la lengua materna y la de la matemática o la lógica, y la semejanza del método con el de la enseñanza de las ciencias naturales: manipular situaciones estructuradas hasta descubrir la estructura subyacente.

Antes de hacer otras consideraciones sobre los temas y la metodología queremos hacer énfasis en que no consideramos que la lógica, los conjuntos, las relaciones, las operaciones y las estructuras sean cinco regiones de la matemática que puedan ser enseñadas sucesivamente y como temas completos y consistentes entre sí.

Nos parece que ellos deben aparecer conjunta y unificadamente como un lenguaje que permite no sólo expresar más precisamente las situaciones de la vida real, sino también comprenderlas más profundamente.

Ya en la lógica hay operaciones unarias y binarias (como la negación y las conectivas *y, o, si… entonces*), hay relaciones (como la equivalencia tautológica y la deductibilidad), hay estructuras (como el álgebra booleana con la *y*, la *o* y la negación).

Los conjuntos no pueden enseñarse sin la lógica, y la lógica progresa fácilmente con ejemplos de conjuntos. El paralelo de las operaciones, relaciones y estructuras que aparecen en la lógica y en la teoría de conjuntos es inmediato, y facilita la comprensión de ambas áreas.

Y cualquier intento de hacer cualquier tipo de ciencia sobre cualquier región de la experiencia, exige el lenguaje de la lógica, el de los conjuntos, y una mínima familiaridad con las nociones de operación, relación, sistema y estructura.

Para resaltar este carácter básico de la lógica, los conjuntos, las relaciones, las funciones u operaciones, los sistemas y las estructuras, el profesor deberá explicitar a sus estudiantes en cualquier rama de la matemática y a cualquier nivel de la enseñanza de ella, las preguntas siguientes:

1a. ¿Cuáles son los objetos con los que estamos trabajando?
1b. ¿Qué símbolos utilizamos para esos objetos?
2a. ¿Cómo se agrupan esos objetos en conjuntos?
2b. ¿Qué símbolos utilizamos para esos conjuntos?

3a. ¿Qué operaciones efectuamos con y entre esos objetos?
3b. ¿Qué símbolos utilizamos para esas operaciones?
4a. ¿Qué relaciones descubrimos entre esos objetos?
4b. ¿Qué símbolos utilizamos para esas relaciones?
5a. ¿Qué sistema estamos estudiando?
5b. ¿Cómo lo representamos?
6a. ¿Qué estructura tiene este sistema?
6b. ¿Cómo explicitamos simbólicamente esa estructura?

Estas doce preguntas aclaran la situación de cualquier cálculo matemático, desde el cálculo aritmético con números naturales, o el cálculo lógico con proposiciones, el cálculo de clases con los conjuntos como objetos, hasta el cálculo por antonomasia, el cálculo diferencial e integral, en el cual los objetos son las funciones reales, o también el cálculo geométrico sobre puntos, rectas, ecuaciones o vectores.

Estas preguntas son perfectamente generales para todo tipo de descripción matemática, y hasta para cualquier tipo de descripción científica que quiera ser rigurosa.

En particular, para el estudio de la lógica todas estas preguntas deben estar activas desde un comienzo. Recuérdese que los objetos son las proposiciones y las operaciones son la negación y las diez conectivas binarias. Para el estudio de las conectivas recomendamos la utilización de los juegos lógicos al estilo Dienes-Golding, Papy, etc. , por el coincidir con el enfoque de familiarizar al estudiante con una situación real hasta llegar a su normal formalización o matematización.

Además de interpretar las tablas de verdad de las conectivas en el sentido usual nos ha dado muy buenos resultados interpretar los valores de verdad: la V o la F, (o el 1 o el 0) como las consecuencias sociales (quedar bien o mal) de hacer una promesa o afirmación compuesta.

Desde un primer momento pueden utilizarse como ejemplos para proposiciones frases del tipo “a pertenece a B”, en donde a designa un objeto bien determinado, y B un conjunto igualmente bien determinado; es decir, sin utilizar todavía las variables en un primer momento. Después de adquirir familiaridad con proposiciones compuestas cuyos componentes son de este tipo, el paso a las proposiciones abiertas o “condiciones en x” será muy fácil y natural, y el cálculo de predicados no aparecerá muy diferente del proposicional. Recordemos de paso el paralelo entre las variables y los pronombres del lenguaje ordinario.

La correspondencia entre predicados y conjuntos llevará a la necesidad de determinar bien el referencial o universo del discurso. Así puede introducirse naturalmente la exigencia de referencial que es equivalente al axioma de separación de la teoría de Zermelo-Fraenkel. Asimismo, la necesidad de cuantificar sobre un universo bien definido y la introducción de la cuantificación restringida ($\forall x \in U,\ P(x)$; $\exists x \in U, P(x)$) serán igualmente plausibles y "naturales".

También desde un primer momento de la enseñanza de la lógica debe hacerse resaltar la noción de operación como algo esencialmente activo que se hace a los objetos. Las operaciones reflejan la praxis. Se trata de operar sobre objetos (en la lógica sobre proposiciones) para transformarlas en nuevos objetos (proposiciones).

Las relaciones reflejan en cambio la teoría. A este nivel debe hacerse una clara distinción entre las operaciones y las relaciones, por más que en un estadio más avanzado sea posible definir una relación que corresponda a cada operación. Pero la posibilidad de esa reducción teórica no significa que sea lo mismo una operación que una relación.

Parece que esta confusión tiene un fuerte carácter ideológico, en cuanto que menosprecia la práctica y exalta la teoría, dificulta la comprensión de la realidad, oscurece la primacía de la praxis, estorba la correcta utilización de los símbolos, y (tal vez a largo plazo lo más importante), impide la creación de nuevos sistemas matemáticos para formalizar nuevas situaciones.

El enfoque debe ser pues el de buscar en cualquier sistema de objetos las estructuras subyacentes. A cada tipo de operación sobre uno o más objetos corresponde una estructuración del sistema; cada relación que aparezca o se defina entre los objetos, estructura el sistema resultante de una manera específica.

En particular debe insistirse en las relaciones de clasificación ("equivalencias") y de jerarquización ("pre-órdenes", "órdenes estrictos", "órdenes parciales") que estructuran cualquier sistema tenga o no operaciones.

Otro enfoque fecundo es el de analizar la "compatibilidad" de las relaciones y operaciones entre sí, como la "monotonía" de una operación con respecto a una relación (suma con respecto al orden aditivo) o la distributividad de una operación con respecto a otra. En este enfoque es esencial distinguir claramente entre el conjunto y el sistema en cuestión, y mostrar que con un mismo conjunto de objetos se pueden montar muchos sistemas. Por ejemplo, si el conjunto es el de los números naturales $\mathbb{N}$, se pueden estudiar separadamente los sistemas $(\mathbb{N}, +)$, un semigrupo; $(\mathbb{N}, \times)$, otro semigrupo; $(\mathbb{N}, <)$ y $(\mathbb{N}, \leq)$, solo el segundo un sistema ordenado; $(\mathbb{N}, \equiv \pmod{m})$; $(\mathbb{N}, |)$,otro sistema ordenado; $(\mathbb{N}, +, \times)$, un semianillo; $(\mathbb{N}, +, \times, \leq)$, un semianillo ordenado; $(\mathbb{N}, E)$ en donde E es la operación de exponenciación, etc.

También se pueden introducir operaciones binarias menos usuales, como el máximo, el mínimo, el mcd. y el mcm. de dos números, etc. Por ejemplo en $\mathbb{Q}$ o en $\mathbb{R}$ puede introducirse el promedio de dos números como una operación.

También pueden introducirse relaciones de clasificación y de jerarquización diferentes a las usuales. Lo importante es el estudio y el análisis de las propiedades de cada relación u operación, que es precisamente el descubrimiento de la estructura del sistema. Nótese que hablamos de estudio y análisis, y no de aprendizaje de fórmulas definitorias.

La noción de morfismo entre sistemas con la misma estructura, y la noción de categoría, cuyos objetos son los sistemas y cuyas flechas son los morfismos, con la operación de composición de morfismos, corona la presentación de un lenguaje unificado para toda la matemática y las ciencias naturales.

Para el estudio de las propiedades de las relaciones recomendamos distinguir claramente entre las propiedades aplicables a cualquier relación, sea cual fuere su conjunto de salida o de llegada, y las que se aplican solo a relaciones en un mismo conjunto.

Las primeras se deben agrupar dualmente en dos grupos de a dos:

	Con referencia al dominio:	Con referencia al recorrido:
Por lo menos un asociado	DEFINICIÓN TOTAL	SOBREYECTIVIDAD
A lo más un asociado	FUNCIONALIDAD	INYECTIVIDAD

Las segundas se pueden enseñar también por parejas:

Reflexiva	anti-reflexiva
Simétrica	anti-simétrica
Transitiva	anti-transitiva

Todas estas propiedades, excepto la transitividad, se ven muy claramente representadas en los diagramas sagitales, y también deben reconocerse con facilidad en los diagramas cartesianos. Más que la formulación simbólica de la propiedad de una relación, lo que importa es la estructuración que induce en el conjunto: la agrupación en clases de relativos que produce la simetría combinada con la transitividad, y la jerarquización que produce la antisimetría combinada con la misma transitividad. La reflexividad es accidental, y puede añadirse o quitarse a voluntad por simple definición. Por ejemplo, en la relación "es hermano de" puede definirse que cada uno es hermano de sí mismo, o definirse lo contrario: la clasificación resultante es la misma; en la relación " es descendiente de" puede también definirse que cada uno es descendiente de sí mismo, aunque esto parece muy forzado; si no se define así, la jerarquización resultante es la misma que si se define la relación de manera que sea reflexiva.

Para la dificultad que presenta la formulación de la antisimetría, hemos encontrado que la que se aplica más universalmente y la que se comprende más fácilmente es la siguiente: si los elementos son diferentes, nunca hay simetría. En símbolos:

$$\forall\, a, b,\ (b \neq a\ \wedge\ b\mathcal{R}a) \Rightarrow a \not\mathcal{R} b$$

Esta formulación evita el tener que apelar a que la antisimetría "se cumple vacuamente" en el caso de un orden estricto, como sucede con la formulación usual. Esta formulación permite dar una definición genérica de relación de jerarquización u ordenación, a base de la antisimetría así definida y de la transitividad; este tipo de relación tiene como casos particulares el orden estricto y el orden amplio. No debe decirse "orden parcial", pues la distinción entre parcial y total tiene otro criterio completamente distinto, que puede aplicarse a lo órdenes estrictos o amplio. Para distinguir entre parcial y total puede definirse en general la relación de comparabilidad bajo una relación $\mathcal{R}$, $C_{\mathcal{R}}$, en la forma siguiente:

$$bC_{\mathcal{R}}a \leftrightarrow (b\mathcal{R}a \vee a\mathcal{R}b)$$

Se recomienda el uso sistemático del orden $b\mathcal{R}a$, $y\mathcal{R}x$, etc. y la lectura natural "...es un $\mathcal{R}$-relativo de..." para unificar la lectura de las relaciones funcionales y no funcionales y facilitar la enseñanza de la composición de relaciones y de funciones.

Por ejemplo:	y es menor que x	$y \leq x$ (no es funcional)
puede leerse:	y es minorante de x	yMx (no es funcional)
	y es divisor de x	yDx (no es funcional)
	y es cuadrado de x	yCx ($y = x^2$)
	y es sucesor de x	ySx ($y = x^+$)

Así pueden construirse las gráficas cartesianas de las cuatro relaciones en forma coherente. Si se lee en el orden usual de las relaciones, $x\mathcal{R}y$, habría que decir "xCy", "xSy", y las gráficas saldrían al revés de las usuales.

Este orden de lectura permite también leer la composición de relaciones simplemente "de", que es como la saben usar en la vida diaria los estudiantes: un sobrino es un hijo *de* un hermano: $S = H \circ F$; el abuelo materno es el papá *de* la mamá: $A_m = P \circ M$. De la misma forma pueden componerse relaciones funcionales como no funcionales: un minorante *del* cuadrado: $M \circ C$; un divisor *del* sucesor: $D \circ S$. Si se lee en orden usual de las relaciones, $x\mathcal{R}y$, es imposible hacer el paralelo entre la composición de relaciones y la de funciones.

La habilidad para distinguir claramente y simbolizar eficientemente las relaciones y las operaciones, y la práctica en analizar sus propiedades en un sistema dado, es el objetivo operacional que se busca a nivel de la enseñanza diversificada. Esto no es otra cosa que descubrir la estructura subyacente a un sistema de objetos con sus operaciones y relaciones. Esperamos que el ejercicio sistemático de estas actividades agudice la visión crítica del estudiante, que no se perderá ya en observar los individuos u objetos dispersos, sino que buscará sus relaciones y verá qué actividades prácticas u operaciones se pueden realizar sobre ellos: lo único importante no son los individuos, sino también los sistemas y las estructuras. Este mismo espíritu crítico, unido a la creatividad fomentada también por este tipo de matemática, podrá tener a largo plazo un efecto que todos deseamos, sin saber cómo contribuir a que se produzca: preparar al estudiante para que empiece a producir nuevos sistemas matemáticos más adaptados a la matematización de las situaciones reales latinoamericanas.

Nos parece que una presentación coherente de este lenguaje unificado de la matemática y de la ciencia es esencial para el ciclo diversificado preuniversitario, y no solo para el científico; también en el humanístico será de gran utilidad este lenguaje, que se va a utilizar en la lingüística, en la antropología, en la sicología, y en la sociología. En su debida proporción, y con el menor énfasis en el simbolismo formal que requieren las circunstancias, debería explicarse este lenguaje de la lógica, los conjuntos, las relaciones, las operaciones, los sistemas y las estructuras también en los demás ciclos diversificados.

Siendo un lenguaje tan general y una formalización del lenguaje ordinario, parece muy conveniente en todos los casos como formación mental para la precisión y el rigor en todos los niveles. Aunque solo se intente un repaso de la aritmética en el ciclo agropecuario, por ejemplo, no debería reducirse el profesor a repetir lo aprendido en el ciclo básico, por más que allá hubiera estado mal aprendido. Se debe atacar la aritmética desde otro punto de partida, y con otro enfoque. La sugerencia que hacemos, es que ese punto de partida sea el análisis del lenguaje que se utiliza en esa rama de la matemática, y que el enfoque sea el descubrimiento de las estructuras subyacentes a la situación ya familiar al estudiante. Así el joven egresado de cualquiera de los ciclos diversificados podrá utilizar creativa y críticamente la aritmética, y ojalá algún día desarrollar otros sistemas simbólicos expeditos y eficientes para ayudarle a dominar las situaciones de su vida real.

3. Computación

La introducción de la computación en la rama pre-universitaria del ciclo diversificado presenta varios aspectos conflictivos para un país como Colombia.

Desde el punto de vista del profesor universitario de matemática o de una persona que ejerce una de las muchas profesiones a las que es aplicable la computación, el deseo de introducir un tema tan actual es manifiesto. Respondiendo a ellas y a un sector creciente de la sociedad colombiana que ha entrado en la corriente de la vida mundial compuesta por personas que son ciudadanos de este siglo y no sólo de Colombia sino del mundo diríamos que no es apenas deseable, sino necesario, introducir la computación en la matemática del ciclo diversificado. Sin embargo, saltan a la vista inmediatamente los argumentos de que no hay ni personal preparado, ni materiales adecuados para una enseñanza de la computación a un buen nivel. La adquisición de éstos representa a un gasto grande respecto al presupuesto total de un colegio en Colombia y aunque parezca difícil justificar este gasto, dado el sector pequeño de la población escolar que se beneficiaría de él, lo que nos proponemos hacer es mostrar que el gasto no es tan grande como se piensa y que sí está plenamente justificado.

Como no empezaremos sino hasta el semestre entrante a tener experiencias concretas a nivel de la enseñanza media, no nos atrevemos a sugerir un programa de un curso secundario de computación. Más adelante daremos el contenido de un programa tentativo para la capacitación de profesores de secundaria en las ciencias computacionales que sí se ha experimentado ya. Vale la pena notar que hemos leído con mucho cuidado las conferencias y recomendaciones publicadas por la Tercera Conferencia Interamericana de Educación Matemática y nos han sido de mucha utilidad para la planeación de los primeros cursos.

Más bien haremos ciertas consideraciones generales orientadas hacia los objetivos de la enseñanza de la matemática en el ciclo diversificado, y veremos cómo la ciencia de la computación es fundamental para la realización de estos objetivos. En ningún momento intentaremos llegar a soluciones para todos los sectores educativos. Estaremos siempre refiriéndonos al bachillerato preuniversitario.

En Colombia, como en muchos países latinoamericanos, hay regiones donde los servicios educativos son sumamente deficientes. Esto ocurre con mayor frecuencia en las áreas rurales, pero es bien conocido que en las ciudades también ocurre lo mismo, pues se encuentran muchos maestros y profesores de bachillerato que no tienen la preparación adecuada para desempeñar la labor que les corresponde. Estos problemas son endémicos en Colombia y necesitan un gran esfuerzo para empezarlos a resolver. Este es el aspecto del sistema educativo del país que más frecuentemente se analiza.

Pero por otro lado, vemos en los colegios oficiales de bachillerato y en muchos institutos privados hay una mayoría de profesores de matemática que han hecho los estudios de licenciatura en matemática. Entre estos profesores hay una reserva de talento que no ha sido utilizada de manera óptima. En los recientes cursos de capacitación para profesores de matemática de bachillerato que abrimos en la Universidad Nacional, recibimos unos 240 profesores en ejercicio. Después de dos semestres de labores, ha quedado un núcleo de unos 75 que han demostrado interés, dedicación y creatividad en sus aportes al desarrollo de la educación matemática. Nos arriesgaríamos a decir que cualquier deficiencia académica, proviene de fallas en su formación universitaria, no de sus limitaciones personales. Estos profesores pueden producir más. A ellos les debemos la oportunidad de educación permanente a través de cursos y de revistas profesionales. Creemos que allí tenemos el potencial humano para iniciar la enseñanza de la computación a nivel del ciclo diversificado; no debemos desaprovecharlos.

Además, estamos convencidos de que hay estudiantes de secundaria y padres de familia, quienes, viviendo al tanto de las ciencias naturales y las ciencias sociales en Colombia y en otras partes, han visto el impacto de la computación y ciencias relacionadas con el manejo de los negocios y la planeación nacional, etc., tanto como en los avances científicos. Para los que aprecian la importancia y el poder de la computación es imperativo obtener cierta familiarización con ella, pues "conocer" sin entender traumatiza.

En breve, creemos que hay un sector de la sociedad que pide saber algo sobre las ciencias de la computación, y un sector del profesorado que puede iniciar esa enseñanza. Aunque se presentan varios otros problemas educativos de gravedad que también deben ser resueltos y que parecen más básicos, estamos seguros de que nuestra respuesta a una situación educativa que tiene tantos y tan fuertes contrastes ha de ser variada; debemos reaccionar de diferentes maneras a problemas de distintas índoles. No sería la marca de un buen educador recetar las mismas técnicas a todos los sectores educativos. Tal como en Colombia practican el sobandero y el neurocirujano, también en Colombia hay que ofrecer al lado de la alfabetización un bachillerato pre-universitario digno de este siglo y del joven que ha sido formado por él. Sobre todo los que estamos trabajando en la universidad nos sentimos capacitados para dirigirnos hacia el bachillerato pre-universitario a través de la preparación de futuros profesores, la actualización de profesores en ejercicio y la redacción de objetivos adecuados para los programas de estudio en matemática.

Entre dichos objetivos también se encuentran razones imperativas para introducir poco a poco la computación en la preparación matemática pre-universitaria.

Así como en el nivel de primaria es imprescindible que un alumno matematice a partir de experiencias concretas –que a la vez sugieren conclusiones matemáticas y facilitan su comprensión– al nivel secundario y particularmente en el ciclo diversificado, creemos que la educación matemática debe reforzarse con modelos. Es decir, que la construcción de un modelo para una situación matemática, juega al nivel de secundaria el papel de facilitar la comprensión de la matemática implicada en ella, y al mismo tiempo sugiere nuevas conclusiones en base a ella; permitiendo al estudiante entender un concepto y extenderlo, ampliarlo o refinarlo.

Además, la construcción de algoritmos, básica en la programación, es una invitación a la creatividad, al mismo tiempo que exige organización y pensamiento ordenado. No dudamos que la combinación del razonamiento creativo y ordenado, basado en un cuerpo de conocimientos, describe la actividad de hacer matemática. Con la introducción de la computación en el ciclo diversificado esperamos dar oportunidad a los alumnos para que empiecen a adquirir madurez intelectual. Reconocer que varios algoritmos distintos pueden servir el mismo propósito, cada uno con sus deficiencias y ventajas, ha de animar al alumno a pensar por su cuenta en vez de buscar “la respuesta”; así se ayuda a crear un estudiante con la mente más abierta. Vemos en esta situación la misma configuración de aquella otra más avanzada tal vez, en la que un estudiante expuesto a varias demostraciones de un teorema se propone buscar sus propias demostraciones. Es importante, además, que en el proceso educativo un joven vea “algo de él” en los resultados obtenidos. En general, la resolución de problemas aporta este “algo”, pero hay unas oportunidades especiales no triviales en la enseñanza de la computación.

Es tanto el valor educativo del uso del modelo y la construcción de algoritmos inherentes a la enseñanza de la computación, que nosotros en Colombia empezaríamos a darla en algunos cursos, aún en el caso de que la adquisición de máquinas se hiciera imposible por razones presupuestales. Además, un curso a este nivel, aún sin práctica en la misma máquina, también nos serviría para proporcionar alguna familiarización concreta con las computadoras. Sin embargo, si esta alternativa fuera imposible, optaríamos por un curso que contenga todos los elementos esenciales, menos la parte práctica.

Es más, el sector que más necesita aprender el sistema de la computación es el de los profesores de matemática en secundaria, pues ellos comprenden a fondo su importancia, aunque son pocos los que han podido estudiarlo.

¿Cómo planeamos introducir la computación en el sistema educativo? Creemos que la introducción debe ser gradual, no a partir de un cambio de programa de estudios de matemática. Decretar que el programa de estudios secundarios debe incluir la computación, produciría un efecto tan efímero en el desarrollo de la educación como el efecto sobre la pobreza que tendría decretar que todo el mundo debe ganar un sueldo alto. Sería un engaño.

Ya se ha organizado en la Universidad Nacional, a partir del próximo semestre, un curso preparatorio para profesores de matemáticas del ciclo diversificado. El curso no será sobre programación sino sobre la enseñanza de la computación. Al mismo tiempo esperamos sea posible introducir un curso parecido para los estudiantes universitarios que siguen la carrera de educación matemática. Para estos cursos, sí contamos con unas máquinas pequeñas pero completas y con el centro de cómputo de la universidad, que creemos indispensable para la preparación del profesorado y con lo cual cuentan las principales universidades del país.

Esperamos animar a estos profesores a empezar cursillos introductorios para sus alumnos, armándolos con un programa tentativo y apoyándolos con la consejería que requieran. Sus experiencias en conjunto con las nuestras nos darán una idea de las fallas y aciertos del programa tentativo; a partir de estas experiencias se podría escribir un programa experimental para el uso de profesores de secundaria especialmente capacitados e interesados.

Como anexo a esta segunda parte, presentaremos un programa tentativo específico, basado en las experiencias de este año, para la preparación de profesores de secundaria en los rudimentos de la computación.

Nuestro propósito es crear una realidad, con base en la cual se puede pedir un aporte financiero oficial, llegando al establecimiento de cursos de computación a nivel del ciclo diversificado. Es bastante claro que una misma máquina tendría que servir a varios colegios en el ciclo diversificado –o que la enseñanza de la computación tendría que extenderse a nivel básico– para justificar la inversión correspondiente. El compartir una misma computadora parece realizable, pues en Colombia en una sola planta física funcionan dos o tres jornadas con su alumnado completo. Entre los colegios privados, la ubicación en áreas que parecen "concentraciones escolares" de varios establecimientos, hace practicable el compartir los servicios de computación.

En resumen, podemos decir que aunque lo ideal sería que los estamentos educativos guiáramos a la población previendo sus necesidades, nos vemos en Colombia en una situación donde una parte de la sociedad ya reconoce la falta que le hace la enseñanza de las ciencias de la computación. Hemos fallado en tomar la iniciativa, pero no tenemos por qué quedarnos atrás. Aparte de los motivos generales, la enseñanza de la computación al nivel del ciclo diversificado proporciona la oportunidad de trabajar con modelos matemáticos y tratar problemas de actualidad; así podemos realizar uno de nuestros objetivos académicos, pues nos parece que esto hace las experiencias matemáticas más relevantes a la vida del alumno. Además, la actividad de inventar un algoritmo apropiado para un cierto problema permite al estudiante participar de manera no trivial en su educación.

Finalmente, el cuerpo de conocimientos denominado ciencias de la computación tiene innegable valor de por sí, y siendo este cuerpo tan extenso, una introducción al nivel secundario facilitaría un tratamiento más a fondo en la universidad.

ANEXO: Programa tentativo

Para implementar los objetivos enunciados arriba, proponemos el siguiente programa tentativo, que se ha probado con grupos de profesores de matemática de enseñanza media:

1. Breve introducción histórica. El ábaco. Los huesos de Napier. Charles Babbage. Las tarjetas perforadas. Analizadores diferenciales de la década del 30. Computadores de relevos. Las máquinas de primera generación: ENIAC, MANIAC I y II, STRETCH, UNIVAC. Las máquinas de tercera generación: circuitos integrados.
2. Las computadoras analógicas y digitales. Esquema general de una computadora. Unidades de entrada y salida. Memoria. Registros. Control central y procesor.
3. El sistema binario. Sistema decimal codificado en binario. Bits y Bytes. Sistema octal y hexadecimal. Uso del ábaco como sumadora binaria; otros modelos de sumadora binaria (“minicomputadora” de Papy, modelos eléctricos y electrónicos).
4. Un modelo “humano” de una computadora: un equipo de estudiantes se reparte las funciones de las componentes de una computadora. Algoritmos verbales y diagramas de flujo. El lenguaje BASIC. Programas sencillos en BASIC. Ejecución de los programas por el modelo “humano”.
5. Calculadores y computadoras de escritorio. La lógica algebraica (signo “=”) y la lógica polaca inversa. Práctica de cómputo. Programación por el teclado de máquinas programables. Cualidades: sencillez, tamaño, aplicabilidad a distintas especialidades. Limitaciones: no decisión; no interacción.
6. Programas de nivel intermedio en BASIC. Decisiones. Lógica. Ciclos de interacción (“Do-loops”). Práctica en el centro de cómputo de una institución.
7. Introducción al FORTRAN y otros lenguajes de programación. Formatos. Programa de nivel avanzado. (Opcional).

4. La enseñanza del cálculo

La enseñanza del cálculo diferencial e integral plantea problemas de carácter muy especial al educador, dentro de cualquier programa, y cualesquiera que sean los objetivos de éste. Las causas fundamentales de estas dificultades dependen principalmente de cuatro factores:

1. Las dos nociones o ideas fundamentales sobre las cuales reposa la teoría, las del límite y continuidad, son a la vez de las más simples (léase abstractas) y de las más profundas de toda la matemática.
2. La profundidad de tales ideas radica especialmente en su enorme aplicabilidad a los más diversos problemas de distintas ciencias, incluida la matemática misma.
3. Para apreciar el poder del cálculo en las diferentes ciencias es necesario tener un conocimiento más o menos profundo de éstas.
4. Para aprovechar al máximo la aplicabilidad del cálculo es necesario desarrollar ciertos algoritmos, técnicamente complejos.

Con respecto al primero de los anteriores factores, todos los que alguna vez hemos estudiado cálculo estaremos de acuerdo en la mencionada dificultad de las nociones de límite y continuidad y en el problema que esto plantea para su enseñanza. Muchos estaremos de acuerdo en que tales nociones solamente llegaron a ser claras para nosotros en cursos posteriores de análisis matemático o topología general, pero todos comprendemos también que la motivación para tratar de esclarecer estas nociones se debió al haber reconocido el poder de aplicabilidad del cálculo a tan diversos problemas, razón que obliga también a proceder así en su estudio o enseñanza, aún si dichas nociones no son del todo asimiladas. Así, aunque es cierto que la mayor parte de las teorías matemáticas se complican técnicamente en sus desarrollos más elevados, la mayor dificultad del cálculo radica en sus fundamentos mismos: en sus puntos de partida.

Muchos han sido los esfuerzos para tratar de solucionar esta dificultad inicial: desde tratar de obviar el problema con la introducción de los llamados infinitésimos, de frecuente aparición en los textos anteriores al año 1950, hasta increíbles esfuerzos de carácter pedagógico para intentar introducir con franqueza la definición de tipo épsilon-delta. Ambas cosas parecen estar condenadas al fracaso. Y, sin embargo, todo el mundo parece tener en principio una idea intuitivamente clara de las nociones de límite y continuidad; por lo menos, hasta el instante en que sus profesores de cálculo pretenden enseñar tales nociones, y empiezan a usar frases como: $f(x)$ tiende al límite L cuando x tiende a x_0, si se acerca indefinidamente a L sin nunca llegar a ser L, cuando x se acerca indefinidamente a x_0, sin nunca llegar a ser x_0, etc., o cuando ponen ejemplos de funciones como:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-4}{x-2} & (x \neq 2) \\ 1 & (x = 2) \end{cases}$$

que obligan al estudiante a pensar durante meses qué diferencia hay entre esta función y la siguiente:

$$f(x) = \begin{cases} x+2 & (x \neq 2) \\ 1 & (x = 2) \end{cases}$$

para llegar al fin a la conclusión de que detrás de la noción de límite hay algo truculento, pues la división, obvia desde un principio, debe proponerse para que el cálculo del límite se dificulte.

No es fácil, sin embargo, atrapar la noción intuitiva de límite y continuidad que todo el mundo parece tener. En el caso de los límites de funciones éstas parecen estar ligadas a un cierto tipo de funciones: tal vez, funciones lineales o polinómicas de una variable. Todos parecen comprender que, por ejemplo, en el caso de funciones polinómicas, al cambiar el valor de la función en un punto de su dominio, su límite en ese punto no va a cambiar. Lo mismo sucede con ciertas funciones trascendentes elementales (como las trigonométricas, exponenciales y logarítmicas). Es de pensar entonces que tal vez el problema de los límites y la continuidad pueda obviarse en principio restringiendo la clase de funciones y la naturaleza de sus dominios. Esto, hasta el punto en que tal clase sea aún lo suficientemente amplia para con ella dar importantes aplicaciones del cálculo a una apreciable variedad de problemas. A un nivel pre-universitario, por ejemplo, la restricción a funciones polinómicas por intervalos y a funciones racionales elementales permite ya una aplicabilidad amplia, a la vez que tal clase de funciones goza de un alto contenido intuitivo en su comportamiento topológico y de un fácil cálculo de sus derivadas e integrales. Tal restricción permite además introducir la noción de integral como primitiva o anti-derivada:

$$F(x) = \int f(x)\,dx,$$

o mejor,

$$F(x) \sim \int f(x)\,dx,$$

(léase: F es una primitiva de f), si:

$$F'(x) = f(x)$$

Se puede definir luego:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

si $F(x) \sim f(x)\,dx$; así se podrá ver que entonces:

$$\int_a^x f(t)\,dt = F(x) - F(a) \sim \int f(x)\,dx,$$

Obviándose así el teorema fundamental del cálculo. Se puede pasar luego a la noción de área bajo una curva (función ≥ 0), definiéndola por:

$$A_a^b(f) = \int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a),$$

y haciendo ver que esta nueva noción coincide con la clásica en los casos en que la clásica tenga sentido. Luego puede verse, si se quieren evitar cargos de conciencia, que si $t_k \in \left[a + (k-1)\left(\frac{b-a}{n}\right)\right]$, o sea $t_k \in [a_{k-1}, a_k]$, viendo simplemente que las diferencias

$$\int_{a_{k-1}}^{a_k} f(x)\,dx - f(t_k)\left(\frac{b-a}{n}\right)$$

pueden hacerse tan pequeñas como se quiera, lo cual será fácil si la clase de funciones admisibles está bien acogida, y así justificar la anterior definición de área.

De todas maneras es importante recalcar que en este momento el estudiante puede estar interesado en el juego de calcular áreas, o tangentes, o resolver problemas de máximos y mínimos de diversa índole, que en la justificación plena de los procedimientos que usa. Un error tradicional de la enseñanza de estos tópicos, frecuentemente debido a la ignorancia de los mismos profesores, radica, sin embargo, en no hacer notar a los estudiantes las limitaciones de estos procedimientos. Tales limitaciones deben hacerse notar mediante ejemplos concretos más que con el análisis de la hipótesis de los teoremas que les dan origen.

En cuanto a la aplicabilidad de las ideas fundamentales del cálculo a diversas ramas de la ciencia, nos parece que este debe ser el punto central de un tal curso. Es fácil encontrar aplicaciones geométricas tan simples o tan difíciles como se quiera. Estas últimas deben evitarse. Un poco más difícil es encontrar aplicaciones a la física. Pesos de varillas de densidad variable, velocidades debidas a aceleraciones variables, aceleraciones debidas a fuerzas variables, resistencias eléctricas que varían con la temperatura provocada por el paso de la corriente, campos eléctricos o magnéticos, etc., pueden suministrar ejemplos simples en este campo. Problemas de crecimiento de población sujetos a restricciones ambientales (bacterias para biólogos, criminalidad y alienación para sociólogos y sicólogos, precios y salarios sujetos a oferta y demanda para economistas, etc) son fáciles de elaborar y pueden ser, o al menos parecer, estimulantes, sin requerir demasiados conocimientos de las diversas ciencias.

En cuanto al punto 4) creemos que las dificultades algorítmicas (cálculos de primitivas y derivadas) pueden reducirse a un mínimo restringiendo las clases de funciones. Las integrales, por ejemplo, deben ser casi inmediatas. No son ellas en sí lo que importa. Es su enorme utilidad (fuera del hecho de que el intento de calcular primitivas de funciones mediante funciones elementales es matemáticamente interesante solo cuando no es posible).

Para terminar, diremos que al nivel secundario, diversificado o no, parece ser demasiado ambicioso, por razones de tiempo, el intentar ir más allá del cálculo diferencial e integral de funciones de una variable. Limitando bien la clase de funciones esto no parece ser, sin embargo, técnicamente difícil. Como es obvio, esto ampliaría considerablemente el rango de aplicabilidad, fuera del hecho de que muchos problemas de cálculo mismo pueden ser mejor formulados dentro del contexto del cálculo diferencial de varias variables.

Conclusiones y recomendaciones

Teniendo en cuenta la anterior discusión, podemos hacer las siguientes recomendaciones:

1. Para la enseñanza del cálculo en el ciclo diversificado es conveniente restringir la clase de funciones a una clase tal que en ella pueda desarrollarse la teoría fundamental aprovechando al máximo su contenido intuitivo. Una tal clase podría estar formada por funciones algebraicas por intervalos (un número finito de ellos), funciones trigonométricas elementales, exponenciales y logarítmicas. Debe tenerse cuidado con restringir apropiadamente los dominios para no causar complicaciones innecesarias que oscurezcan la teoría e impidan captar el contenido intuitivo de ella.
2. La idea de integral puede tratarse como antiderivada, de tal manera que la noción de límite no aparezca en ella, excepto al introducir la noción de área bajo una curva, tal como lo explicamos en la discusión general del tópico.
3. Las definiciones del tipo épsilon-delta deben omitirse. La clase de funciones considerada debe ser tal que los algoritmos necesarios para los cálculos de derivadas e integrales se reduzcan a un mínimo. Aun en el caso de introducir las vecindades y su diámetro (noción más clara en el

plano que en la recta real), deben evitarse las sustituciones complicadas y los trucos de toda clase, por ingeniosos que sean.

4. Lo propuesto en los tres numerales anteriores debe ser común a todo curso de cálculo, independientemente de cuáles sean las posibles diversificaciones en las que se enseña el curso respectivo. Igualmente, la enseñanza de las aplicaciones geométricas elementales del cálculo (áreas, tangentes, máximos y mínimos) debe ser común a todas las diversificaciones.
5. Se propone que los últimos años de bachillerato tengan inicialmente solos dos ramas de diversificación: una para los estudiantes de ciencias naturales (matemática, física, química y biología), y otra para los estudiantes de ciencias sociales (psicología, sociología, antropología, filosofía). El cálculo en los esquemas de diversificación diferiría únicamente en cuanto al tipo de problemas de aplicación. La teoría fundamental debe ser la misma.
6. Sería conveniente discutir la posibilidad de incluir, al menos dentro del primer esquema de diversificación, nociones sobre el cálculo de varias variables. Pero en principio, proponemos limitar el campo al caso de una sola variable independiente.
7. Finalmente, insistimos en algo que nos parece fundamental: *el énfasis en la enseñanza del cálculo a nivel del ciclo diversificado debe ser en sus aplicaciones.*

5. Probabilidad y estadística

La probabilidad y la estadística son dos ejemplos más de temas que hace apenas 15 años se trataron casi exclusivamente al nivel universitario, porque su importancia en la matemática salió a la luz sólo en el siglo XX.

Si bien es cierto que la revolucionaria "matemática moderna" de los años 60 ha encontrado rechazo por la falla frecuente de su metodología formalista, es también cierto que la matemática "moderna" ha tenido éxito en cambiar fundamentalmente los programas de matemática en secundaria y en primaria. Introducida experimentalmente en los programas de matemática a varios niveles pre-universitarios, muchos de estos temas han llegado a acomodarse hasta en los primeros años de primaria. La probabilidad y estadística se encuentra entre estos temas "modernos" –y aunque ciertamente admitimos de antemano su inclusión en programas de matemática al nivel secundario, y aun primario, creemos que todavía hay mucho que discutir sobre cuáles aspectos se deben tratar y cómo se deben enseñar.

Según el más reciente programa oficial para matemática secundaria en Colombia, la probabilidad y la estadística son temas opcionales para 3° y 4° de bachillerato. Esta ubicación nos parece bien planeada, pues algunas nociones de probabilidad, y en especial de estadística, son básicas para la "alfabetización matemática" (usando el término del Prof. Fehr) de todo estudiante. De nuevo, estamos de acuerdo con que se tomen como temas opcionales por el momento, porque a los profesores mal preparados ciertamente no les debemos exigir que los enseñen. Sin embargo, no hay ninguna continuidad de temas prevista en el programa oficial y no se reconoce el hecho que estos tópicos deben explorarse más a fondo en el ciclo diversificado. Esto es una falla innegable del programa oficial, pues se requiere más preparación estadística de la que se puede adquirir durante los últimos años del ciclo básico.

Ahora consideremos la pregunta: ¿Qué se debe enseñar en el ciclo básico y qué en el ciclo diversificado?

5.1. Ciclo básico

A. Estadística. Básicamente sugeriríamos que la estadística descriptiva se desarrolle, incluyendo la dispersión, la moda, la mediana y la media aritmética de datos numéricos, tanto como algunos métodos de tabulación y de representación gráfica. Se pondría atención especial a la media aritmética y se incluirían nociones de varianza y desviación estándar. En efecto, esperamos que todo estudiante pueda leer un histograma sencillo y entender el origen de datos estadísticos sencillos, como la temperatura promedio para el mes de julio, la dispersión de notas en un examen dado, etc. El estudiante también debe reconocer algunos usos y limitaciones de cada uno de estos métodos de analizar de datos.

B. Probabilidad. Esperaríamos que el estudiante pueda identificar el espacio muestral y el conjunto verdad de un evento, que comprenda la medida de estos conjuntos intuitivamente y que pueda calcular la probabilidad de un evento en casos donde la medida es discreta y la posibilidad comprensible intuitivamente. Ejercicios sencillos pueden emplearse para ilustrar la probabilidad de p y q, probabilidad condicional y eventos independientes pero los pormenores de estos conceptos se deben dejar para estudiantes de mayor madurez.

5.2. Ciclo diversificado

Ahora entramos en lo que forma propiamente parte del tema de este trabajo y nos proponemos ser más específicos.

A. Para los estudiantes de las escuelas normales, quienes, o bien serán maestros de primaria, o bien continuarán sus estudios de educación al nivel universitario, recomendamos un cursillo en la metodología de la enseñanza de estadística descriptiva. Es decir, la construcción de gráficas sencillas y la tabulación de datos basada en las gráficas, y vice-versa. Se pueden hacer gráficas sobre temas como "¿Cuántos hermanos tiene cada niño?", la estatura de los niños, el color de sus ojos, las calles donde viven, etc. Se incluirían distintas maneras de representar los datos, la moda y la media aritmética. Este cursillo debe reforzarse con el empleo de material didáctico y se debe poner énfasis en la participación activa de los niños en la construcción de las gráficas y su "interpretación".

Para estudiantes de los Institutos Técnicos Agropecuarios, estamos interesados en dar sentido a la base estadística sobre la cual reposan varios de sus cursos técnicos. En particular, deben poder juzgar la confiabilidad de conclusiones que se pueden sacar correctamente de ellos.

En la rama pre-universitaria creemos que se debe hacer un intento de familiarizar al estudiante con muchos modelos estadísticos, según nuestra insistencia general en el valor metodológico de los modelos, y que estos modelos deben ser analizados respecto a su uso apropiado y sus limitaciones. La inferencia estadística sencilla relacionada con la clase, el colegio y otras situaciones –como los cursos de ciencias– puede ser particularmente instructiva. Estamos interesados en familiarizar al estudiante con los procedimientos, la formulación de hipótesis y la aceptación o rechazo de ellas según los datos, en vez de enseñar la matemática formal de la inferencia estadística.

B. Probabilidad. Nuestro objetivo es formalizar y completar la introducción a la probabilidad dada en el ciclo básico, para aquellos estudiantes que planeen entrar a la universidad en cualquier campo de estudio. De nuevo advertiríamos que es mejor no tratar problemas que no sean intuitivos, excepto unos pocos casos desarrollados por el profesor. Es decir, el estudiante debe reconocer que no toda situación en la probabilidad puede ser resuelta al nivel intuitivo, pero al mismo tiempo no se le debe exigir que enfrente tales problemas por su cuenta. Al nivel de secundaria esta experiencia es más frustrante que instructiva.

Nuestro curso de probabilidad para el ciclo diversificado incluiría combinatoria, que, fuera de permitirnos tratar nuevos espacios muestrales y sus medias, es una oportunidad excelente para aplicar técnicas de inducción y familiarizar al estudiante con demostraciones sencillas por inducción (no necesariamente formalizadas completamente). Los diagramas de árbol son una herramienta de valor incalculable en muchos problemas de probabilidad a este nivel –no solo para el uso ilustrativo del profesor, sino también como un medio que tenga el estudiante para plantear un problema–. Quizá no lo hemos mencionado hasta ahora, pero ciertamente hemos supuesto que la resolución de problemas es uno de los objetivos principales de la educación matemática. Pocas son las técnicas que se pueden enseñar, pero sí se pueden presentar algunas herramientas que ayudan al estudiante a visualizar un problema y así dominarlo. En este nivel de la probabilidad, los diagramas de árbol proveen una manera de adentrarse en los problemas. Es aconsejable tratar las variables aleatorias y la esperanza, también en base a muchos ejemplos sin demasiado formalismo. Con el fin de dejar el estudiante abierto a más progresos en el campo de la probabilidad, creemos que deben explorarse algunos casos de espacios muestrales discretos e infinitos y otros continuos, tomando intuitivamente el salto de la sumatoria a la integral para aquellos estudiantes que hayan visto una introducción al cálculo integral.

Quizá vale la pena notar la imposibilidad de verificar empíricamente la hipótesis aún en los modelos probabilísticos más sencillos. Por ejemplo, podemos razonar a partir de un modelo sencillo, que la probabilidad de obtener un siete al lanzar dos dados, es $1/6$; sin embargo, nuestras pruebas empíricas, aun con un número muy grande de ensayos, darán un valor distinto. En vez de causar confusión entre los estudiantes, creemos que ésta será una valiosa lección que les dará una comprensión más profunda y más fundada de los modelos matemáticos y sus limitaciones.