

PAVIMENTAÇÕES ESFÉRICAS COM O GEOGEBRA, DESAFIOS E PROBLEMAS EM ABERTO.

Ana Maria d'Azevedo Breda, José Manuel Dos Santos Dos Santos

Universidade de Aveiro, Instituto GeoGebra Portugal

ambreda@ua.pt, dossantosdossantos@gmail.com

Núcleo temático:

Recursos para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Comunicación y divulgación matemática.

Modalidad: Conferência

Nível educativo: Universitário y Bachillerato

Palabras clave: Geometria esferica, pavimentaciones espaciales, GeoGebra.

Resumen

La teoría de las pavimentaciones esféricas ha sido un campo interesante y fructífero atrayendo, entre otros, varios matemáticos. Es un tópico transversal a varias áreas de la matemática como la geometría, el álgebra, la topología y la teoría de los números, pero también es objeto de interés para otros campos científicos como sean en química, física, arte y arquitectura. En este conferencia, vamos a utilizar GeoGebra para describir algunas pavimentaciones esféricas monohedrales, así como para inferir algunas conjeturas acerca de algunas preguntas abiertas en esta área.

INTRODUÇÃO

A eficiência de arranjos e padrões (empacotamentos, coberturas e pavimentações) têm sido objeto de estudo de muitas e muitas gerações de matemáticos. Na verdade já Euclides e Arquimedes se interessavam por este tipo de questões. As pavimentações esféricas lado a lado por polígonos congruentes (monoédricas) têm sido extensivamente estudadas, estando o caso triangular completamente classificado (Sommerville, 1924; Ueno & Agaoka, 2002).

O nosso objetivo é usar o GeoGebra para gerar e visualizar, numa primeira fase, uma qualquer pavimentação esférica triangular regular, seguindo-se uma outra etapa que é a de considerar um outro tipo de polígono esférico, não necessariamente convexo, para protótipo da pavimentação.

Numa primeiro momento veremos como usar as ferramentas do GeoGebra relacionadas com as transformações geométricas do espaço que preservam a esfera, para obter pavimentações monoédricas da esfera. Iremos também descrever como obtivemos novas ferramentas do GeoGebra para o desenvolvimento da geometria esférica.

PAVIMENTAÇÃO OCTAÉDRICA DA ESFERA NO GEOGEBRA E TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS NO ESPAÇO.

Usando parametrizações podemos colorir os oito octantes que correspondem aos oito triângulos esféricos que constituem a pavimentação monoédrica octaédrica da esfera. (veja-se a figura 1). Uma das possibilidades é usar o comando superfície lateral, de várias formas usando oito vezes este comando e colorindo os triângulos esféricos com diferentes cores.

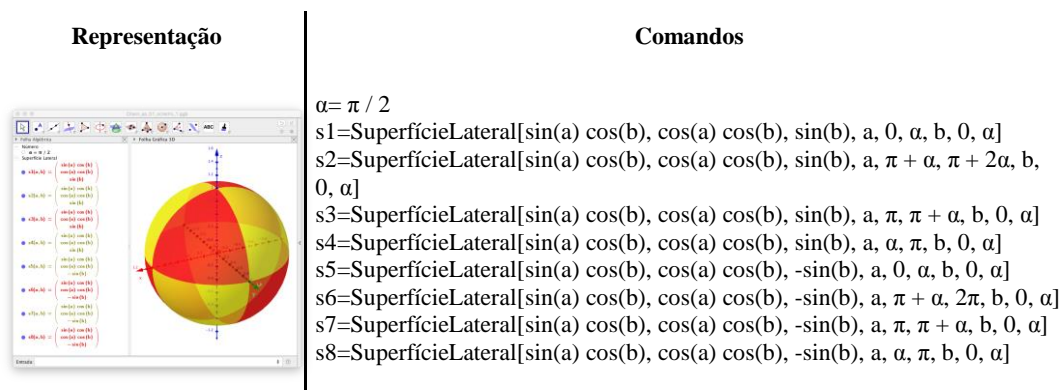
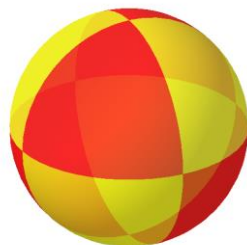


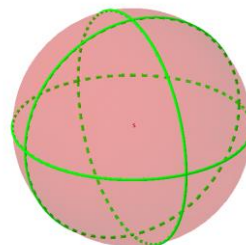
Figura 1. Pavimentação octaédrica da esfera definida com o comando superfície lateral.

Uma outra forma de construir a aplicação da figura 1 é utilizar isometrias esféricas. Para tal usamos duas cores diferentes para o primeiro e segundo triângulos esféricos e construímos os restantes por rotações e roto-reflexões dos dois triângulos esféricos (figura 2a).



$\alpha = \pi / 2$
 $s1 = \text{SuperfícieLateral}[\sin(a) \cos(b), \cos(a) \cos(b), \sin(b), a, 0, \alpha, b, 0, \alpha]$
 $s2 = \text{SuperfícieLateral}[\sin(a) \cos(b), \cos(a) \cos(b), \sin(b), a, \pi + \alpha, \pi + 2\alpha, b, 0, \alpha]$
 $s3 = \text{Rotação}[s1, 2\alpha, \text{EixoOz}]$
 $s4 = \text{Rotação}[s2, 3\alpha, \text{EixoOz}]$
 $s5 = \text{Rotação}[\text{Reflexão}[s1, z=0], \alpha, \text{EixoOz}]$
 $s6 = \text{Rotação}[\text{Reflexão}[s2, z=0], \alpha, \text{EixoOz}]$
 $s7 = \text{Rotação}[\text{Reflexão}[s1, z=0], 3\alpha, \text{EixoOz}]$
 $s8 = \text{Rotação}[\text{Reflexão}[s2, z=0], 3\alpha, \text{EixoOz}]$

Figura 2a - Pavimentação da esfera invariante pelo grupo de rotorreflexão de ângulo $\pi / 2$ num equador.



$\alpha = \pi / 2$
 $s = \text{Esfera}[(0,0,0),1]$
 $a1 = \text{ArcoCircular}[(0, 0, 0), (1, 0, 0), (0, 0, 1)]$
 $a2 = \text{ArcoCircular}[(0, 0, 0), (1, 0, 0), (0, 1, 0)]$
 $a3 = \text{ArcoCircular}[(0, 0, 0), (1, 0, 0), (0, 0, -1)]$
 $F1 = \{a1, a2, a3\}$
 $\text{Arestas} = \text{Seqüência}[\text{Rotação}[F1, k \alpha, \text{EixoOz}], k, 0, 4]$

Figura 2b - Pavimentação da esfera invariante pelo grupo de simetrias do octaedro regular.

Figura 2. Pavimentações octaédricas, semelhanças e diferenças.

Na figura 2b, observamos a esfera dividida por três grandes círculos da esfera. Na geometria esférica estes três círculos correspondem a três retas esféricas que se intersectam segundo ângulos retos. A esfera encontra-se dividida em oito triângulos esféricos congruentes, equiláteros e de ângulos retos. As representações da figura 2 de pavimentações da esfera são distinguíveis pelos seus grupos de simetria. Para estudar as pavimentações da esfera é importante reconhecer alguns elementos da geometria esférica para além de interpretar o efeito das transformações geométricas do espaço que são isometrias da esfera, assunto que abordaremos de seguida de modo sumário.

ELEMENTOS DE GEOMETRIA ESFÉRICA E NOVAS FERRAMENTAS NO GEOGEBRA

Na geometria esférica os elementos primitivos "ponto" e "reta" são modelados, respetivamente, por pontos da esfera $S = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3: x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ e círculos obtidos pela interseção de S com planos que passam por $(0,0,0)$.

Para obtermos os pontos esféricos podemos usar a ferramenta ponto \bullet^A e os comandos $A=PontoEm[S]$. Dados dois pontos distintos, não antípodas, A e B , sobre uma esfera², S , existe um e um único grande círculo, r , que os contém, no GeoGebra a representação da reta AB será dada por:

$$r=Circunferência[Centro[S],A,Plano[Centro[S],A,B]].$$

Se quisermos representar o segmento esférico AB a sua representação seria:

$$AB=ArcoCircular[Centro[S],A,B,Plano[Centro[S],A,B]].$$

Um polígono esférico corresponde a uma região da superfície esférica delimitada por segmentos esféricos, podendo estes ser côncavos ou convexos.

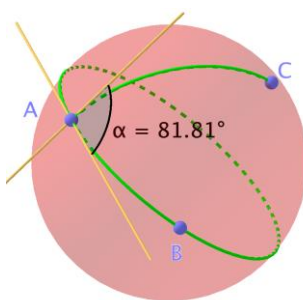


Figura 3. Pontos, retas, segmentos de reta e ângulos em geometria esférica.

Um outro elemento importante na geometria esférica são os ângulos entre segmentos esféricos. Dados três pontos A , B e C sobre a esfera o ângulo BAC corresponde ao ângulo formado pela tangentes ao segmento esférico AB e ao segmento esférico AC no vértice A . No caso da aplicação que ilustramos na figura 3, o ângulo foi encontrado usando o comando:

$$\alpha=\hat{\text{Ângulo}}[Tangente[A,ArcoCircular[Centro[S],A,C,Plano[Centro[S],A,C]]],Tangente[A,Circunferência[Centro[S],A,Plano[Centro[S],A,B]]]].$$

Seguindo esta lógica de construção de objetos criamos uma série de ferramentas no GeoGebra que nos permitem de um modo rápido criar segmentos, medir distâncias e ângulos sobre a esfera de modo a poder construir diferentes configurações para posterior estudo (ver figura 4).

² Vamos assumir sem perda de generalidade que a nossa esfera, S , tem raio unitário e é centrada na origem do referencial, no GeoGebra iniciamos as nossas aplicações usando o comando $S=Esfera[(0,0,0),1]$.

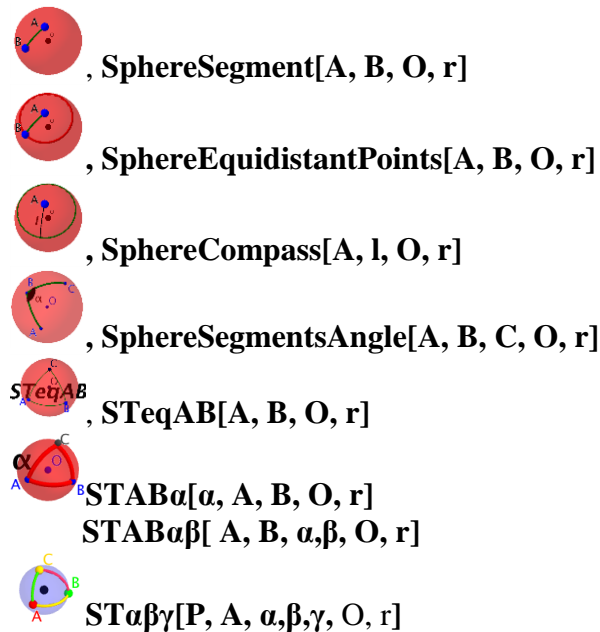


Figura 4. Ferramentas e comandos³ para a geometria esférica no GeoGebra.

ISOMETRIAS DA ESFERA

As isometrias esféricas são transformações da esfera na esfera que preservam a distância esférica (distância induzida na esfera pela distância euclidiana em \mathbf{R}^3).

As isometrias esféricas são rotações em torno de um eixo que passe pelo seu centro (fig. 5a); reflexões em plano que passem pelo seu centro (fig. 5b), composições de uma reflexão num plano que passe pelo seu centro seguida de uma rotação em torno de um eixo perpendicular a este plano que passe pelo centro (fig. 5c) e uma qualquer composição das isometrias já referidas.

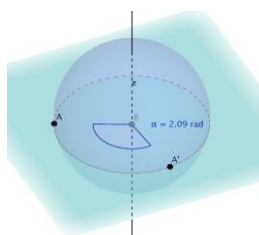


Figura 5a - Rotação

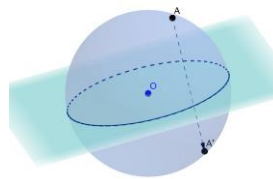


Figura 5b - Reflexão

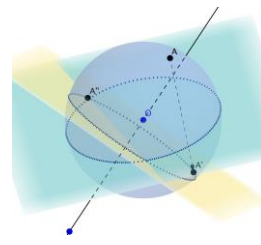


Figura 5c - Rotorreflexão

Figura 5. Isometrias da esfera.

³ Os comandos foram criados na versão inglesa. Caso estes prototipos passem a versão oficial poderão passar a figurar em diversos idiomas.

A imagem A', B', C' de 3 pontos esféricos, A, B, C não pertencentes a um mesmo grande círculo determinam univocamente uma isometria esférica, f , que satisfaz, $f(A)=A', f(B)=B', f(C)=C'$.

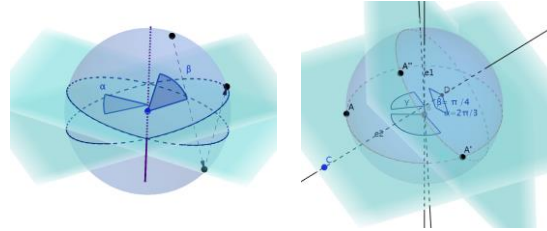


Figura 6. Composição de duas reflexões em planos que passem pelo centro da esfera. Como podemos observar, na figura 6, a composição de duas reflexões em planos que passem pelo centro da esfera é uma rotação em torno da reta obtida pela interseção dos dois planos de reflexão.

LUGARES GEOMÉTRICOS EM GEOMETRIA ESFÉRICA COM A FERRAMENTA COMPASSO ESFÉRICO

Na geometria euclidiana as construções com régua e compasso desempenham um lugar de destaque. Com a ferramenta compasso esférico podemos explorar na geometria esférica, situações análogas.

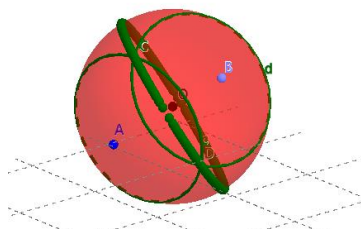


Figura 7a - Mediatriz de um segmento esférico.

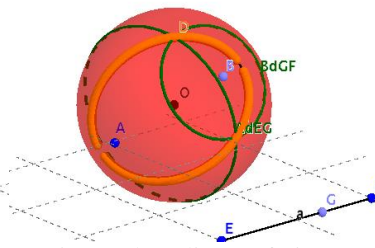


Figura 7b - Elipse esférica.

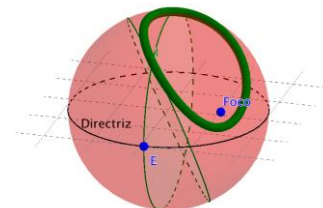


Figura 7c - Parábola esférica.

Figura 7. Aplicações da ferramenta compasso esférico.


Uma das construções mais simples da geometria euclidiana corresponde à mediatriz de um “segmento de reta”. Na esfera, de centro O e raio r , com a ferramenta compasso esférico, podemos fazer o mesmo tipo de construção. Assim, considerando dois pontos A e B sobre a

esfera e dada uma distancia l , a partir de um seletor, definindo o ponto P com o comando $Interceção[SphereCompass[A, l, O, r], SphereCompass[B, l, O, r]]$, P corresponde ao conjunto de todos os pontos esféricos equidistantes de A e de B , que é precisamente o grande círculo perpendicular ao segmento esférico AB (ver a figura 7a) que passa pelo ponto médio de AB .

De modo análogo, dados dois pontos A e B , sobre a esfera, e uma distância adequada l , podemos utilizar a ferramenta compasso esférico para construir o conjunto dos pontos P , sobre a esfera, tais que $d_e(P, A) + d(P, B) = l$. Este conjunto de pontos corresponde à “*elipse esférica*” que se ilustra na figura 7b.

As noções de retas e parábolas (curvas não limitadas no aberto \mathbf{R}^2) e a utilização da ferramenta compasso esférico permitem facilmente visualizar as noções equivalentes, no compacto \mathbf{S}^2 , que correspondem a curvas fechadas sobre a esfera.

DA FERRAMENTA $STeqAB[A, B, O, R]$ ÀS PAVIMENTAÇÕES ESFÉRICAS REGULARES

Uma das aplicações da ferramenta , ou do comando $STeqAB[A, B, O, r]$, é explorar pavimentações esféricas por triângulos equiláteros. Um dos problemas clássicos é a pavimentação da esfera por triângulos congruentes, que se justapõem lado a lado.

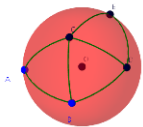
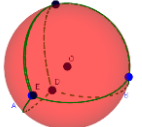
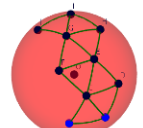
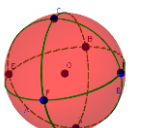
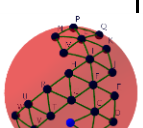
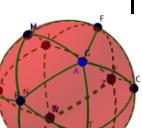
N.º de triângulos equiláteros	Num hemisfério	Comprimento do segmento AB	Fecho sobre a esfera	Comprimento do segmento AB
3		1,05 rad		1,908 rad (v.a.) $\arccos(\frac{-1}{3})$ ou $2\arctan(\sqrt{2})$ (v.e.)
8		0,64 rad		1,574 rad (v.a.) $\frac{\pi}{2}$ (v.e.)
20		0,40 rad		1,107 rad (v.a.) $2\arcsin(\frac{\sqrt{5}-\sqrt{5}}{\sqrt{10}})$ (v.e.)

Figura 8. Configurações de triângulos esféricos congruentes

De facto diversas destas configurações, num hemisfério, por aumento do comprimento do seu lado, podem originar fechos que originam pavimentações esféricas regulares. A figura 8 ilustra este processo, onde se demonstra a mais-valia da utilização da ferramenta, pois permite uma exploração simples e eficiente das pavimentações esféricas regulares.

PAVIMENTAÇÕES ESFÉRICAS COMO AÇÃO GLOBAL OU LOCAL DE GRUPOS DE SIMETRIAS ESFÉRICAS

Nas seções anteriores mostramos como podemos obter pavimentações regulares da esfera, vejam-se as figuras 2b e 8, estas estão relacionadas com poliedros regulares e com os seus grupos de simetria. Nestes casos a partir de um triângulo esférico e pela ação global de um grupo de simetrias podemos obter toda a pavimentação.

Vejamos um outro exemplo de uma ação global de um grupo de simetrias sobre um triângulo esférico e a pavimentação obtida. Consideremos: i) um eixo, e , da esfera S ; ii) um ponto A_1 , tal que $A_1 \in S$ e $A_1 \notin e$; iii) escolha-se um dos pontos P , tal que $P \in e \cap S$; iv) o ângulo $\alpha = \frac{2\pi}{n}$, $n \in \mathbf{N}$ e $n > 3$; v) seja $(A_n)_{n \in \mathbf{N}}$ a órbita do ponto A_1 obtida pela ação do grupo das rotações da esfera de ângulo α em torno ao eixo e . Nestas condições, obtemos uma pavimentação da esfera constituída por um n -gono esférico e n triângulos esféricos congruentes cujo protótipo é $[A_1A_2P]$. Esta pavimentação é gerada pelo grupo cíclico de ordem n . No caso da figura 9 temos como grupo de simetrias o grupo cíclico de ordem 8, C_8 , sendo a pavimentação esférica constituída por nove polígonos esféricos, um octógono e oito triângulos, esta pavimentação está associada a uma pirâmide octogonal reta.

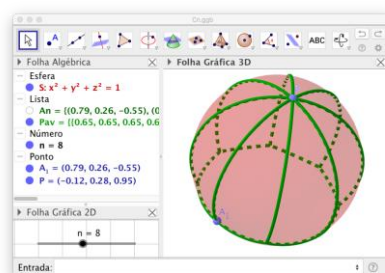


Figura 9. Aplicação de GeoGebra para obter uma pavimentação da esfera invariante por um grupo cíclico de ordem igual ao valor do seletor n .

A ideia base para a construção deste tipo de pavimentações é usar o comando sequência para modelar a órbita de pontos. Assim, para modelar a órbita de A_1 usamos uma sequência de comandos com uma sintaxe semelhante a:

$$An = \text{Sequência}[\text{Rotação}[A_1, 2\pi i / n, \text{Reta}[\text{Centro}[S], P]], i, 0, n, 1]$$

Por outro lado, para obtermos os segmentos esféricos, que constituem os lados dos polígonos da pavimentação, usamos a lista:

$$PAV = \{ \text{Sequência}[\text{ArcoCircular}[\text{Centro}[S], \text{Elemento}[An, i], \text{Elemento}[An, i + 1]], i, 1, n, 1], \text{Sequência}[\text{ArcoCircular}[\text{Centro}[S], \text{Elemento}[An, k], P], k, 1, n, 1] \}.$$

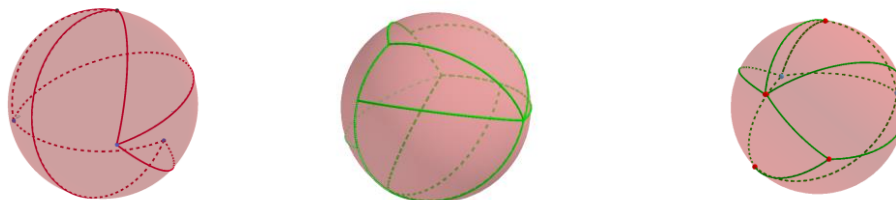


Figura 10a - Pavimentação com 4 triângulos congruentes e não convexos.

Figura 10b - Pavimentação com 8 triângulos que se agrupam dois a dois.

Figura 10c- Pavimentação obtida com a ferramenta STAB $\alpha\beta$ com seis triângulos, um quadrilátero, e dez ângulos distintos.

Figura 10. Outras Pavimentações esféricas.

Existem muitas outras pavimentações esféricas que podem ser “*encontradas*” pela análise da ação local de (sub)grupos de isometrias esféricas. Estas pavimentações são menos conhecidas e muitas estão ainda por estudar.

As pavimentações por polígonos esféricos não convexos (Fig. 10a) é um dos casos ainda pouco estudados. As pavimentações que podem integrar mais do que um tipo de polígono esféricos (não necessariamente regulares (Fig. 10c) e não necessariamente convexos) é outro caso ainda pouco explorado. As aplicações do GeoGebra, até agora construídas, permitem a visualização e o estabelecimento de relações que, em muito, podem contribuir na investigação nesta área. É nesta grande variedade de configurações/relações, que acreditamos que o GeoGebra pode dar um contributo substancial na descrição e construção de pavimentações esféricas ainda não exploradas, para além de ser um recurso de grande utilidade no estudo da geometria esférica em geral.

AGRADECIMENTOS

Trabalho realizado no campo de ação da Linha Temática Geometrix, com apoio parcial de fundos Portugueses através do CIDMA - Centro de Investigação e Desenvolvimento em Matemática e Aplicações, e da Fundação Portuguesa para a Ciência e Tecnologia (FCT), no âmbito do projeto UID/MAT/04106/2013.

REFERÊNCIAS

Sommerville, D. M. Y. (1924). VI.—Division of Space by Congruent Triangles and Tetrahedra. Proceedings of the Royal Society of Edinburgh, 43, 85-116.

Ueno, Y., & Agaoka, Y. (2002). Classification of tilings of the 2-dimensional sphere by congruent triangles. Hiroshima Mathematical Journal, 32(3), 463-540.