

MC-1.398

## **La geometría plana en la educación primaria: más allá del cálculo de perímetros y áreas**

María de los Ángeles Rueda Portilla – Daniel Ruiz Aguilera  
manangels@gmail.com – daniel.ruiz@uib.es

CEIP Son Anglada, Palma, Mallorca – Universitat de les Illes Balears, Palma, Mallorca

Núcleo temático: V. Recursos para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas

Modalidad: MC

Nivel educativo: Nivel educativo primario (6 a 11 años)

Palabras clave: geometría, transformaciones, teselaciones, materiales manipulativos

### **Resumen**

*Este mini curso tratará sobre la geometría plana desde una perspectiva completa y actualizada, siguiendo diferentes modelos teóricos y trabajos de diferentes autores. Se analizarán los siguientes contenidos desde el punto de vista didáctico: clasificaciones de figuras planas, transformaciones geométricas proyectivas (homotecias), transformaciones geométricas métricas (traslaciones, giros y simetrías) y teselaciones del plano. Después del análisis didáctico se comentarán estrategias metodológicas para trabajar dichos contenidos en el aula de educación primaria, partiendo siempre, según Alsina, desde el contexto cercano al alumno, para ir trabajando poco a poco los conceptos geométricos desde un punto de vista más abstracto. Se presentarán diferentes materiales manipulativos y recursos digitales, que incrementan de forma sustancial la visualización y comprensión de los contenidos geométricos. Algunos de estos materiales serán objetos de uso cotidiano, material elaborado por el docente, y material comercializado, como los bloques geométricos (pattern blocks), el tangram o el geoplano. La dinámica que se seguirá será combinada, entre la presentación y análisis de contenidos teóricos, y la manipulación de materiales y recursos.*

### **1. ¿Qué geometría trabajar en la escuela?**

La geometría forma parte de los conocimientos básicos que cualquier persona debería adquirir a lo largo de su escolarización. La capacidad de orientarse, la de reconocer y describir objetos del entorno, la de clasificar en función de criterios de forma y la de establecer relaciones entre formas son algunas de las habilidades que se deben adquirir dentro

185

de la competencia matemática, y que corresponden al estudio de la geometría. Además, el trabajo de la geometría no debe quedar únicamente en un desarrollo utilitario de dichas habilidades, ya que es, además una herramienta magnífica para desarrollar los cinco procesos matemáticos establecidos por el NCTM (2000): representación, comunicación, razonamiento y demostración, conexiones y resolución de problemas. Desgraciadamente, la enseñanza de la geometría se ha centrado de manera muy habitual a las medidas de las figuras geométricas, siendo uno de los contenidos principales el cálculo de áreas y perímetros de los polígonos (únicamente convexos), cuando, en realidad, estos contenidos van más asociados al bloque de medida y no tanto al de geometría.

A continuación, presentaremos una secuencia didáctica de algunos de los contenidos básicos relacionados con la geometría en la educación primaria mediante actividades, algunas de M.A. Canals (2009). Se parte primero del trabajo de las formas, siendo estas los elementos básicos, incluyendo aspectos como el reconocimiento, la clasificación y la composición y descomposición. Posteriormente, se tratan las diferentes transformaciones. En palabras de Maria Antònia Canals (basándose en ideas de Z.P. Dienes y E.W. Golding, 1967): “las figuras y las transformaciones son en geometría lo que en aritmética son los números y las operaciones”. Por tanto, en geometría también se requiere de un trabajo concreto de las transformaciones para comprender en mayor profundidad las formas, al igual que conociendo las operaciones se puede ampliar la comprensión de los números. Para acabar, como ejemplo de aplicación de estos contenidos, se estudiarán algunas teselaciones del plano.

Para la elaboración de las actividades se tiene en cuenta el marco teórico de referencia establecido por Alsina (2010), en el que el trabajo de la competencia matemática debe usar como fundamento las vivencias con el propio cuerpo, la matematización del entorno y las situaciones cotidianas, además del uso de materiales manipulativos, con los que los niños pueden experimentar y comprender los contenidos que se tratan.

## **2. Conocer las figuras**

Para el conocimiento de las figuras, acciones como fijarse, reconocer y comparar son necesarias para poder tener la capacidad de relacionar dos figuras y encontrar entre ellas similitudes y diferencias. Las actividades que ayudan a conseguir este objetivo son muy diversas y abarcan desde las que se pueden realizar a partir de nuestro entorno, hasta aquellas que requieren de papel y lápiz, pasando por el sentido del tacto y la diversidad de materiales.

*a) Reconocimiento y comparación de figuras planas.* Una primera actividad que podríamos realizar con nuestros alumnos sería la de salir fuera de las aulas y observar las figuras que podemos encontrar. Preguntas que pueden ayudarles son: “¿rodaría? ¿tiene puntas? ¿tiene alguna punta hacia dentro?”. Así les ayudará a hacer una descripción precisa de las figuras planas y, por tanto, a su reconocimiento a través de dichas características.

Otra actividad es el trabajo de la geometría a través del tacto. La geometría se toca y, cuantos más sentidos involucremos en las actividades, mayor será el aprendizaje. Se trata de construir figuras planas diversas lo más planas posibles, meterlas en un saco y extraer aquella que cumpla con las instrucciones dadas. Es una actividad ideal para trabajar en parejas y que se apoya en el componente lúdico.

Finalmente podríamos pasar a una fase de representación con papel y lápiz. Aquí es importante resaltar que un cambio de medida no comporta un cambio de propiedades, así como diferenciar entre contorno y región interior. En esta primera fase de conocimiento podemos prescindir de hablar del perímetro, ya que implica medida.

*b) Clasificación.* Hay muchas maneras de clasificar las figuras planas y puede resultar muy interesante que sean los propios alumnos que creen criterios y los pongan en práctica. Algunos de estos criterios podrían ser: tipo de ángulos, número de lados, diagonales, concavidad y convexidad, si tienen líneas curvas o rectas.

El maestro creará un conjunto de figuras en función de las propiedades que quiera trabajar. Para el caso de la clasificación de cuadriláteros el geoplano es un buen material (en su versión digital, Math Learning Center, 2017). El reto consiste en obtener todas las posibilidades en

un geoplano de 9 puntas. Una vez descubiertas, se pueden representar en una trama cuadrada (WorkSheetWorks, 2017). Otro material muy útil es el metacrilato. Se realizan unas plantillas concretas y se van superponiendo para obtener diferentes posibilidades de cuadriláteros (Canals, 2009).

c) *Composición y descomposición.* Después de un primer contacto con la geometría plana, la composición y la descomposición de figuras es nuestro próximo objetivo. Tanto se puede partir de figuras pequeñas para crear grandes, como a partir de grandes extraer las pequeñas. Este tipo de actividades que poseen un componente lúdico aportan un mejor conocimiento y descubrimiento de las propiedades. Además, el hecho de componer y descomponer figuras requiere de una anticipación para poder llegar al resultado óptimo, Esta anticipación nos ayudará en los futuros problemas de geometría. Algunos materiales que nos posibilitan estos objetivos son los geoplanos, los *pattern blocks*, pentominós, tangrams.

### **3. Las transformaciones geométricas**

Toda vez que ya se empieza a tener cierto conocimiento de las figuras, podemos abordar las operaciones que transforman dichas figuras. Igual que sucede en aritmética, se puede considerar que las transformaciones son las operaciones de la geometría. Dependiendo de su carácter, se pueden clasificar en tres grupos: las topológicas, las proyectivas y las métricas. De hecho, estos tres grupos son equivalentes a acciones que podemos hacer con objetos de la vida cotidiana. Las topológicas se asocian a estirar y deformar, las proyectivas a realizar sombras y las métricas al movimiento y a los reflejos.

#### **3.1 Las transformaciones topológicas**

Las deformaciones elásticas son aquellas que deforman las figuras siguiendo las bases de la topología: podemos estirar y contraer, sin llegar a cortar ni a deshacer.

Ejemplos para estudiar estas transformaciones son las gomas elásticas, el dibujo de figuras en la superficie de un globo e hincharlo y la elaboración de formas con barro.

Luego de realizar alguna de estas transformaciones será interesante trasladar las preguntas que ayudarán a comprender el carácter de dichas transformaciones: “¿qué ha cambiado? ¿qué se mantiene igual?”. En todas ellas podemos ver que la variación se produce en: las longitudes, los ángulos y, por tanto, las formas, pero en cuanto a los aspectos que mantienen invariantes son el número de regiones y la posición entre ellas.

### **3.2 Las transformaciones proyectivas**

Las transformaciones proyectivas se producen a partir de un foco de luz. En este caso, las figuras quedan modificadas siguiendo unas características muy diferentes a las transformaciones topológicas y las métricas.

Para trabajar estas transformaciones se pueden proponer actividades con linternas, en las que el foco de luz se puede mover, o bien con las sombras que se generan por el sol. Por ejemplo, se puede pedir a los niños qué figuras aparecen al proyectar con un foco un cuadrado.

Un caso concreto de estas transformaciones son las homotecias, cuando el foco se mantiene en el plano de la figura geométrica, o bien se sitúa de manera perpendicular. Ejemplos de homotecias son las que producen las fotocopiadoras cuando se hace una ampliación o reducción, o bien cuando se amplía o reduce una imagen usando algún programa informático.

### **3.3 Las transformaciones métricas**

Las transformaciones métricas mantienen las distancias entre puntos. Por tanto, en estas transformaciones la forma no se ve alterada. Entre las transformaciones métricas se encuentran las traslaciones, los giros y las simetrías. Las traslaciones y los giros deberían ser las primeras en ser estudiadas, ya que los movimientos de los objetos y de las personas en su día a día corresponden únicamente a traslaciones y giros.

*a) Traslaciones.* Una traslación se define a partir de una dirección y una longitud, es decir, lo que llamamos un vector. Se puede vivenciar de manera muy clara estos movimientos dibujando en el suelo unos ejes cartesianos, en los que cada uno de los alumnos se sitúe en un punto. En este caso se darán instrucciones de movimiento: “moverse dos a la derecha y

uno hacia adelante”. Los geoplanos o las tramas cuadrículadas pueden ayudar al trabajo de las traslaciones, al dibujar una figura y trasladarla mediante un vector. Un material de muy reciente aparición son los robots programables (Blue-Bot) donde sus instrucciones coinciden con las traslaciones.

*b) Giros.* Las rotaciones se necesitan tres elementos para definirlos: un punto (llamado centro), un ángulo y un sentido. En esta transformación es esencial el concepto de ángulo. Se puede trabajar de forma vivencial con actividades en las que haya movimientos con el propio cuerpo. Las instrucciones, en este caso, pueden ser alrededor de circunferencias pintadas en el suelo, en las que estén marcados diferentes ángulos (múltiplos de  $30^\circ$ , por ejemplo), y en el que los mismos niños puedan observar que girar  $30^\circ$  en sentido antihorario no significa que se tenga que caminar la misma longitud.

Otra forma de trabajar los giros es con papel cebolla y encuadernadores: se dibuja en un folio una figura, se marca un centro con el encuadernador, y se fija un ángulo y un sentido centrado en el encuadernador. A continuación, se dibuja la figura en el papel cebolla y posteriormente se gira siguiendo dicho ángulo, y se traslada la figura.

*c) Simetrías.* En el caso de las simetrías el estudio es mucho más profundo. En realidad, la simetría axial se debe trabajar a partir de la comprensión de la transformación. Se debe seguir una propiedad muy determinada: cada punto de la figura inicial se traslada al otro lado del eje de simetría en la recta perpendicular al eje, a la misma distancia. Hay que ser consciente que dicha propiedad es de una complejidad muy elevada y que, por tanto, se debe ir trabajando en diferentes situaciones y diferentes niveles de dificultad: cuando el eje de simetría es paralelo y toca uno de los lados de la figura; cuando el eje toca únicamente uno de los vértices de la figura y cuando el eje atraviesa la figura.

Entre los materiales que se pueden usar para el trabajo de las simetrías tenemos los espejos. Siguiendo con el paralelismo de las operaciones, se podría decir que el espejo es la “calculadora de la simetría”. Es muy destacable un material de Proyecto Sur en el que se

presenta una figura inicial con diferentes figuras después de transformarlas a partir de un eje de simetría que las atraviesa. Se trata, entonces, de colocar el espejo para conseguir la figura transformada. Otro material adecuado es una plancha de metacrilato rojo en la que, por una parte, se refleja la figura que se quiere transformar, y por otra se transparenta la figura que se coloca como resultado.

#### **4. La teselación del plano**

El trabajo de la teselación del plano es un claro ejemplo de uso las transformaciones métricas, y una actividad muy rica desde el punto de vista creativo y de generación de patrones. Se trata de, dada una figura inicial (o figuras), transformarla mediante traslaciones, giros y simetrías, para poder rellenar el plano, o una superficie limitada.

Un material muy versátil son los bloques geométricos (*pattern blocks*), con el que se puede trabajar las teselaciones (Riera y otros, 2015). Existen diferentes versiones para una manipulación virtual (por ejemplo, Math Learning Center, 2017).

*a) Teselaciones con polígonos regulares.* En esta primera actividad se pondría a disposición de los alumnos un conjunto de diferentes polígonos regulares con la intención de que, usando un único tipo de polígonos, puedan rellenar el plano. Se hará evidente que con los triángulos equiláteros, cuadrados y hexágonos regulares es posible, aunque con el resto de figuras (pentágonos o decágonos) no lo es. Posteriormente se representa sobre el papel, en el que deberán trasladar sus ideas intuitivas.

*b) Teselaciones con cuadriláteros.* Estamos muy acostumbrados a las representaciones de cuadriláteros convexos, pero es del todo necesario trabajar con cuadriláteros cóncavos. La pregunta, en este caso, sería: ¿se puede embaldosar el suelo con un cuadrilátero cóncavo? A partir de la manipulación se puede llegar a la conclusión de que con ambas figuras es posible. Será el momento de representar gráficamente la teselación obtenida y de explicar con sus palabras una forma de embaldosar.

c) *Teselaciones con otros polígonos*. Se puede proponer una actividad abierta, en la que se deba construir una teselación (embaldosado) siguiendo un patrón que ellos mismos establezcan, o bien continuar una ya empezada. En este último caso se trata de observar qué reglas se pueden establecer para poder continuar con la construcción.

## 5. Conclusiones

En este trabajo hemos visto cómo el estudio de la geometría puede hacerse a partir de las vivencias y las situaciones cotidianas, así como la presentación de diferentes materiales y recursos que pueden ayudar a interiorizar los conceptos geométricos, a reflexionar sobre ellos y a construir las definiciones y propiedades geométricas.

## Referencias bibliográficas

Alsina, A. (2010). La “pirámide de la educación matemática”. Aula de Innovación Educativa, 189, 12-16.

Canals, M.A. (2009). *Superficies, volúmenes y líneas*. Los Dossiers de María Antonia Canals, 105. Barcelona: Ediciones Rosa Sensat.

Canals, M.A. (2009). *Transformaciones geométricas*. Los Dossiers de María Antonia Canals, 106. Barcelona: Ediciones Rosa Sensat.

Dienes, Z.P., Golding, E.W. (1967). *La geometría a través de las transformaciones. 1: Topología. Geometría proyectiva y afín*. Barcelona: Editorial Teide.

Dienes, Z.P., Golding, E.W. (1967). *La geometría a través de las transformaciones. 2: Geometría euclidiana*. Barcelona: Editorial Teide.

Riera, J.V., Rueda, M.A., Ruiz, D. (2015). *Mosaicos con pattern blocks*. 17 Jornadas sobre el Aprendizaje y la Enseñanza de las Matemáticas. Cartagena: Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas, FESPM. Sociedad de Educación Matemática de la Región de Murcia, SEMRM.

<http://17jaem.se.mrm.com/aportaciones/n147.pdf>

The Math Learning Center (2017). Geoboard for iPad, Web, and More  
<https://www.mathlearningcenter.org/resources/apps/geoboard> Consultado 25/05/2017.



The Math Learning Center (2017). Pattern Shapes for iPad, Web, and More

<https://www.mathlearningcenter.org/resources/apps/pattern-shapes>

Consultado 25/05/2017.

The National Council of Teachers of Mathematics - NCTM. (2000). *Principios y estándares para la educación matemática*. Sevilla: Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales.

Worksheetworks.com Team (2017). Graph paper. Consultado 25/05/2017.

<https://www.worksheetworks.com/miscellanea/graph-paper.html>