

LA BALANZA

Irene Esclapez Sempere

Iñaki Linares Rabasco

Maria Pizana Iniesta

Yaiza-Rita Segarra Valentí,

Diana Valero Ferrández,

1. La balanza

La enseñanza de las matemáticas no solo debe tener como objetivo que los alumnos aprendan contenidos y procedimientos, sino que los comprendan y se interesen por su aprendizaje. Muchos estudiantes muestran un bajo interés por las matemáticas debido al método de enseñanza o porque no entienden la importancia y el significado de las matemáticas en la vida cotidiana. Según Alsina (2004), una de las causas de esta situación es el escaso uso de materiales didácticos dentro de las aulas. Los materiales y recursos didácticos permiten a los alumnos construir sus conocimientos, por lo que se conseguirá que aprendan de manera significativa, modelizando ideas, consolidando conceptos y ejercitando procedimientos que les permitirán resolver problemas (González, 2010). Pero, es importante conocer las funciones de los diferentes materiales, puesto que no todos sirven para enseñar todos los contenidos. Asimismo, debemos proponernos un objetivo de aprendizaje claro ya que no es suficiente el uso de materiales para que los niños alcancen los contenidos a los que se aspiran. En nuestro caso, hemos elegido la balanza de dos platos como material didáctico (Figura 1).

Este recurso está formado por dos platos sujetos a una barra horizontal sustentada por el centro, que se equilibra cuando ambos alcanzan el mismo nivel. Según el diccionario de la Real Academia Española se define como “*instrumento que sirve para pesar o, más propiamente, para medir masas.*” Ese es el uso más extendido de la balanza, pero no el único.



Figura 1. La balanza

1.1 Contenidos matemáticos cuyo aprendizaje se puede potenciar con la balanza

Además de pesar masas, podemos utilizarla para que el alumnado comprenda la propiedad de conservación de la materia, o también, para que se familiarice con las igualdades y desigualdades de números, las descomposiciones numéricas y algunas propiedades de las operaciones aritméticas básicas (suma, resta, multiplicación y división) como la propiedad conmutativa de la suma ($a + b = b + a$), la propiedad

asociativa $((a + b) + c = a + (b + c) \dots)$, la propiedad conmutativa de la multiplicación $(a \times b = b \times a)$.

Nuestra propuesta va a estar orientada a la utilización de la balanza para estudiar las igualdades numéricas y, a partir de estas apoyar el desarrollo del pensamiento relacional. El pensamiento relacional se puede entender como “actividad o acción intelectual de examinar y buscar relaciones entre objetos matemáticos, reflexionar y utilizar dichas relaciones con una intencionalidad, como puede ser resolver un problema, tomar una decisión o aprender más sobre la situación o los conceptos involucrados” (Molina, 2007, p. 2). Algunos autores como Seo y Ginsburg (2003) sugieren, como recomendación para favorecer la comprensión del signo igual como equivalencia, la modelización de dicho significado mediante el uso de este recurso. Además, como la balanza funciona por equilibrio cuando existe una relación de igualdad entre los dos brazos, consideramos que el cálculo y las equivalencias llegan a ser completamente representativas y entendibles.

2. Diseño de la propuesta

La propuesta está destinada a los alumnos de 3º curso de Primaria, con edades comprendidas entre 8-9 años. Según Piaget (1981), los niños, a estas edades, se encuentran en la etapa de las operaciones concretas. Por ello, ya van siendo capaces de resolver problemas aplicando reglas lógicas y operaciones mentales básicas. Por otro lado, algunos estudios previos (Empson, Levi y Carpenter, 2011; Molina, 2007) indican que alumnos de estas edades son capaces de establecer relaciones entre los números, aplicando un significado distinto al signo igual como operación. Sin embargo, se sigue encontrando un gran número de alumnos que ve el signo igual solo como resultado de una operación y no como una equivalencia. Esto puede dificultar el establecimiento de relaciones entre las cantidades dadas al resolver operaciones a ambos lados del signo igual.

La propuesta está planteada para un aula de unos 24 alumnos, organizados en grupos de cuatro, hecho que favorecerá el trabajo cooperativo. Consta de 3 actividades, algunas de ellas con varias secuencias diferentes. Con este planteamiento, nos proponemos que los alumnos doten al signo igual el significado de equivalencia. Además, pretendemos que puedan comenzar a desarrollar el pensamiento relacional,

cuando resuelvan diferentes problemáticas, con el uso de la balanza como material didáctico.

Los objetivos propuestos son:

- Dotar al signo igual el significado de equivalencia mediante el uso de la balanza.
- Desarrollar una visión relacional del signo igual, en el que los alumnos establezcan estrategias de compensación y reconocimiento de transformaciones de simplificación.
- Resolver secuencias con operaciones simples a ambos lados del signo igual sin necesidad de realizar operaciones ($a+b = c+d$).

Los contenidos son:

CONCEPTUALES	PROCEDIMENTALES	ACTITUDINALES
-Signo igual como expresión de equivalencia. -Visión relacional del signo igual.	-Uso de la balanza. -Resolución de secuencias con operaciones a ambos lados del signo igual, cuyas operaciones sean sumas.	-Reflexión sobre la estrategia empleada en la resolución de la secuencia.

La principal competencia que se desarrolla mediante las actividades planteadas, es la matemática. Por tanto, nos centraremos en las dimensiones implicadas en ella, que son las siguientes:

- *Comprensión conceptual*, al desarrollar el significado del signo igual como expresión de equivalencia y potenciando el pensamiento relacional en la resolución de secuencias de operaciones.
- *Desarrollo de destrezas procedimentales*, se refiere a cuando el estudiante es capaz de saber cómo y cuándo usar los procedimientos matemáticos de manera apropiada. Por tanto, se trata de que sepa resolver los diferentes tipos de secuencias (operación igual a resultado, resultado igual a operación y operaciones a ambos lados del signo igual) mediante el uso de la balanza y las piezas de lego (que representan los números de las secuencias), teniendo en cuenta el significado del signo igual. Para ello deben descubrir que cada lado de la balanza representa una operación a cada lado del signo igual, entonces cuando ambos platos se encuentren equilibrados será cuando hayan resuelto correctamente la secuencia propuesta.
- *Capacidades de comunicar y explicar matemáticamente*, se desarrolla cuando los alumnos justifican, de manera escrita y oral, los conceptos y procedimientos que ha utilizado para resolver las diferentes secuencias. Cada grupo de alumnos

explicará oralmente al resto de compañeros cómo la ha resuelto. De esta manera, el docente podrá comprobar en qué nivel de desarrollo del pensamiento relacional se encuentran.

- *Pensamiento estratégico: resolver problemas*, esta competencia se desarrolla cuando a los alumnos se les propone resolver secuencias numéricas, a partir de las cuales, tienen que utilizar diferentes estrategias para resolverlas. Por ejemplo, el alumno puede realizar las secuencias con el uso de la balanza y el material manipulativo por ensayo error, es decir ir colocando o quitando piezas hasta conseguir que ambos lados se equilibren. También podrán utilizar estrategias de compensación, por ejemplo $30+20=40 + _$. La respuesta es 10 menos que 20, ya que 40 son 10 más que 30. Por tanto, el número que falta es el 10.
- *Actitudes positivas en el alumno en relación con sus propias capacidades matemáticas*, cuyo desarrollo viene apoyado por el uso de materiales manipulativos, en este caso a la balanza, ya que permite que los alumnos le den significado de equivalencia del signo igual. Además, la posibilidad de resolver secuencias con diferentes niveles de exigencia matemática también permite generar actitudes positivas.

2.1. Trayectoria de aprendizaje

En nuestra propuesta vamos a trabajar dos aspectos que están entrelazados. Partiremos de los diferentes significados que se le puede dar al signo igual para desarrollar el pensamiento relacional. Molina (2007) diferencian, entre otros, el signo igual como operador y como expresión de una equivalencia numérica. El primer significado, “hace referencia al uso de dicho signo como un símbolo que separa una cadena de operaciones, que se sitúan a la izquierda del signo igual, y su resultado, a la derecha”. En cambio, el signo igual como equivalencia “las expresiones que se disponen a ambos lados se refieren al mismo valor numérico, es decir, representan a un mismo número.

Por ejemplo, $(4+5=3+6)$ ”. Por otro lado, para desarrollar el pensamiento relacional, Matthews et al. (2011) destacan una serie de niveles: operacional rígido, operacional flexible, relacional básico y relacional comparativo.

Nivel 1: Operacional rígido

Los alumnos solo tienen éxito con ecuaciones con estructura tipo operación-igual-respuesta ($a+b = \square$), incluyendo la resolución, evaluación y codificación de ecuaciones con esta estructura.

Nivel 2: Operacional flexible

Resuelve y evalúa con éxito expresiones aritméticas del tipo: $\square = a + b$.

Nivel 3: Relacional básico

Los alumnos que evidencian este nivel de desarrollo del pensamiento relacional resuelven y evalúan con éxito expresiones aritméticas con operaciones a los dos lados del signo igual, $a + b = \square + d$, $a + \square = c + d$. Sin embargo para resolver estas actividades suelen realizar las operaciones en las dos partes de la igualdad para determinar la incógnita

Nivel 4: Relacional comparativo

Los alumnos en este nivel de desarrollo resuelven con éxito y evalúa ecuaciones comparando las expresiones en los dos lados del signo igual, utilizando estrategias de compensación y reconocimiento de transformaciones que mantienen la igualdad $a + b = \square + d$, $a + \square = d + e$ Por ejemplo en actividades de evaluar si la expresión es correcta o no: *sin realizar las sumas ¿puedes decir si la sentencia numérica $(67 + 86 = 68 + 85)$ es verdadera o falsa?*

2.2 Actividades

La metodología empleada en el desarrollo de las actividades deriva de las necesidades de los alumnos y de sus características, este hecho justifica que este enfoque pedagógico intente ser motivador, socializador, pero a su vez, activo y participativo. Por ello, el papel del docente será de guía y orientador, fomentando la comunicación, el razonamiento y la participación de los discentes, destacando así la importancia de los procedimientos y de las actitudes. Asimismo, con el uso de la balanza se pretende que estas actividades sean significativas para el alumnado, es decir, que sea un material manipulativo que ayude al alumno a reflexionar sobre las equivalencias, a proponer diferentes estrategias de resolución y a desarrollar el pensamiento relacional. Ejemplo de acciones que puede realizar el docente:

- Proporcionar al alumno la balanza y las actividades.
- Guiar al alumno, mediante preguntas orientadoras, en la resolución de las actividades, siempre y cuando el alumno no las plantee por sí mismo al ver el problema.

- Iniciar al alumnado en el pensamiento relacional. El maestro deberá formular preguntas abiertas con el objetivo de que el alumno resuelva la secuencia utilizando el pensamiento relacional.
- Anotar y registrar el progreso de los alumnos y las estrategias que plantean para la resolución de las actividades.

Basándonos en Matthews et al. (2011), concretaremos la propuesta considerando la transición entre los cuatro niveles del pensamiento relacional indicados. Para saber cuándo un alumno ha adquirido un nivel, nos fijaremos en las secuencias que realiza adecuadamente y en su justificación. Consideramos que el alumno tendrá adquirido el nivel 1 y pasará a trabajar el nivel 2 cuando tenga éxito en las secuencias con estructura $a+b=\square$. Del mismo modo, el alumno pasará a trabajar secuencias del nivel 3 cuando entienda la flexibilidad de la estructura, es decir, cuando tenga éxito en secuencias con la operación al lado derecho del igual ($\square=a+b$) y empiece a realizar con éxito actividades del tipo $a+b=\square+d$ y $a+\square=d+e$ pero usando solo una aproximación operacional. El último paso de nivel, del 3 al 4, lo logrará cuando resuelva actividades con la estructura $a+\square=c+d$ y $a+b=\square+d$ sin necesidad de realizar operaciones utilizando estrategias de compensación y comparación, es decir, sin necesidad de resolverla con operaciones.

ACTIVIDAD 1: ¿Cómo equilibrarías la balanza?

Tendrá una duración de dos sesiones de 60 minutos en el aula ordinaria. Usaremos como material una balanza por grupo, piezas de lego o policubos y dos Fichas. Esta actividad se divide en dos partes y se pretende que los alumnos doten al signo igual del significado de equivalencia y que, de manera progresiva desarrollen el pensamiento relacional. Esto se va a tratar de conseguir mediante la balanza, ya que cada plato se corresponde con un lado del signo igual y cada montón de fichas con uno de los números de las diferentes secuencias. Al principio se materializará la relación de la balanza con el signo igual para que el alumno pueda dotarle de significado. Por ello, inicialmente los números que vamos a utilizar son pequeños, ya que hemos centrado en el interés de que vean su relación con el uso de la balanza y las fichas de lego o policubos, pero se podría adaptar al nivel de los alumnos.

En la primera parte, se presentan secuencias de ejercicios que reflejan la estructura de actividades que puedan ser realizadas con éxito solo con un nivel de desarrollo del pensamiento relacional *operacional rígido* y *operacional flexible*. Las

actividades planteadas tienen la estructura de operación-igual-resultado y resultado-igual-operación.

En la segunda parte, introduciremos secuencias con operaciones a los dos lados de la igualdad y, con ello plantaremos situaciones que den pie al desarrollo del *pensamiento relacional básico y/o relacional comparativo* dependiendo de los alumnos.

Secuencias: operación-igual-resultado y resultado-igual-operación

Parte inicial (15 minutos): Comenzamos la sesión a partir de una secuencia escrita en la pizarra de estructura operación-igual-resultado. Por ejemplo: $3 + _ = 7$. Se explica a los alumnos que deben utilizar la balanza para resolverla y las piezas de lego o los policubos. Estas piezas las juntaremos en grupos de 1 hasta el 10. Cada grupo deberá pensar la forma de resolverla con la balanza y plantearlo en gran grupo.

Parte principal (30 minutos): Una vez realizadas las tareas en gran grupo, se completan los ejercicios de la Ficha 1 (Figura 2) en pequeños equipos de trabajo. Todos se realizarán a partir del uso de la balanza, para dotar al signo igual del significado de equivalencia. En primer lugar, deberán completar los dibujos de la balanza, a partir de los bloques de piezas que encajarían, para que la balanza esté equilibrada. Una vez completado el dibujo, deben escribir los números en los huecos en blanco. De esta manera, los alumnos pasan del material manipulativo a los símbolos. Posteriormente, completarán las secuencias dadas. En cada una de ellas, deberán escribir cómo las han resuelto.

Parte final (15 minutos): Una vez hayan terminado esta ficha, se comprobarán, en gran grupo, los resultados y la estrategia que han empleado los alumnos para ello, haciendo hincapié en la justificación y en el uso adecuado de términos matemáticos.

Secuencias: operaciones a ambos lados del signo igual

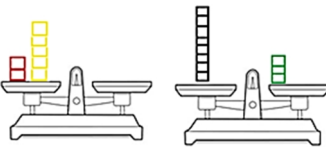
Parte inicial (15 minutos): Al igual que la sesión anterior, se comenzará a partir de la reflexión grupal de una secuencia, pero esta vez, con operaciones a ambos lados del signo igual. Por ejemplo: $3+5 = _ + 4$. Los alumnos deberán pensar, en equipos de trabajo, la estrategia utilizada y la propondrán en gran grupo. La finalidad es que salga una posible resolución aplicando el pensamiento relacional. En caso de no llegar a este, debemos ir haciendo preguntas para encaminarlos.

Parte principal (30 minutos): Esta parte se llevará a cabo en el aula de la misma manera que la sesión anterior. En primer lugar, completarán los dibujos de la balanza de

la Ficha 2 (Figura 3) haciendo uso de ella y, posteriormente, completarán las secuencias y justificarán la estrategia empleada para ello.

Parte final (15 minutos): Finalmente, comprobarán en grupo los resultados y las estrategias empleadas por los alumnos. También se reflexionará sobre el significado del signo igual.

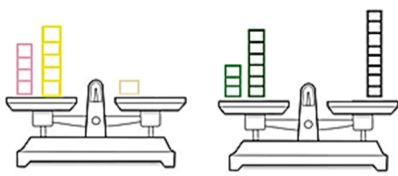
Ficha 1: Coged la balanza y las piezas e investigad las equivalencias entre los siguientes números. Debéis completar los huecos que faltan y justificar vuestra respuesta.



$\square + \square = \square$	$\square = \square + \square$
<input style="width: 100px; height: 20px;" type="text"/>	<input style="width: 100px; height: 20px;" type="text"/>
$5 + 4 = \square$	$\square = 3 + 2$
<input style="width: 100px; height: 20px;" type="text"/>	<input style="width: 100px; height: 20px;" type="text"/>
$\square + \square = 6$	$\square + 1 = 8$
<input style="width: 100px; height: 20px;" type="text"/>	<input style="width: 100px; height: 20px;" type="text"/>
$7 = \square + 2$	$5 = \square + 5$
<input style="width: 100px; height: 20px;" type="text"/>	<input style="width: 100px; height: 20px;" type="text"/>

Figura 2. Ficha representativa de la secuencia operación-igual-resultado y resultado-igual-operación

Ficha 2: Coged la balanza y las piezas e investigad las equivalencias entre los siguientes números. Debéis completar los huecos que faltan y justificar vuestra respuesta.



$\square + \square = \square + \square$	$\square + \square = \square + \square$
<input style="width: 100px; height: 20px;" type="text"/>	<input style="width: 100px; height: 20px;" type="text"/>
$2 + 4 = \square + 3$	$5 + 1 = \square + 3$
<input style="width: 100px; height: 20px;" type="text"/>	<input style="width: 100px; height: 20px;" type="text"/>
$7 + 4 = 6 + \square$	$\square + 5 = 2 + 6$
<input style="width: 100px; height: 20px;" type="text"/>	<input style="width: 100px; height: 20px;" type="text"/>
$9 + \square = 8 + 3$	$4 + \square = 5 + 6$
<input style="width: 100px; height: 20px;" type="text"/>	<input style="width: 100px; height: 20px;" type="text"/>

Figura 3. Ficha representativa de la secuencia operaciones a ambos lados del signo igual

ACTIVIDAD 2: ¿Cómo podemos resolver estas equivalencias?

Tiene una duración aproximada de 30-40 minutos en el aula ordinaria. Usamos una balanza por grupo, piezas de lego o polícubos (si son necesarias) y la Ficha 3. Esta actividad pretende iniciar el desarrollo del pensamiento relacional apoyado en el significado del signo igual como una equivalencia (*relacional básico y/o relacional comparativo*) al realizar secuencias con operaciones a ambos lados del signo igual y justificando la estrategia empleada.

Parte inicial (5-10 minutos): En primer lugar, se reflexiona sobre lo trabajado en las actividades anteriores. Además, se explica lo que deben hacer en esta sesión.

Parte principal (20 minutos): Los alumnos deberán resolver las secuencias de la Ficha 3, a ser posible utilizando el pensamiento relacional, es decir, se pretende que doten al signo igual el significado de equivalencia y, por ello, se debería resolver las secuencias sin hacer operaciones. En caso necesario, se utilizará la balanza. Posteriormente, justificarán la estrategia empleada por escrito.

Parte final (10-15 minutos): Finalmente, se reflexionará sobre las estrategias utilizadas por los alumnos para resolver las distintas secuencias, insistiendo en el método de resolución y en el uso de un vocabulario matemático adecuado.

Ficha 3: ¿Cómo podemos resolver estas equivalencias?

Resuelve las equivalencias siguientes y contesta la pregunta:

- | | |
|---|---|
| • $24 + 35 + 28 = \underline{\quad} + 28$ | $43 + 32 + 41 = \underline{\quad} + 32$ |
| • $52 + 35 + 67 = \underline{\quad} + 67$ | $52 + 18 + 27 = 18 + \underline{\quad}$ |
| • $85 + 21 + 32 = 85 + \underline{\quad}$ | $55 + 42 + 71 = 42 + \underline{\quad}$ |

¿Cómo has resuelto estas equivalencias?

ACTIVIDAD 3: ¿Son ciertas las siguientes equivalencias?

Tiene una duración de 45 minutos en el aula ordinaria. Usaremos una balanza por grupo, piezas de lego o polícubos (si son necesarias) y la Ficha 4. Esta actividad tiene como objetivo potenciar el desarrollo del *pensamiento relacional comparativo* (nivel 4 de desarrollo del pensamiento relacional). Además, se pondrá en práctica la propiedad conmutativa de la suma, el cero como valor neutro, la descomposición y las relaciones basadas en la magnitud de números involucrados.

Parte inicial (10 minutos): En primer lugar, haremos una síntesis de las estrategias usadas en la resolución de las actividades de las anteriores sesiones. Ponemos un ejemplo de equivalencia, como puede ser $7+3 = 5+5$. Los alumnos deberán

en pequeños grupos indicar si esta expresión es verdadera o falsa y justificado su respuesta apoyados en varias estrategias.

Parte principal (20 minutos): Realizaremos la Ficha 4. Deberán comprobar si las equivalencias son ciertas o no y justificar la respuesta. Además, podrán proponer la secuencia verdadera.

Parte final (15 minutos): Finalmente, en gran grupo se pondrán en común las estrategias que han utilizado para resolver las diferentes expresiones haciendo énfasis en el uso del pensamiento relacional.

*Ficha 4: ¿Son ciertas las siguientes equivalencias?
Decir si las siguientes equivalencias son verdaderas o falsas. Justifica tu respuesta.*

- $59 + 47 = 47 + 59$
- $35 + 72 = 35 + 70 + 2$
- $225 + 0 = 225$
- $43 + 35 = 78 + 1$
- $20 + 13 = 330$

ACTIVIDAD ALTERNATIVA. Sugerencia de la propuesta con el uso de las TIC

En el caso de no disponer de balanza, una alternativa sería utilizar *applets* como la que presentamos a continuación, ya que nos permite utilizar frutas para hacer los diversos montones en cada uno de los platos.

<http://www.educaplus.org/play-42-Equilibra-la-balanza-N%C3%BAmeros-positivos.html>

3. Evaluación

El docente evaluará la propuesta teniendo en cuenta la trayectoria de aprendizaje definida. Para cumplimentar la evaluación se puede usar una tabla similar a la que se muestra en la Tabla 1.

Tabla 1. Tabla de evaluación

Actividades	Actividad 1: ¿Cómo equilibrarías la balanza?		Actividad 2: ¿Cómo podemos resolver estas equivalencias?	Actividad 3: ¿Son ciertas las siguientes equivalencias ?
	Ficha 1	Ficha 2		
El alumno ha alcanzado el primer nivel si resuelve y justifica correctamente secuencias del tipo $a+b=\square$, $a+\square = c$				
El alumno ha alcanzado el segundo nivel si resuelve y justifica correctamente secuencias del tipo $\square=a+b$				
El alumno ha alcanzado el tercer nivel si resuelve y justifica las actividades del tipo $a+ b= \square +c$ $a+\square = c+d$ realizando las operaciones				
El alumno evidencia <i>pensamiento relacional comparativo</i> (Nivel 4) utilizando estrategias de compensación y reconocimiento de transformaciones de simplificación en las actividades del tipo $a+ b= \square +c$ $a+\square = c+d$				

REFERENCIAS

- Alsina, A. (2004). *Desarrollo de competencias matemáticas con recursos lúdico manipulativos: para niños y niñas de 6 a 12 años*. Madrid: Narcea.
- Empson, S., Levi, L. y Carpenter, T. (2011). The Algebraic Nature of Fractions: Developing Relational Thinking in Elementary School. En Cai, J. y Knuth (eds.), *Early Algebraization* (pp. 409-428). London: Springer.
- González, J. L. (2010). *Recursos, Material didáctico y juegos y pasatiempos para Matemáticas en Infantil, Primaria y ESO: consideraciones generales*. Málaga: UMA
- Matthews, P., Rittle-Johnson, B., McEldoon, K. y Taylor, R. (2011). Assessing knowledge of mathematical equivalence: A construct-modeling approach. *Journal of Educational Psychology*, 103 (85-104).
- Molina, M. (2007). *Comprensión del signo igual y desarrollo de pensamiento relacional en alumnos de tercero de Primaria. Una investigación en curso*. Tesis doctoral. Granada: Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada.
- Piaget, J. y Inhelder, B. (1969). *Psicología del niño* (10ª ed.). Madrid: Ediciones Morata, S. A.
- Seo, K. H. y Ginsburg, H. (2003). “You’ve got to carefully read the math sentence...” Classroom context and children’s interpretations of the equal sign. En Baroody, A. J. y Dowker, A. (eds.), *The Development of Arithmetic Concepts and Skills. Constructing Adaptive Expertise* (pp. 161-187). Mahwah, NJ: Laurence Erlbaum Associates.