

T-344

MIRAR, SENTIR, PENSAR Y CREAR
DESARROLLO DE HABILIDADES BÁSICAS A TRAVÉS DEL ESTUDIO
GEOMÉTRICO DE MOSAICOS

Miryam Judith Mazzitelli

miryamjmm@hotmail.com

Instituto Nacional Superior del Profesorado Técnico (UTN) - Argentina

Modalidad: Taller

Nivel educativo: Secundario (12 a 15 años)

Núcleo temático: Matemática y su integración con otras áreas

Palabras clave: Geometría - Mosaicos-Habilidades geométricas-Niveles de comprensión

Resumen

Al enfrentarse con el aprendizaje de la geometría, el estudiante debería pasar por etapas muchas de las cuales deberían ser experiencias “sensibles, visuales y táctiles” (Alsina, 1995, p.90) que impulsarán luego posteriores abstracciones. Asimismo, Bressan (2005) expresa que el estudio de la geometría debe orientarse al desarrollo de habilidades específicas de acuerdo a los contenidos que se plantee enseñar. Articulando ambas posiciones, proponemos en este taller un espacio de trabajo con una secuencia didáctica para estudiar niveles de comprensión alcanzados y habilidades básicas que se ponen en juego ante una secuencia que utiliza mosaicos como estrategia para generar las experiencias sensibles mencionadas. En un segundo momento analizaremos las posibilidades y adecuaciones de lo trabajado en términos de habilidades básicas para que, finalmente podamos crear nuestros propios proyectos.

Introducción

Los docentes podríamos pensar, crear y generar secuencias que resulten en un momento de encuentro para resolver situaciones que sirven para promocionar el estudio de la geometría dándole, en un principio un sentido lúdico, y en el final un momento de creación, sin perder el objetivo fundamental que es el de motivar, estimular el pensamiento.

¿Por qué utilizar una secuencia que trabaja con mosaicos? Desde que el hombre comienza a construir y a realizar construcciones duraderas siempre se preocupó por que al unir elementos para cubrir una superficie esta unión sea lo más eficiente posible.

255

Desde las calzadas romanas hasta en los jardines de La Alhambra podemos observar esta preocupación del hombre, sea por un problema de utilidad cotidiana o para decorar sus templos o edificios emblemáticos (Muñoz Santonja y Hans Martín, 2010). Así que rompecabezas, calzadas, revestimientos, obras como las del dibujante holandés Maurits Escher, mosaicos árabes, y la misma naturaleza, resultan ser estimulantes recursos didácticos para la investigación de habilidades, vistas éstas como indicadores de la capacidad de realizar una tarea (Bressan, Bogisic y Crego, 2013, p. 18).

La geometría va asociada con el arte de saber mirar y ver (Alsina, 1995). El saber ver y el saber interpretar no son sinónimos, no son instantáneos, se consideran habilidades que requieren de un proceso de aprendizaje. Según Alsina (1995) la observación libre debe ser seguida por la observación provocada y la actuación del alumno. Desterrando la idea de que lo visual no es matemático o que es poco matemático, la visualización es como un catalizador para lograr entender y provocar el razonamiento. Pero además se tiene que poder decir lo que se está viendo, lo cual implica transmitir a otros lo que reconoció (Carrulla, 1999) para luego comunicarlo por escrito. Para esto se debe dar tiempo para completar el ciclo que va desde la visualización y reconocimiento de una regularidad hasta su registro por escrito con símbolos adecuados (Bressan y Gallego, 2010).

No basta conocer sólo resultados o conceptos, sino que la matemática conlleva una forma de pensar y desarrollar capacidades específicas que, ubicados en el rol docente, deberíamos transmitir a nuestros alumnos.

Según Polya (citado en Hiatt, 1979) la matemática es a la vez, un método de investigación y un cuerpo organizado de conocimientos y considera al método de investigación como la savia de la matemática. El mismo autor señala que instruir en matemática no es un asunto de sólo comprometer los resultados a la mente, sino es para enseñar a participar en el proceso que hace posible la creación del conocimiento. Afirma: “El conocimiento es un proceso, no un producto.” (Hiatt, 1979, p.141), y en este proceso se desarrollan capacidades, habilidades, entre otros.

Habilidades básicas en el estudio de la geometría

Se define el concepto de habilidad como el talento, pericia o la aptitud para desarrollar una tarea o bien como el indicador de una capacidad para completar una actividad (Bressan, Bogisic y Crego, 2013).

Aprender geometría sirve para desarrollar habilidades de razonamiento, de representación visual y favorecer la sinergia de estos procesos tan diferentes. Sirve para descubrir y desarrollar distintas formas de pensamiento pero para lograr esto hay que generar situaciones didácticas que las estimule (Duval, 2001).

Hoffer (1981) dice: “There are times when we may have more need to draw a picture of a geometric situation than to prove a theorem.” Ciertamente que, ante un planteo geométrico, la mayoría de nosotros tenderíamos a hacer un dibujo antes que a proponer una demostración. Si nuestra enseñanza sólo focaliza en las demostraciones y los aspectos axiomáticos, dejaríamos afuera un saber que aproximaría a los estudiantes a este conocimiento.

Las habilidades desarrolladas en el trabajo geométrico (Bressan, 2013), como la de visualización, de dibujo o construcción, de comunicación, lógicas y de aplicación, pueden ser puestas en juego a raíz del trabajo con actividades que inviten a su uso. El primer estímulo, puramente visual, pero a través de diversas situaciones se va desplazando hacia el uso de otras habilidades que no son plenamente estimuladas fuera del aula. Cada alumno aplicará la que considere más pertinente en la resolución de las actividades de la secuencia que están planteadas como desafíos a la intuición y luego a la razón.

Pondremos especial énfasis en habilidades que guardan concordancia con las señaladas por Hoffer (1981) y Bressan, Bogisic y Crego, (2013) que son:

- **Habilidades visuales**

Éstas implican tanto representar lo mental a través de formas visuales externas como la representación interna de objetos visuales.

- **Habilidades de dibujo y construcción**

Suponen el uso de representaciones como símbolos, dibujos y construcciones que pueden dar idea de un concepto matemático.

- **Habilidades de comunicación**

Estas habilidades involucran no solo escuchar, sino leer, interpretar información geométrica, como también comunicar en forma ordenada y clara con diferentes lenguajes.

- **Habilidades de razonamiento lógico**

Implican comparar, completar series de símbolos o figuras, clasificar y generalizar propiedades. Además de reconocer congruencias, diferencias y semejanzas, crear, inventar,

imaginar, intuir situaciones, explorar y descubrir conceptos, regularidades y relaciones, entre otras.

- **Habilidades de aplicación**

Comprenden habilidades para explicar el mundo físico desarrollando modelos que puedan explicarse con los contenidos estudiados en Geometría.

Ciertos tipos de actividades favorecen el desarrollo de unas más que otras.

Entendemos que es valioso observar que estas habilidades no son útiles sólo para el estudio de la matemática sino, en nuestra opinión, para la vida como educando.

Niveles de comprensión en geometría

Según Van Hiele “giving no education is better tan giving it at wrong time” (Van Hiele, 1999), entonces debemos proveer una enseñanza apropiada al nivel de pensamiento de los niños.

¿Cuál es el nivel de dónde se inicia para enseñar geometría? La respuesta depende del nivel de pensamiento de los alumnos, el que condiciona el grado de desarrollo de las habilidades para cada nivel (Galindo, 1996). El pensamiento no verbal es de gran importancia, ya que las raíces de nuestras decisiones están en ese nivel. Observamos cosas sin pensar en palabras, reconocemos caras familiares sin utilizar palabras para describirlas.

El matrimonio Van Hiele (1957, citado en Gutiérrez, Jaime y Fortuny 1991) propuso, específicamente para geometría, una teoría de niveles de conocimientos y fases de comprensión que permiten organizar la enseñanza y reconocer aprendizaje y comprensión alcanzada por los estudiantes.

El nivel más bajo determinado por los Van Hiele, es el nivel *visual*, donde se comienza con un pensamiento no verbal. Por ejemplo, un estudiante puede decir: “éste es un cuadrado” sólo por su apariencia. El siguiente nivel es *descriptivo*, donde ya el alumno puede distinguir ciertas propiedades de las figuras. Se sigue con el nivel de *deducción informal*. Es aquí donde las propiedades se organizan lógicamente, cada una se deduce de otra anterior. Finalmente se llegará el nivel de *deducción formal* que la mayoría de los alumnos no alcanzan naturalmente porque no siempre se atiende desde la enseñanza. Este modelo tiene algunas particularidades importantes que indicamos a continuación:

1. *Secuencialidad en la adquisición de los niveles*: sigue un orden que no es posible alterar.
2. *Especificidad del lenguaje*: en cada nivel el lenguaje se va mejorando y completando.
3. *Globalidad y localidad*: investigaciones revelan que el nivel de razonamiento es local o sea que se razona en un nivel un concepto y no tiene por qué ser el mismo en otros conceptos.
4. *Intrínseco y extrínseco*: los objetos de un nivel se convierten en objetos de estudio en el otro ya que en el primero sólo se perciben formas hasta que en niveles más avanzados ya se analizan sus propiedades.
5. *Instrucción*: no se avanza de un nivel a otro sin una intencionalidad o experiencias personales. No tienen que ver con un aspecto biológico, ni con la edad.
6. *Emparejamiento*: si un estudiante se encuentra en un nivel de comprensión y el docente da una instrucción en un nivel superior, seguramente no se logren los resultados deseados.

Los alumnos irían adquiriendo este tipo de pensamiento gradualmente, según los Van Hiele, no se debe al crecimiento o desarrollo natural, sino de la instrucción intencionalizada, por medio de invitación a variadas experiencias que estimulen el avance.

A modo de cierre

Siendo un contenido al alcance de todos, el arte, la biología, la arquitectura se podría matematizar con elementos de la geometría y así involucrar a todos en un trabajo geométrico desde los intereses particulares. Ubicados en el aula, es posible comenzar desde los niveles más bajos de comprensión para ir creciendo en contenidos y habilidades en forma democrática, donde cada alumno es actor fundamental de su propio proceso de aprendizaje. Esta perspectiva parte de lo concreto y desde allí se inicia un camino intencionado que eleve el pensamiento en cualquier nivel de la escolaridad. La intencionalidad mencionada significa que este proceso no se da sólo, se debe provocar y para esto el papel del docente es clave. Es él quien se encarga de diseñar las actividades, organizarlas en forma de secuencias o proyectos con una intencionalidad didáctica y nivel de profundización cada vez mayor, para que el alumno pueda experimentar el quehacer y pensar matemático ante una situación y desarrollar capacidades o habilidades que le son propias y no siempre desarrolladas fuera de la clase de matemática.

El trabajo se plantea grupal y por esto la creación es colectiva. La interacción entre alumnos alienta y enriquece la solución de problemas y aparecen nuevas ideas que confirman concepciones de los alumnos.

Los mosaicos o rompecabezas son muy utilizados para el pasaje intencionado de un nivel a otro. Primero con una etapa de “feel and find the shape” que estimula el sentir y encontrar la figura para completar un rompecabezas (Van Hiele, 1999). Pistas, preguntas, situaciones provocadas por el docente fomentan a que el alumno necesite aplicar el lenguaje cada vez más especializado y realice gradualmente conexiones lógicas que verbalizará en el momento adecuado. Este tipo de trabajo puede llevar a tareas de mayor complejidad y permitir profundos aprendizajes.

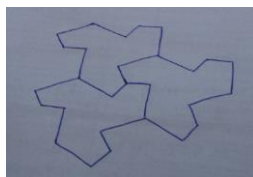
Tenemos muy en cuenta estas consideraciones y por esto se tratará observar y seguir el esquema de Galindo (1996), donde se relacionan los niveles de comprensión de la geometría según la teoría de Van Hiele y las habilidades según describe Hoffer (1981). Este autor asoció el estado específico de cada habilidad con el nivel de comprensión geométrica desarrollado por los Van Hiele.

Consideramos como marco teórico para este trabajo, la noción de mosaicos de Bressan, junto con los conceptos de habilidades geométricas y su vínculo con la comprensión de Van Hiele.

Adaptamos la tabla de Hoffer (1981) para relacionar cada habilidad con el nivel de comprensión de los estudiantes.

HABILIDAD	PARA MODELAR								
	LÓGICA								
	VERBAL								
	PARADIBUIR								
	VISUAL								
		RECONOCIMIENTO	ANÁLISIS	ORGANIZAMIENTO	DEDUCCIÓN	INDUCCIÓN			
		I	II	III	IV	V			
		NIVEL							

Hemos considerado como punto de partida una **Habilidades y Niveles de comprensión** secuencia que plantea la búsqueda de patrones geométricos y el estudio de las figuras planas a partir de la observación y construcción de mosaicos y que termina, inevitablemente, en la creación de nuevos diseños.



El desarrollo de esta secuencia dejará en evidencia la posibilidad de generar actividades geométricas que, partiendo de actividades empíricas, logre desplegar el pensamiento racional y permita que los estudiantes desarrollen habilidades que podrán ser aplicables a otras asignaturas.

El taller está planeado en tres etapas:

Primera etapa del taller: Exploraremos las actividades con mosaicos que se pueden realizar para reconocer el desarrollo de habilidades y el nivel de comprensión que se pone en manifiesto, y más aún el pasaje de un nivel de comprensión cada vez mayor.

Segunda etapa del taller: Presentaremos brevemente las conceptualizaciones teóricas de Educación Matemática que dan sustento a la propuesta (las nociones mencionadas antes) y abriremos un espacio de intercambio con los docentes asistentes para considerar la adecuación de la secuencia a los distintos grupos de estudiantes de diversos años y modalidades. Además de todas las posibles aplicaciones a distintos programas graficadores como el Geogebra, y para el estudio de otros conceptos como los movimientos en el plano, semejanzas, etc.

Tercera etapa del taller: Propiciaremos que cada docente, luego de haber transitado la secuencia desarrolle un proyecto de mosaico presentado en forma individual o grupal una tesela de creación propia.

Entonces...

Cuando surge la pregunta sobre qué se debe enseñar en una geometría para todos en la educación obligatoria y se piensa qué debe saber de un ciudadano normal, más allá de su profesión, aparece la frase del Dr. Luis Santaló (1997, p.18) sobre formar cabezas bien hechas y no saturadas de información inútil que no sirve para la vida, ni despiertan la curiosidad. Es por ello que este trabajo pretende ser un aporte para echar luz sobre lo importante del desarrollo de habilidades geométricas, caracterizar actividades que las promuevan y evidenciar lo provechoso del estudio de la geometría.

Referencias bibliográficas

- Alsina, C. (1995). *Invitación a la Didáctica de la Geometría*. (3° Reimpresión). Madrid: Editorial Síntesis.

- Alsina, C., Fortuny, J. y Pérez, R. (1997). *¿Por qué Geometría? De La enseñanza de la Geometría*. Colección: Materiales para apoyar la práctica educativa, México.
- Bressan, A., Bogisic, B. y Crego, K. (2013). *Razones para enseñar geometría en la educación básica*. (3° Reimpresión). Argentina: Ed. Novedades educativas.
- Bressan, A. y Gallego, M. (2010). El proceso de matematización progresiva. Núm. 168. Buenos Aires: Correo del Maestro.
- Muñoz Santoja, J., Hans Martín, J y Fernández, A. (2011) Jugando con teselas. *Revista de Didáctica de las matemáticas*. *Números Volumen 77*, julio de 2011,
- Carrulla, C. (1999). Rutas hacia el / Raíces del álgebra, reseña del libro de J. Mason Graham, y otros Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia. *Revista EMA* Vol.5, Núm. 1. Bogotá.
- Duval, R. (2001). La geometría desde un punto de vista cognitivo. *PMME-UNISON*. <http://fractus.uson.mx/Papers/ICMI/LaGeometria.htm>
- Galindo, C. (1996). Desarrollo de habilidades básicas para la comprensión de la Geometría. *Revista EMA*. Vol. 2, N° 1, 49-58. Bogotá. Colombia.
- Gutierrez, Á. Jaime, A. y Fortuny, J. (1991). An alternative paradigm to evaluate the acquisition of the Van Hiele levels. *Journal for Research in Mathematics Education*. Vol. 22, pp.237-251 Stable URL: <http://www.jstor.org/stable/749076>
- Gutiérrez, A. y Jaime, A. (1990). Una propuesta de fundamentación para la enseñanza de la Geometría: el modelo de van Hiele. *Teoría y práctica en educación matemática*. Alfar: Sevilla, España, pp. 295-384.
- Hoffer, A. (1981). Geometry is more than Proof. *The Mathematics Teacher*, vol. 74(1), 11–18. Retrieved from <http://www.jstor.org/stable/27962295>
- Santaló, L. (1997). Enfoques Hacia una didáctica humanista de la matemática. (3° Reimpresión). Buenos Aires: Ed. Troquel.

Van Hiele, P. (1999). Developing Geometric thinking through Activities with play. *Teaching Children Mathematics*, 6, pp. 310-316.

ANEXO

Propuesta de actividades

El estudio de la geometría es un proceso y no un producto terminado, el alumno es el protagonista de un trabajo creativo. ¿Qué capacidades son necesarias? ¿Qué habilidades estimula un trabajo geométrico? ¿Cuáles serán las herramientas que desde la geometría también sirven para interpretar cuestiones de la vida cotidiana, apreciar el arte y la naturaleza?

Se comienza comprometiendo los sentidos, haciendo participar al alumno en una geometría sensible, que pasando por la acción y la reflexión se llega a la abstracción en un trabajo racional.

Queremos describir sintéticamente algunas de las propuestas de actividades del taller donde se pone en evidencia algunas de las habilidades básicas. Nosotros proponemos acciones pero los concurrentes terminan dando forma al taller según las experiencias y expectativas.

El taller está planeado en tres etapas en donde los participantes realizarán las siguientes actividades:

Primera etapa

Actividad N°1

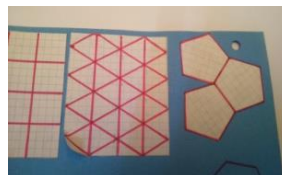
Consigna: “¿Todos los polígonos regulares pueden cubrir el plano sin dejar espacio vacíos y sin que haya superposiciones? En caso contrario indicar cuáles son los polígonos que permiten teselar una superficie. Si es así, encuentren alguna justificación para explicar por qué en algunos casos se puede y en otros no.”



-Se planteará a los participantes a trabajar con polígonos regulares de cartón y también, los que así lo crean, en sus PC con el programa Geogebra.

-Les propondremos que utilicen las piezas poligonales para construir mosaicos regulares y comprobar cuáles teselan o no el plano.

-Exploraremos las actividades con mosaicos que se pueden realizar para reconocer el desarrollo de habilidades y el nivel de comprensión que se pone en manifiesto, y más aún el pasaje de un nivel de comprensión cada vez mayor.



Poniéndonos en el lugar de los alumnos, ensayaremos la construcción de pequeños rompecabezas y reconoceremos en las piezas poligonales características que nos servirá de

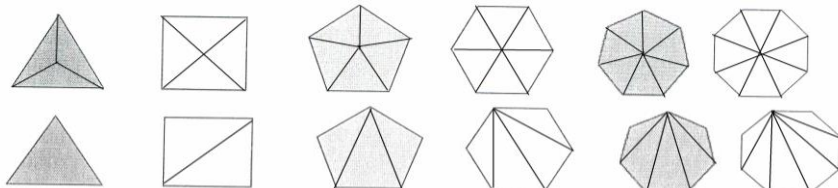
diagnóstico sobre cuánto conocemos de figuras planas. Al armar los mosaicos se generan nuevas preguntas.

Actividad N°2

Consigna: ¿Los polígonos regulares seleccionados son los únicos? ¿Por qué?

-Propondremos a las participantes a “ensayar” validaciones desde el punto de vista de los alumnos y propias y así poder analizar las habilidades puestas en juego.

Esto lleva a averiguar los ángulos interiores de los polígonos regulares a partir de conocer la suma de los ángulos interiores de un triángulo (contenido de nivel primario).



Se esperan todo tipo de explicaciones, ya sea gráficas, simbólicas y diferentes tipos de argumentaciones de los integrantes del grupo de trabajo. Estas formulaciones tendrán que ser validadas por todo el curso.

Cómo orientarlos para que desde estas u otras opciones logren deducir la amplitud de cada ángulo y de ahí el por qué solo tres polígonos regulares teselan el plano, es un trabajo donde se estimulan las habilidades de mayor nivel de comprensión.

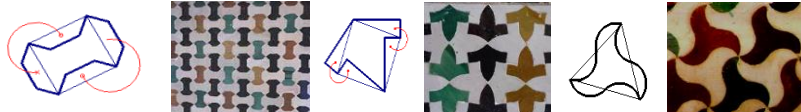
Superar algunos planteos simples iniciales para llegar a ideas más generales será cuestiones a revisar en cada curso y en cada grupo de alumnos.

Segunda etapa del taller

Presentaremos brevemente las conceptualizaciones teóricas de Educación Matemática que dan sustento a la propuesta reflexionando sobre las actividades de la primera etapa.

El trabajo de reflexión será reconocer cuáles son habilidades puestas en juego en una secuencia que trabaja con geometría. Destacaremos lo importante para nuestro caso el vivenciar y reconocer en nosotros mismos las habilidades que aplicamos para resolver las consignas.

Experimentaremos brevemente el trabajo que realizaron los artesanos árabes en La Alhambra.



Podremos describir habilidades y nivel de comprensión, puestas en juego por estudiantes ante la construcción de mosaicos.

Estas habilidades, junto con las fases de comprensión de la geometría según Van Hiele, nos servirán para comprender algunos indicadores según la tabla de Hoffer.

TABLE I
Basic Skills in Geometry

LEVEL SKILL	I Recognition	II Analysis	III Ordering	IV Deduction	V Rigor
VISUAL	Recognizes different figures from a picture. Recognizes information labeled on a figure.	Notices properties of a figure. Identifies a figure as part of a larger figure.	Recognizes interrelationships between different types of figures. Recognizes common properties of different types of figures.	Uses information about a figure to deduce more information.	Recognizes unjustified assumptions made by using figures. Conceives of related figures in various deductive systems.
VERBAL	Associates the correct name with a given figure. Interprets sentences that describe figures.	Describes accurately various properties of a figure.	Defines words accurately and concisely. Formulates sentences showing interrelationships between figures.	Understands the distinctions among definitions, postulates, and theorems. Recognizes what is given in a problem and what is required to find or do.	Formulates extensions of known results. Describes various deductive systems.
DRAWING	Makes sketches of figures accurately labeling given parts.	Translates given verbal information into a picture. Uses given properties of figures to draw or construct the figures.	Given certain figures, is able to construct other figures related to the given ones.	Recognizes when and how to use auxiliary elements in a figure. Deduces from given information how to draw or construct a specific figure.	Understands the limitations and capabilities of various drawing tools. Pictorially represents nonstandard concepts in various deductive systems.
LOGICAL	Realizes there are differences and similarities among figures. Understands conservation of the shape of figures in various positions.	Understands that figures can be classified into different types. Realizes that properties can be used to distinguish figures.	Understands qualities of a good definition. Uses properties of figures to determine if one class of figures is contained in another class.	Uses rules of logic to develop proofs. Is able to deduce consequences from given information.	Understands the limitations and capabilities of assumptions or postulates. Knows when a system of postulates is independent, consistent, and categorical.
APPLIED	Identifies geometric shapes in physical objects.	Recognizes geometric properties of physical objects. Represents physical phenomena on paper or in a model.	Understands the concept of a mathematical model that represents relationships between objects.	Is able to deduce properties of objects from given or obtained information. Is able to solve problems that relate objects.	Uses mathematical models to represent abstract systems. Develops mathematical models to describe physical, social, and natural phenomena.

Imagen de Geometry is more than Proof. The Mathematics Teacher, 74(1), p.1

-Se les invitará a los participantes del taller a que durante el transcurso de las actividades remarquemos los indicadores que nos guiarán sobre qué habilidades y de qué nivel de comprensión se va accediendo, en un camino de mayor de racionalidad.

Tercera etapa del taller

Actividad N°3

Consigna. Construir un mosaico.

-Propiciaremos que cada participante, luego de haber transitado toda la secuencia (aquí sólo un detalle de la misma), desarrolle un proyecto de mosaico presentando en forma individual o grupal una tesela de creación propia. Volveremos como en un camino espiralado a analizar los trabajos de los mosaicos de la Alhambra y el trabajo de Maurits Escher, buscando las relaciones de sus trabajos con la aplicación de las ideas previas. Y orientaremos a los talleristas para que construyan su modelo aplicando todo lo aprendido en la producción de una tesela de creación propia y original.

Finalmente...

Consideraremos las siguientes potencialidades del trabajo geométrico con mosaicos:

- Un contenido adaptable a diferentes niveles de conocimiento.
- Trabajo en variedad de marcos.
- Un contenido conectado o conectable con otras áreas de conocimiento.
- Invita a adaptarse a diferentes modos de trabajo: trabajo grupal, en parejas e individual.
- Adaptabilidad al uso de material concreto y trabajo con el programas graficadores.

Esta secuencia resultará en un momento de encuentro para resolver situaciones que sirven para promocionar el estudio de la geometría dándole, en un principio un sentido lúdico, y en el final un momento de creación, sin perder el objetivo fundamental que es el de motivar y desarrollar al máximo las capacidades de los alumnos.