T-1.113

INTRODUCIENDO LAS FUNCIONES EN PRIMARIA

Antonio Moreno, Eder Pinto, Marta Molina
amverdejo@ugr.es, epinto@correo.ugr.es, martamg@ugr.es
Universidad de Granada, España

Núcleo temático: Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas en las diferentes modalidades y niveles educativos.
Modalidad: Taller (T)
Nivel Educativo: Educación Primaria
Palabras claves: Pensamiento Funcional, Diseño de tareas, funciones.

Resumen

Existen varias aproximaciones a la definición de pensamiento funcional (e.g., Blanton y Kaput, 2011; Cañadas y Molina, 2016; Cañadas, Brizuela y Blanton, 2016). Estas definiciones, que adquieren sentido en los estudiantes de edades tempranas, son empleadas en este taller para analizar las respuestas de los estudiantes y caracterizar tareas que promuevan este tipo de pensamiento.

El objetivo de este taller es suministrar ideas y estrategias docentes para que el maestro seleccione y analice las respuestas de sus estudiantes y evalué el pensamiento funcional que evidencian. Este trabajo será utilizado para informar el diseño de tareas que favorezcan el desarrollo de este tipo de pensamiento en los estudiantes de Primaria.

El taller se organiza en tres momentos: (a) discusión grupal, la cual busca que los docentes reflexionen sobre sus ideas iniciales alusivas al pensamiento funcional y el uso de las funciones en Educación Primaria; (b) síntesis teórica, en la cual presentamos una síntesis de los principales aportes provenientes de la investigación en edades tempranas sobre pensamiento funcional; (c) analizar en pequeños grupos, respuestas de estudiantes a tareas que involucran pensamiento funcional.

Introducción

Diferentes autores destacan la importancia de incluir y promover pensamiento algebraico en el currículo escolar de primaria (Kaput, 2000; Blanton, Levi, Crites y Dougherty, 2011). El pensamiento funcional es un tipo de pensamiento algebraico en el cual la función es el contenido matemático fundamental (Blanton y Kaput, 2011). Este tipo de pensamiento está centrado en las relaciones entre cantidades que covarían de forma conjunta, el modo de expresar esas relaciones en diferentes sistemas de representación (verbal, pictórico, tabular, gráfico y simbólico) y la generalización a partir de las relaciones entre las cantidades involucradas (Cañadas, Brizuela, Blanton, 2016; Cañadas y Molina, 2016). Se considera

ISBN 978-84-945722-3-4

propicio para introducir el álgebra. El pensamiento funcional contribuye a sentar una base sólida para futuros aprendizajes del concepto de función, ayudando a solventar las dificultades que presentan los alumnos cuando se enfrentan por primera vez a este concepto en la educación secundaria (Ellis, 2011).

Confrey y Smith (1991) proponen dos relaciones entre variables para construir las funciones con los estudiantes: correspondencia y covariación. La relación de correspondencia es aquella regla que se establece entre pares correspondientes de cantidades de ambas variables. Describe cómo se obtienen valores de la variable dependiente a partir de valores de la variable independiente. Por ejemplo: en el caso de la función f(x)=x+5 la relación de correspondencia es sumar cinco a la cantidad de la variable independiente para obtener el valor asociado de la variable dependiente. La relación de covariación refiere al modo en que los cambios en una de las variables producen cambios en la otra variable. Por ejemplo, en el caso de la función f(x)=2x, implica reconocer que si sumas una cantidad a la variable independiente se le suma el doble a la variable dependiente.

Una de las formas por las cuales los investigadores estudian el pensamiento funcional de los estudiantes es mediante el uso de tareas. Éstas constituyen oportunidades para que los estudiantes puedan establecer relaciones entre cantidades que covarían, representar, justificar o generalizar esa relación (Soares, Blanton y Kaput, 2006). Este tipo de tareas se caracterizan por: (a) incluir la notación algebraica gradualmente, (b) presentar una relación entrelazada entre diferentes contenidos matemáticos, y (c) emplear problemas contextualizados, pues son considerados una herramienta importante para indagar en este tipo de pensamiento al favorecer que los estudiantes comprendan la relación entre cantidades que covarían a partir de un contexto determinado (Smith, 2008).

Existen diferentes aproximaciones teóricas a la noción de pensamiento funcional (e.g., Blanton y Kaput, 2011; Cañadas, Brizuela y Blanton, 2016; Cañadas y Molina, 2016), que son utilizadas para poner en evidencia la presencia de pensamiento funcional en las producciones de estudiantes de edades tempranas o describir sus diferentes facetas. De las investigaciones, deducimos la dificultad de discriminar aspectos muy específicos del pensamiento funcional en las respuestas de los estudiantes.

Los documentos curriculares de diferentes países incluyen el pensamiento funcional en Educación Primaria (e.g., Merino, Cañadas y Molina, 2013; Cai, Lew, Morris, Moyer, Ng y

ISBN 978-84-945722-3-4

Schmittau, 2005). En particular, la actual ley educativa menciona este tipo de pensamiento al señalar como objetivo “Describir y analizar situaciones de cambio, para encontrar patrones, regularidades y leyes matemáticas, en contextos numéricos, geométricos y funcionales, valorando su utilidad para hacer predicciones (Anexo I, BOE 1 marzo 2014, núm. 52, sec. I, p. 19388). Este hecho revela la importancia de trabajar el pensamiento funcional con profesores de este nivel educativo.

El objetivo de este taller es suministrar ideas y estrategias docentes para que el maestro seleccione y analice las respuestas de sus estudiantes y evalué el pensamiento funcional que evidencian. Este trabajo será utilizado para informar el diseño de tareas que favorezcan el desarrollo de este tipo de pensamiento en los estudiantes de Primaria.

Metodología del taller

El taller se inicia con una puesta en común inicial para reflexionar en grupo acerca de las concepciones de los asistentes referentes al pensamiento funcional y el uso de las funciones en Educación Primaria. Posteriormente sintetizamos los principales aportes de las investigaciones sobre pensamiento funcional y mostramos los elementos esenciales que caracterizan las definiciones de pensamiento funcional que encontramos en la literatura.

Una vez expuestas las definiciones y elementos característicos del pensamiento funcional, nos centramos en los focos que pueden resultar operativos para analizar respuestas de estudiantes a tareas que ponen en juego este tipo de pensamiento: (a) las relaciones entre variables, las cuales pueden ser expresadas para casos particulares (cercanos y lejanos) o de manera general (generalización), (b) los sistemas de representación, por los cuales expresan relaciones funcionales, y (c) las variables y elementos de la función. Estos focos se centran en los elementos del pensamiento funcional definidos por Cañadas y Molina (2016). En la figura 1 presentamos los focos del trabajo, los cuales permitirán analizar las respuestas que entreguen estudiantes a problemas en el contexto funcional del álgebra escolar.

ISBN 978-84-945722-3-4

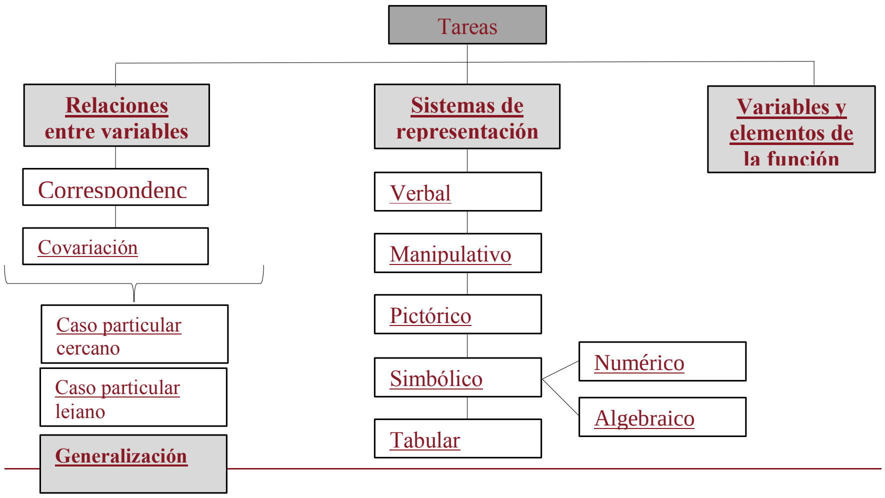


Figura 1. *Focos de atención para el análisis de respuestas*

Tal como lo presentamos en la figura 1, cada uno de estos focos (relación entre variables, generalización, sistema de representación y variables y elementos de la función) permiten describir aspectos del pensamiento funcional que pueden ser manifestados por estudiantes de Educación Primaria.

En este taller analizaremos ejemplos de respuestas de estudiantes, procedentes de nuestras propias investigaciones dentro del proyecto "Pensamiento funcional en Educación Primaria: relación funcional, representaciones y generalización" del Plan Nacional I+D con referencia EDU2016-75771-P, financiado por el Ministerio de Economía y Competitividad de España. Así mismo discutiremos sobre las posibilidades de las tareas para hacer explícitas las características del pensamiento funcional.

A modo de ejemplo presentamos aquí algunas de las respuestas dadas por los estudiantes en dos de las tareas.

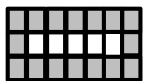
El problema de las baldosas: relaciones entre variables, generalización y sistemas de representación

Presentamos este problema a dos grupos diferentes de estudiantes: un grupo de tercero y otro de quinto de Educación Primaria, España. En la figura 2 presentamos un extracto de la tarea

ISBN 978-84-945722-3-4

trabajada con los estudiantes la cual involucra la función lineal $f(x)=2x+6$. Se incluyen preguntas para casos particulares cercanos (C1, C2 y C3), caso particular lejano (C4) y caso general (C5).

Un colegio quiere reformar el suelo de todos sus pasillos porque está ya muy estropeado. El equipo directivo decide enlosar los pasillos con baldosas blancas y con baldosas grises. Todas las baldosas son cuadradas y tienen el mismo tamaño. Las baldosas se van a colocar en cada pasillo de la manera que ves en la siguiente imagen.



El colegio contrata a una empresa para que reforme los pasillos de las tres plantas del colegio. Te pedimos que ayudes a los albañiles a contestar algunas preguntas que necesitan responder para hacer este trabajo.

C1. ¿Cuántas baldosas grises necesitan para el suelo de un pasillo en el que colocan 5 baldosas blancas?

C2. Unos pasillos son más largos que otros. Por eso, los albañiles necesitan diferente número de baldosas para cada pasillo. ¿Cuántas baldosas grises necesitan para el suelo de un pasillo en el que colocan 8 baldosas blancas?

C3. ¿Cuántas baldosas grises necesitan para el suelo de un pasillo en el que colocan 10 baldosas blancas?

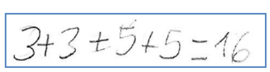
C4. ¿Cuántas baldosas grises necesitan para el suelo de un pasillo en el que colocan 100 baldosas blancas?

C5. Los albañiles de una empresa siempre colocan primero las baldosas blancas y después las baldosas grises. ¿Cómo puedes saber cuántas baldosas grises si ya han colocado las baldosas blancas?

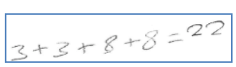
Figura 2. *El problema de las baldosas*

Dento de los principales resultados, en la mayoría de las respuestas de los estudiantes de ambos cursos, identificamos las relaciones de correspondencia y covariación, predominando la primera. En la figura 3 presentamos las respuestas de Nicolás, un estudiante de tercero, a las primeras cuatro cuestiones.

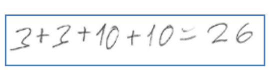
C1


$3+3+5+5=16$

C2


$3+3+8+8=22$

C3


$3+3+10+10=26$

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

C4

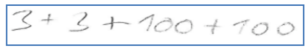


Figura 3. *Respuestas de Nicolás a C1, C2, C3 y C4*

En las respuestas de Nicolás, que consideramos un ejemplo representativo de la predominancia de la relación funcional de correspondencia, observamos cómo el estudiante logra identificar una regla entre los pares correspondientes de cantidades de ambas variables. Por ejemplo, en la segunda cuestión, el estudiante suma la cantidad de baldosas blancas laterales (3+3) y las cantidad de baldosas superiores (8+8), lo que le permite determinar el valor de la variable dependiente (22) a partir de la variable independiente (8). En esta respuesta observamos que el estudiante expresa la relación funcional mediante el sistema de representación simbólico-numérico, lo cual es predominante en las respuestas de los estudiantes de quinto de primaria.

Es en las respuestas de los estudiantes de quinto de primaria, a diferencia de tercero, donde emerge de manera natural el simbolismo algebraico para expresar la relación entre variables. En la figura 4 presentamos la respuesta de María, estudiante de quinto, a la primera cuestión.

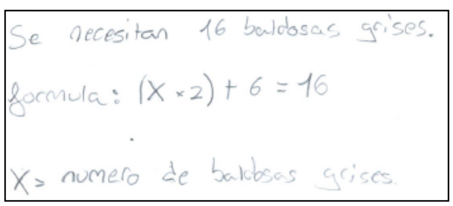


Figura 4. *Respuestas de María a C1*

En esta respuesta es posible observar como María logra encontrar la relación general entre las variables. Este es un ejemplo de generalización.

El problema del trato de la abuela: Variables y elementos de la función identificados.

ISBN 978-84-945722-3-4

Juan tiene ahorrado algo de dinero (tiene sólo euros, no céntimos). Su abuela, como recompensa por un trabajo que le ha hecho, le ofrece dos tratos:

Trato 1. "Te doblo el dinero que tienes".
Trato 2. "Te doy el triple de tu dinero y tu me das 7 euros".

Juan quiere elegir el mejor trato.
¿Qué debería hacer? ¿Podrías ayudarle a elegir el mejor trato?
¿Hay algún trato que sea siempre el mejor? ¿Por qué?
Resume con tus compañeros de equipo vuestras conclusiones en la cartulina.

Figura 5. *El trato de la abuela*

"El problema del trato de la abuela" pretende que los estudiantes comparen dos funciones, f(x) = 2x y f(x) = 3x-7. Para ello, los alumnos identifican las variables implicadas y otros elementos de la función (Moreno, Cañadas, Jaldo, Bautista, 2016).
Así por ejemplo, varios de ellos consideraron que el dominio de la variable independiente es el conjunto de los números enteros positivos. Otros incluso, tratan de establecer los dominios para nuestras dos funciones de forma que, aunque sean distintos para cada una de ellas, se cumpla la condición de que, en ambos casos, las imágenes de las mismas sean siempre números enteros positivos. La figura 6 ejemplifica esta respuesta.

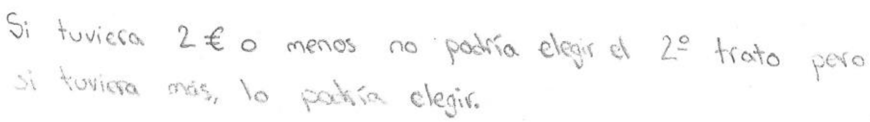


Figura 6. *Respuesta de Juan*

Algunos estudiantes, al resolver la tarea, identifican correctamente el punto de corte de las funciones y su significado y construyen a partir de este conocimiento una respuesta coherente sobre las condiciones en las que es mejor uno u otro trato. Es decir, concluyen correctamente cuáles son las condiciones que hay que tener en cuenta para hacer una correcta elección de trato. En la figura 7 se muestra un ejemplo de respuesta del alumno E1.

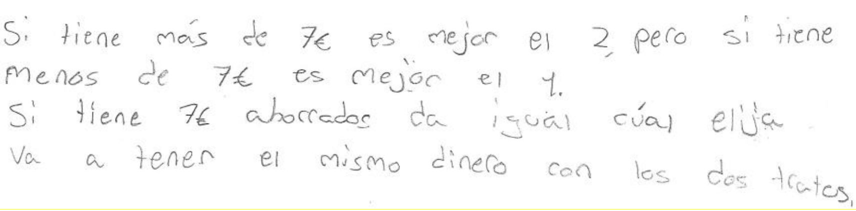


Figura 1. *Respuesta de Javier*

Agradecimientos

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

Este trabajo ha sido realizado dentro de los proyectos de investigación del Plan Nacional I+D con referencias EDU2013-41632-P y EDU2016-75771-P, financiados por el Ministerio de Economía y Competitividad de España.

Referencias bibliográficas

Blanton, M. L. y Kaput, J. J. (2011). Functional thinking as a route into algebra in the elementary grades. En J. Cai y E. Knuth (Eds.), *Early algebraization: A global dialogue from multiple perspectives* (pp. 5-23). Berlín, Alemania: Springer

Blanton, M., Levi, L., Crites, T. y Dougherty, B. (2011). *Developing essential understanding of algebraic thinking for teaching mathematics in grades 3–5*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Cai, J., Lew, H., Morris, A., Moyer, J., Ng, S. y Schmittau, J. (2005). The development of students' algebraic thinking in earlier grades: A cross-cultural comparative perspective. *ZDM*, *37*(1), 5-15.

Cañadas, M. C., Brizuela, B. M., y Blanton, M. (2016). Second graders articulating ideas about linear functional relationships. *The Journal of Mathematical Behavior*, 41, 87-103.

Cañadas, M. C. y Molina, M. (2016). Una aproximación al marco conceptual y principales antecedentes del pensamiento funcional en las primeras edades. En E. Castro, E. Castro, J. L. Lupiáñez, J. F. Ruíz y M. Torralbo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática. Homenaje a Luis Rico* (pp. 209-218). Granada, España: Comares.

Confrey, J. y Smith, E. (1991). A framework for functions: Prototypes, multiple representations and transformations. En R. Underhill (Ed.), *Proceedings of the 13th annual meeting of the North American Chapter of The International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 57-63). Blacksburg, VA: Conference Committee.

Ellis, A. (2011). Algebra in the middle school: Developing functional relationships through quantitative reasoning. En J. Cai y E. Knuth (Eds.), *Early algebraization: A global dialogue from multiple perspectives* (pp. 215-238). Berlín, Alemania: Springer.

Kaput, J. J. (2000). *Transforming algebra from an engine of inequity to an engine of mathematical power by "algebrafying" the K-12 curriculum*. Dartmouth, MA: National Center for Improving Student Learning y Achievement in Mathematics and Science.

Merino, E., Cañadas, M. C. y Molina, M. (2013). Uso de representaciones y patrones por alumnos de quinto de Educación Primaria en una tarea de generalización. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia*, *2*(1), 24-40.

Ministerio de Educación y Ciencia (2014). Real Decreto 126/2014 de 28 de febrero, por el que se establece el currículo básico de la Educación Primaria. BOE, 52, 19349-19420. Madrid, España: Autor.

Moreno, A., Cañadas, M.C., Jaldo, P. y Bautista, A. (2016). Functional topics in grade 5 students' comparisons of two linear functions. Presentado en el *13th International Congress on Mathematical Education*, Hamburgo, Alemania.

Smith, E. (2008). Representational thinking as a framework for introducing functions in the elementary curriculum. En J. J. Kaput, D. W. Carraher y M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 133-163). Nueva York, NY: LEA.

Soares, J., Blanton, M. L. y Kaput, J. (2006). Thinking algebraically across the elementary school curriculum. *Teaching children mathematics*, *2*(5), 228-235.

ISBN 978-84-945722-3-4