

Procesos Cognitivos En La Resolución De Problemas Matemáticos Contextualizados

Elia Trejo Trejo, Patricia Camarena Gallardo, Natalia Trejo Trejo
Universidad Tecnológica Del Valle del Mezquital, Instituto Politécnico Nacional

Resumen

En este artículo se presenta la caracterización del proceso cognitivo de un grupo de enfoque ante problemas matemáticos contextualizados. Se presenta como caso particular los sistemas de ecuaciones algebraicas lineales en el contexto del balance de materia. El análisis cognitivo del grupo de enfoque se fundamenta en las teorías de los Campos Conceptuales y en la Matemática en el Contexto de las Ciencias. Los resultados son explicados en mediante las representaciones que construyen los alumnos de los invariantes operatorios en el esquema de entendimiento y de solución. Durante el análisis del actuar de los estudiantes, surgen diferentes tipos de representaciones propias del contexto en el que se desarrolla la investigación, estableciéndose una propuesta de clasificación: proposicional, figurativa no operativa, figurativa operativa, analógica y simbólica matemática. Se identifica a la representación simbólica matemática como la que propicia la comprensión y el dominio de los conceptos de interés. Por tanto, se caracterizó identificando el proceso de interpretación y selección de la información, estructuración y operacionalización. El dominio del campo conceptual se caracterizó por cinco niveles de conceptualización.

Palabras clave: campos conceptuales, representaciones, matemática en contexto, matemáticas, proceso cognitivo.

Introducción

Actualmente la importancia que tiene contextualizar el conocimiento matemático es innegable dado que se considera que el contexto y la actividad de los estudiantes coadyuvan a acelerar los procesos cognitivos de aprendizaje. Sin embargo, en la práctica el presentar una matemática contextualizada implica

desarrollar habilidades de pensamiento que permitan adquirir el conocimiento matemático y transferirlo a cualquier otra área de conocimiento.

Para lograr lo anterior, entre tantas propuestas metodológicas y para el caso particular de la investigación, destaca la propuesta por Camarena (1986) quien a través de la Matemática en Contexto de las Ciencias propone vincular las matemáticas enseñadas en el nivel superior con diversas áreas del conocimiento de los futuros ingeniero.

Ante una matemática contextualizada cobra importancia la actividad del profesor como facilitador del conocimiento mediante la selección adecuada de problemas matemáticos contextualizados y su guía en la solución de los mismos. Asimismo, es importante que a través de la investigación en aulas se proporcionen estrategias a los profesores para fomentar la integración de conocimientos matemáticos con las ciencias específicas de la formación de los futuros profesionistas y conocer desde el punto de vista cognitivo lo que ocurre con los estudiantes cuando trabajan una matemática contextualizada. Siendo esto último el principal interés de la investigación que se reporta.

Planteamiento del problema de investigación

En la Matemática Educativa se reconoce que las matemáticas enseñadas en los salones de clases difieren de la que las personas requieren en situaciones prácticas de su vida cotidiana y desde luego a la que los estudiantes una vez que culminan sus estudios necesitan en su actividad profesional. El presentar una matemática carente de sentido, para el que la estudia, incrementa el grado de dificultad de la transferencia del conocimiento matemático a otras áreas y desde luego, desarrolla actitudes negativas hacia el aprendizaje de las matemáticas.

Como una, entre tantas alternativas para evitar presentar una matemática como la descrita, se plantea la enseñanza de una matemática contextualizada en el área en que se forma y desarrollará profesionalmente el estudiante. Sin embargo, el presentar una matemática contextualizada, con problemas reales trae como

consecuencia la necesidad de vincular conocimientos de diversas áreas, no sólo matemáticos. Lo anterior, supone un proceso cognitivo de mayor nivel que una matemática operatoria o algorítmica.

En ese sentido, es importante caracterizar cómo se dan los procesos cognitivos ante una matemática contextualizada con la finalidad de generar estrategias de enseñanza encaminadas al logro de un aprendizaje significativo, en donde el estudiante es el eje principal.

Dada la intencionalidad de la investigación, de aproximarse a los procesos cognitivos desarrollados por los estudiantes ante una matemática contextualizada es necesario considerar las teorías que abordan estos procesos, entre las que destacan la de Piaget (1991), la teoría de representaciones semióticas de Duval (1993), los campos conceptuales de Vergnaud (1991), las funciones cognitivas de Feuerstein (1980) entre otras. En esta investigación se ha optado por la Teoría de los campos conceptuales de Vergnaud dado que enfatiza la importancia de la adquisición de conceptos científicos y técnicos.

A la luz de esta Teoría el problema de investigación trata la problemática de aproximarse al proceso cognitivo de los estudiantes frente a un problema contextualizado. Específicamente, interesan las representaciones que construyen los estudiantes de los invariantes operatorios utilizados para abordar una situación problema.

Al trabajar con problemas contextualizados, durante el análisis de la información, es necesario tomar conceptos y/o temas específicos de la matemática como del contexto que se elija. Por tanto, se trabaja con la Matemática en el Contexto de las Ciencias, ya que permite vincular a las matemáticas con otras áreas del conocimiento. Por ser de interés de las autoras, se han seleccionado los sistemas de ecuaciones algebraicas lineales como concepto matemático y, del contexto, se toma un caso de balance de materia, situación inserta en la carrera de Técnico Superior Universitario en Procesos Alimentarios.

Para el desarrollo de la investigación, se toman como fundamentos de la contextualización y del análisis, la teoría de la Matemática en el Contexto de las Ciencias de Camarena (1984) y los Campos Conceptuales de Vergnaud (1991), respectivamente. Durante el análisis cognitivo de los estudiantes, se consideran las características de los esquemas y sus componentes (propósitos, reglas de acción, inferencias e invariantes operatorios) que constituyen la representación de la situación problema realizada por un grupo de enfoque, por lo que se tiene la necesidad de recurrir a una propuesta de esquemas de representación y entendimiento, así como a formas de simbolización como las que realiza Flores (2003) en el marco de la teoría de los campos conceptuales de Vergnaud.

En consecuencia, el objetivo de la investigación es describir el proceso cognitivo de un grupo de enfoque mediante el análisis de las representaciones que elabora de los invariantes operatorios en los esquemas de entendimiento y solución de las situaciones problema que abordan los estudiantes ante la vinculación de un sistema de ecuaciones algebraicas lineales con el balance de materia.

Marcos Teóricos

Matemática en Contexto

Como se indica en párrafos anteriores, en la Teoría de la Matemática en Contexto de las Ciencias se identifica la fase didáctica, denominada Matemática en Contexto (Camarena, 1984) que constituye el medio para que se logren los procesos cognitivos. Con la Matemática en Contexto el estudiante trabaja con una matemática contextualizada en las áreas del conocimiento de su futura profesión en estudio, en actividades de la vida cotidiana y en actividades profesionales y laborales, todo ello a través de eventos contextualizados, los cuales pueden ser problemas o proyectos.

La Matemática en Contexto contempla nueve etapas, que se desarrollan en al ambiente de aprendizaje en equipos de tres estudiantes: Líder académico, líder emocional y líder de trabajo. Estas etapas son (Camarena, 1995; 2000):

1. Determinación de los eventos contextualizados;
2. Planteamiento del evento o fenómeno contextualizado;
3. Determinación de las variables (dependientes, independientes y controladas) y las constantes del problema;
4. Inclusión de los temas y conceptos matemáticos;
5. Determinación del modelo matemático;
6. Solución matemática del problema;
7. Determinación de la solución requerida por el problema en el ámbito de las disciplinas del contexto;
8. Interpretación de la solución en términos del problema y áreas de las disciplinas del contexto;
9. Descontextualización de los conceptos y temas a tratarse en el curso.

Campos Conceptuales de Vergnaud

Una aproximación psicológica y didáctica de la formación de conceptos matemáticos lleva a considerar el aprendizaje de un concepto como el conjunto de situaciones problema que constituyen la referencia de sus diferentes propiedades y el conjunto de esquemas puestos en práctica por los sujetos en esas situaciones problema (Vergnaud, 1996). El sentido del concepto matemático se adquiere a través de los esquemas evocados por el sujeto individual para resolver una situación problema.

Los esquemas pueden ser estudiados a través de las representaciones, Vergnaud menciona que el estudiante transforma una acción sobre el objeto matemático, estableciendo control sobre sí mismo mediante las relaciones y clasificaciones en su realidad, de tal modo que se van presentando invariantes en el desarrollo del conocimiento; de esta manera, las representaciones para Vergnaud son todas

aquellas herramientas, cualquier notación, signo o conjunto de símbolos que representa alguna cosa que constituye típicamente algún aspecto del mundo exterior o del mundo interior del individuo (incluida la imaginación).

Según Flores (2002) la explicación de Vergnaud sobre el esquema lleva al entendimiento de la relación entre el problema y el individuo que le da sentido y actúa en consecuencia. El esclarecimiento de cómo se coordinan y articulan los esquemas está dado por la representación que forma parte del proceso de dar significado y solucionar un problema. Mediante reglas de acción e inferencias, se identifica el problema de que se trata y cuáles son las variables conocidas y desconocidas, dando origen al esquema de entendimiento a partir del cual se llega al esquema de solución que, a su vez, conduce a la solución del problema. Con esta idea, el concepto de esquema de Vergnaud se analiza teniendo en cuenta los esquemas de entendimiento y solución que propone Flores (2002).

Método

Para realizar la investigación sobre el análisis cognitivo de los estudiantes frente a problemas matemáticos contextualizados, se seleccionaron tres problemas, mismos que han sido trabajados previamente por un grupo de docentes cuidando que las competencias requeridas para su solución se relacionen con un sistema de ecuaciones algebraicas lineales y balance de materia (Trejo y Camarena, 2011). En ese sentido, los problemas o eventos contextualizados que posibilitan el análisis de la actividad cognitiva de los estudiantes se muestran en la figura 1. Es importante destacar que los problemas contextualizados se asocian con un balance de materia, se resuelven mediante un sistema de ecuaciones algebraicas lineales y tienen diferente grado de dificultad.

Elección de problemas de contexto

1. Un fabricante de productos químicos debe surtir una orden de 500 L de solución de ácido al 25% (25% del volumen es ácido). Si en existencia hay disponibles solución al 30% y al 18%. ¿Cuántos litros de cada una debe mezclar para surtir el pedido?
CONTEXTO: Área de la ciencia Química (balance de materia en situaciones de mezclado de soluciones).

2. Se deben preparar 100 mL de dos soluciones azucaradas, una al 60% y la otra al 35%. A partir de las soluciones previamente preparadas es preciso realizar una mezcla de las mismas para obtener 100 mL de una solución azucarada al 50.
CONTEXTO: Área de la ciencia Química (problema de índole técnico de balance de materia en situaciones de mezclado de soluciones).

3. Se desea obtener un lote de néctar de mora que tenga 20% de pulpa y 12 ° Bx finales, con un índice de madurez de 15. (Recordar que el índice de madurez es la relación de azúcar/ácido presentes en el néctar). La pulpa disponible tiene 12° Bx y 1.6% de acidez. ¿Cuántos Kg de pulpa y de sacarosa se deben mezclar para obtener un lote de néctar con 20% de pulpa y 12 °Bx?
CONTEXTO: Problema de carácter técnico del área profesional del TSU en el que se requiere un balance de materia para su solución).

Figura 1. Problemas de contexto. Adaptado de Trejo y Camarena (2011).

Una vez seleccionados los problemas contextualizados, se desarrollan las dos etapas siguientes:

- 1) Contextualización de sistemas de ecuaciones algebraicas lineales en el balance de materia, utilizando las etapas de contextualización de la matemática en contexto.
- 2) Caracterización del proceso cognitivo de los estudiantes al trabajar con problemas matemáticos contextualizados mediante el análisis del actuar de los estudiantes a través de sus representaciones de las invariantes de los esquemas de entendimiento y solución a los que recurren durante la solución de las situaciones problema.

La muestra

Se trabaja con un grupo de enfoque de tres estudiantes del primer cuatrimestre de la carrera de Técnico Superior Universitario en Procesos Alimentarios, los cuales se encuentran cursando una asignatura de matemáticas que incluye el tema de sistemas de ecuaciones algebraicas lineales, así como un curso de química en el que se aborda el tema de balance de materia mediante el mezclado de soluciones químicas; ambos cursos están desvinculados curricularmente. El evento contextualizado que van a enfrentar es un fenómeno que se encuentra de manera

recurrente en operaciones específicas del área de formación profesional y laboral del técnico en alimentos.

Instrumentos de observación

La obtención de los datos para el análisis cognitivo se hace mediante la obtención de sus hojas de trabajo y filmaciones que ayudan a refutar o confirmar el análisis que se efectúa con la información escrita. El análisis es cualitativo y atiende las diferentes representaciones que hacen los estudiantes de los invariantes en los esquemas de entendimiento y resolución que construyen en su actuar ante situaciones problema.

Implementación de las situaciones problema

Las situaciones problema son llevadas a cabo por los estudiantes en el laboratorio de ciencias en diferentes sesiones que cubren un total de dieciséis horas.

Resultados Y Discusión

Contextualización de un sistema de ecuaciones algebraicas lineales con un balance de materia

Las etapas de contextualización descritas en el apartado del marco teórico, que se encuentran inmersas en la estrategia didáctica de la matemática en contexto, constituyen el proceso metodológico que se utiliza para la contextualización de sistemas de ecuaciones algebraicas lineales (SEL) en el balance de materia (BM) en eventos contextualizados (situaciones problema) de mezclas de soluciones. En la figura 2 se muestra de forma resumida el proceso de contextualización realizado para los tres problemas contextualizados que en términos de Vergnaud se definen como las situaciones problema. Es sobre estos problemas matemáticos contextualizados sobre los que trabajan los estudiantes y que permitirán describir el actuar de los estudiantes frente al campo conceptual de sistema de ecuaciones

algebraicas lineales en el contexto de un balance de materia.

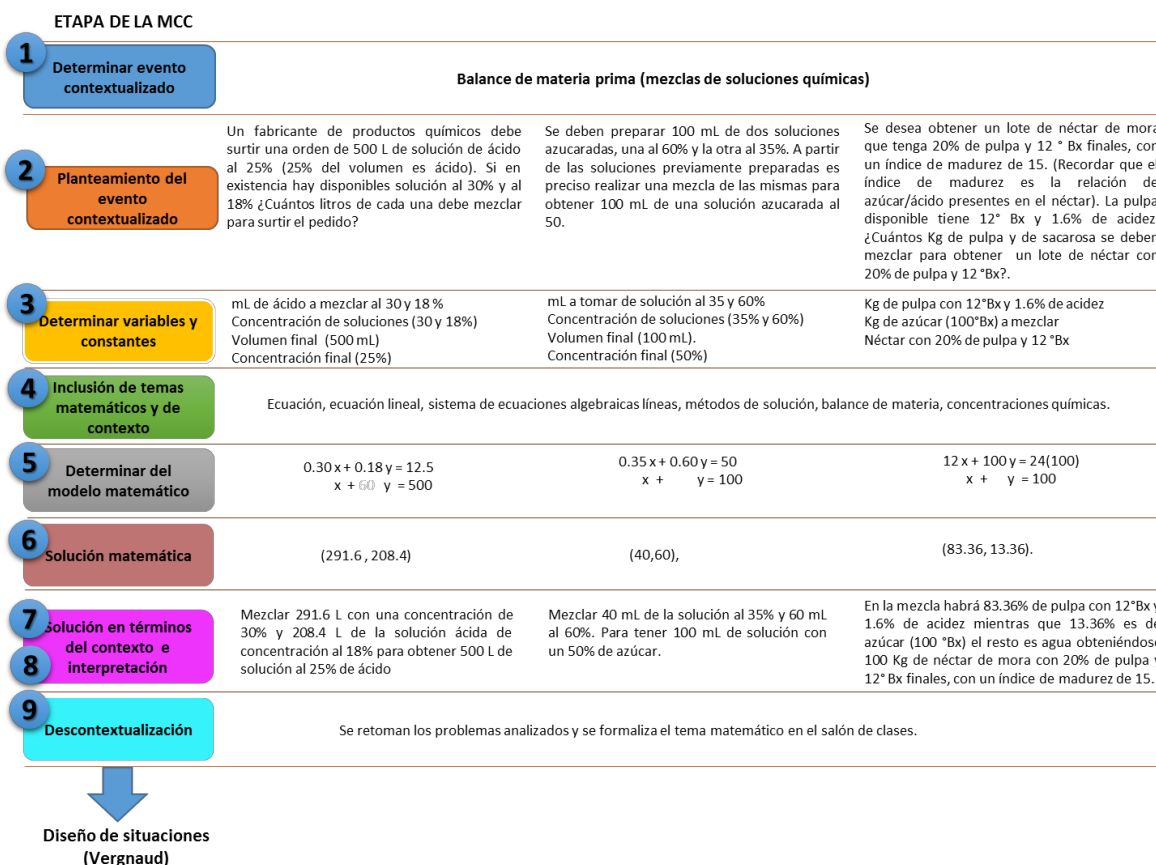


Figura 2. Proceso de contextualización. Fuente: Elaboración propia (2014).

El proceso de contextualización de sistemas de ecuaciones algebraicas lineales en el balance de materia permitió establecer la relación entre conceptos que pertenecen a dos áreas de conocimiento distintas y observar la estrecha relación que existe entre ambas. Asimismo, permite identificar las representaciones que puede generar la situación problema y proporciona a los estudiantes un conjunto de elementos que constituyen los siguientes invariantes operacionales presentes en la situación problema.

- Un sistema de ecuaciones lineales algebraicas con dos incógnitas determina la relación que existen entre dos variables.
- El balance de materia se muestra como un sistema de ecuaciones lineales algebraicas que debe mantener igual la cantidad de producto que entra y la que sale, asociándolo con el sentido de igualdad.

De igual modo, durante la contextualización se identifican los conceptos matemáticos y contextuales que entran en juego, tales como ecuación algebraica, ecuación algebraica lineal, sistemas de ecuaciones, métodos de solución, balance de materia, concentraciones y mezclas de sustancias químicas.

Caracterización del proceso cognitivo de los estudiantes al resolver problemas contextualizados

Como se ha referido se trabajó con un grupo de enfoque de estudiantes del Programa Educativo de Técnico Universitario en Procesos Alimentarios. La caracterización del proceso cognitivo se realiza mediante el análisis del actuar de los estudiantes a través de las representaciones que hacen de los invariantes en los esquemas que construyen, en particular, el esquema de entendimiento y el esquema de solución, según lo que propone Flores (2002).

En seguida se describen los resultados obtenidos después de analizar los documentos escritos y las filmaciones del actuar del grupo de enfoque.

a) Adaptación de esquemas de entendimiento y solución

Durante el análisis de resultados se ha visto la necesidad de adaptar la propuesta de los esquemas de entendimiento y solución de Flores (2002) dado que estos han sido insuficientes ante la solución de los problemas matemáticos contextualizados.

En atención con lo anterior, en las categorías resultantes de la investigación se identifican:

- Un esquema de *entendimiento canónico*, en el que se observa la comprensión, por parte del grupo de enfoque, de la situación problema utilizando de forma adecuado los propósitos, las reglas de acción, las inferencias y las representaciones de los invariantes operatorios.
- Un *esquema algorítmico*, permite que el grupo de enfoque recurra a la simbolización y el procedimiento convencional del mecanismo que se va a

seguir para dar solución a la situación problema. En la investigación se distingue:

Aritmético, es cuando se hace uso de operaciones aritméticas para la resolución de las situaciones en contexto.

Algebraico, identificado cuando se recurre a la notación propia del lenguaje algebraico en la solución de las situaciones planteadas.

Consecuentemente, surgen las categorías de representación canónica algorítmica, canónica algorítmica aritmética y canónica algorítmica algebraica.

b) Identificación de representaciones propias del contexto

Durante las actividades en las situaciones problemas que surgen de la contextualización de sistemas de ecuaciones algebraicas lineales con el balance de materia, se detectó en el actuar de los estudiantes, el uso recurrente de diferentes tipos de representaciones que se consideran específicas y propias de la vinculación de dos áreas del conocimiento, es decir, que pueden o no surgir en otras vinculaciones.

Por consiguiente, además de las categorías de representación analizadas con la clasificación de Flores, y por la importancia que tuvieron las representaciones encontradas para la construcción del conocimiento de dos ciencias vinculadas, fue necesario definir una clasificación de los tipos de representaciones encontrados, quedando descritas como a) tipo proposicional (P); b) tipo figurativa no operativa (FNO); c) tipo figurativa operativa (FO); d) tipo analógica (AN) y e) tipo simbólica matemática (M). La última, considerada como la representación que permite la aprehensión del conocimiento matemático de interés se caracterizó por distinguir tres procesos para su construcción:

1. Proceso de interpretación y selección de la información;
2. Proceso de estructuración y
3. Proceso de operacionalización.

c) Procesos cognitivo al resolver problemas matemáticos contextualizados

Los resultados obtenidos permitieron elaborar una escala de desarrollo cognitivo en los estudiantes ante la solución de problemas matemáticos contextualizados (figura 3), comprobando lo referido por Vergnad en relación al dominio gradual de los conocimientos.

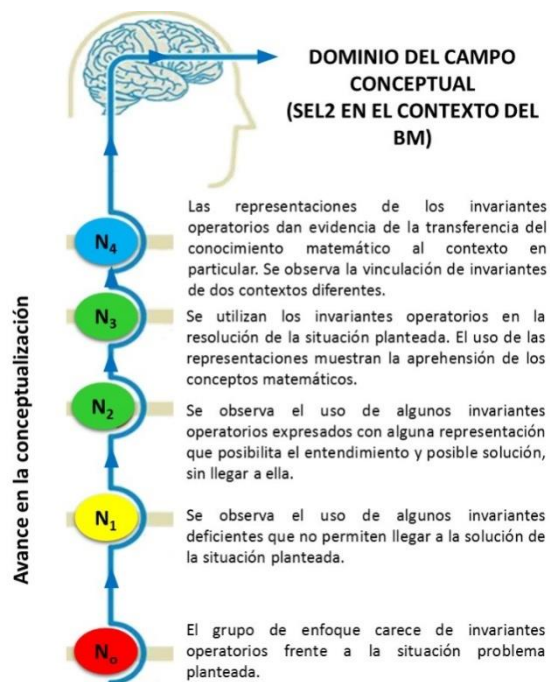


Figura 3. Dominio gradual del campo conceptual de un sistema de ecuaciones algebraico lineal en el contexto de un balance de materia. Fuente: Diseño propio (2014).

d) Sobre las representaciones de los invariantes operatorios que caracterizan el desarrollo del proceso cognitivo.

La solución experta y por tanto el dominio del campo conceptual se da cuando el grupo de enfoque entiende, estructura y domina los invariantes operatorios propios del campo. Lo anterior se observa cuando se recurre una representación simbólica matemática (analítica y gráfica) correspondiente a un sistema de ecuaciones algebraicas lineales en el contexto de balance. Es decir, se cuenta con los esquemas de entendimiento y solución para la situación planteada. El dominio del campo conceptual está en función del uso de las diferentes representaciones ante

las situaciones de contexto por lo cual habrán de diseñarse o elegirse situaciones de contexto con la finalidad de acelerar los procesos cognitivos en los estudiantes.

Conclusiones

Durante el desarrollo de las actividades realizadas por el grupo de enfoque, se identificaron las categorías de representación de Flores; sin embargo, éstas no fueron suficientes para describir el actuar de los estudiantes ante una matemática contextualizada; fue necesario definir tipos de representaciones, los cuales surgieron de manera espontánea durante el actuar de los estudiantes.

Si bien al final de las sesiones los estudiantes disponen de esquemas apropiados para enfrentar eventos contextualizados que requieren sistemas de ecuaciones algebraicas lineales, es necesario explorar más acerca de esto, sobre todo en contextos diferentes.

Referencias

- Camarena, G. P. (1984), "El currículo de las matemáticas en ingeniería", en *Memorias de las Mesas redondas sobre definición de líneas de investigación en el IPN*, México.
- Camarena, G. P. (1995), "La enseñanza de las matemáticas en el contexto de la ingeniería", ponencia presentada en el XXVIII Congreso Nacional de la Sociedad Matemática Mexicana, México. Camarena, G. P. (2000), Informe del proyecto de investigación titulado: "Etapas de la matemática en el contexto de la ingeniería", México, ESIME-IPN.
- Duval, R. (1993), "Semiosis y noesis", en E. Sánchez y G. Zubieta (eds.), *Lecturas en didáctica de la matemática: Escuela Francesa*, México, Sección de Matemática Educativa del CINVESTAV-IPN, pp. 118-144.
- Feuerstein, R., Y. Rand, M. B. Hoffman y R. Miller (1980), *Instrumental Enrichment*, Baltimore, University Park Press.

Flores, R. (2002), *El conocimiento matemático en problemas de adición y sustracción: un estudio sobre las relaciones entre conceptos, esquemas y representación*, Tesis de Doctorado en Educación, Aguascalientes, Ags., México.

Piaget, J. (1991), *Introducción a la epistemología genética, el pensamiento matemático*, España, Paidós (Psicología Evolutiva).

Trejo, T. E.; Camarena, G. P. (2011). Análisis cognitivo de situaciones problema con sistemas de ecuaciones algebraicas en el contexto del balance de materia. *Educación Matemática*. Vol 23 Núm. 2, pp.65-90. Grupo Santillana, México.

Verganud, G. (1991), *El niño, las matemáticas y la realidad: problemas de la enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria*, México, Trillas.

Verganud, G. (1996), "The Theory of Conceptual Fields", en L. Stette, P. Nesher, P. Cobb, G. A. Goldin y B. Greer (eds.), *Theories of Mathematical Learning*, Mahwah, NJ, Lawrence Erlbaum, pp. 219-240.