
DESENVOLVENDO A GEOMETRIA ANALÍTICA ENQUANTO TÓPICO ESCOLAR

ANALYTIC GEOMETRY AS A SECONDARY SCHOOL SUBJECT

Maria Cristina Araújo-de Oliveira, José Manuel Matos***

Resumo: ao longo dos séculos XIX e XX, a Geometria analítica incorporou os currículos das escolas secundárias em muitos países. A sua finalidade abrange tanto a expressão de entidades geométricas por métodos algébricos, quanto a interpretação geométrica de expressões algébricas e essas duas perspectivas estão enraizadas nas abordagens de Descartes e Fermat. Trabalhos anteriores estudaram a abordagem de Lacroix ao tema, ou o estudo de livros didáticos relevantes. Neste texto, estudamos os modos como a geometria analítica foi desenvolvida como tópico escolar para a escola secundária através de um estudo comparativo explorando manuais utilizados em dois sistemas educacionais distintos, Brasil e Portugal. A análise se concentra em livros didáticos do final do século XIX até meados do século XX, conhecidos por serem usados nas escolas.

Palavras chave: Geometria Analítica, interpretação geométrica de expressões algébricas, História da Educação Matemática, Estudos Comparativos.

Abstract: throughout the 19th and 20th centuries, analytical Geometry was incorporated into the curricula of secondary schools in many countries. Its purpose encompasses both the expression of geometric entities by algebraic methods, and the geometric interpretation of algebraic expressions, and these two perspectives are rooted in Descartes and Fermat's approaches. Previous works on the subject has studied Lacroix's approach, or the study of relevant textbooks. In this article, the ways in which analytic geometry was developed as a school subject for secondary school are studied, through comparative research that explores the manuals used in two different educational systems: that of Brazil and that of Portugal. The analysis focuses on textbooks from the late 19th to mid-20th century, which are known to have been used in schools.

Keywords: Analytical Geometry, geometric interpretation of algebraic expressions, History of Mathematical Education, Comparative Studies.

1. Introdução, Geometria analítica nos programas brasileiros

No Brasil a escolarização em nível secundário somente se estrutura, em termos de sequência e obrigatoriedade de conclusão para ingresso no ensino superior, a partir da Reforma Francisco

* Doutorado em Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, Brasil. Professora Universidade Federal de Juiz de Fora, Brasil. E-mail: mcrisoliveira6@gmail.com. ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-3346-1578>.

** Doutorado em Educação Matemática, University of Georgia, Athens, Estados Unidos da América. Professor Universidade Federal de Juiz de Fora, Brasil. E-mail: jmm@fct.unl.pt. ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-2809-6561>.

Campos em 1931. Essa legislação, sobretudo relativamente à matemática, foi sustentada pelo Colégio Pedro II⁵, até então referência de ensino. As propostas para o ensino de matemática já haviam sido implantadas nesse Colégio pela influência do professor e diretor, Euclides de Medeiros Guimarães Roxo⁶, então assessor do ministro Francisco Campos. Roxo propunha uma mudança estrutural, tanto no conteúdo quanto nos métodos, baseada nas discussões advindas do primeiro movimento internacional de modernização do ensino de Matemática sistematizado pela Comissão Internacional de Instrução Matemática, sob a presidência do matemático alemão Felix Klein, no início do século XX. Tal proposta visava acabar com a matemática ensinada em partes como: álgebra, geometria, aritmética trigonometria e geometria analítica. Baseando-se nas ideias de Klein, Roxo defendia o ensino de matemática, que reuniria todos os ramos – geometria, aritmética, álgebra – trigonometria, geometria analítica – numa única disciplina. O conceito central para tal unificação era a noção de função, que passou a integrar os manuais didáticos a partir do primeiro ano do ensino secundário.

Contudo, em relação aos cursos complementares, nos quais a Geometria Analítica era ministrada, não se caracterizou uma padronização que permitisse configurar uma disciplina de Matemática [1]. Esses cursos tinham a finalidade de preparar os jovens para prestar os exames que davam acesso aos cursos superiores majoritariamente de: Direito, Medicina e Engenharia.

Em 1942, a Reforma Capanema reorganiza o ensino secundário em dois ciclos, o primeiro de 4 anos denominado curso ginásial e o segundo de 3 anos, denominado curso colegial. Este último antecedia os estudos superiores e se dividia em clássico, voltado às humanidades e às línguas; e científico, voltado às ciências biológicas e exatas.

A Geometria Analítica fazia parte do Programa para os cursos clássico e científico no 3º ano do curso Colegial. Os assuntos a serem abordados eram: coordenadas (reta orientada, coordenadas retilíneas no plano); distância entre pontos; divisão de segmentos; determinação de uma direção, ângulo entre duas direções. E ainda, equações de lugares geométricos: reta, círculo, elipse, hipérbole e parábola.

No início da década de 1950, publicou-se a Portaria Ministerial nº 966 de 02 de outubro de 1951, que instituiu, por intermédio do então Ministro da Educação e Saúde, Simões Filho, uma revisão dos currículos e das orientações das disciplinas do ensino secundário tanto ao nível do ginásio, quanto do colégio. A referida portaria tinha como um de seus objetivos suprir a escassez ou ausência de considerações curriculares e metodológicas dos programas anteriores – Reforma Capanema –, instaurando em toda federação, progressivamente a partir de 1952, um programa denominado Programas Mínimos. Elaborado por membros do Colégio Pedro II, indicava os conteúdos básicos, ou mínimos que todas as instituições deveriam ministrar.

⁵ Tradicional instituição de ensino público federal, localizada no estado do Rio de Janeiro. É o segundo mais antigo dentre os colégios em atividade no país, fundado em 1837, na época do período regencial brasileiro. Tinha como um de seus objetivos no período imperial, formar as lideranças nacionais. E nesse sentido supervisionava e influenciava as demais instituições educacionais funcionando como se fosse um ministério da educação.

⁶(1890 – 1950), nascido no estado de Sergipe, foi professor de matemática e um dos líderes do Colégio Pedro II na década de 1920.

Observa-se uma mudança significativa na abordagem dada a Geometria Analítica na legislação: seja na localização, passando do final do 3º ano na década de 1940 para o início entre o estudo de limites e derivadas nas obras do 3º ano na década de 1950; seja na retirada do estudo das cônicas, ficando o conteúdo restrito a abordagem de coordenadas para retas e circunferências.

No final da década de 1950, novo debate opõe dois grupos: de um lado os educadores comprometidos com os ideais da Escola Nova, e de outro, os defensores da rede privada de ensino, que achavam que as famílias deveriam ser livres para escolher o tipo de ensino de seus filhos.

Em dezembro de 1961, através da lei nº4024/61 a União apresenta a versão final da 1ª Lei de Diretrizes e Bases da Educação brasileira (**LDB**). A lei contemplou o ideário dos defensores da rede privada em detrimento das ideias escolanovistas. A **LDB** apresentada em 1961 em linhas gerais promovia a descentralização e a liberdade para estados, municípios e escolas de forma a se adequarem às necessidades e especificidades de cada localidade.

Com respeito ao ensino de matemática, ocorriam, sobretudo a partir da década de 1950, discussões mundiais, principalmente na Europa e nos Estados Unidos, sobre a necessidade de uma nova estrutura curricular e metodológica para o ensino dessa disciplina.

Uma das principais propostas era que o currículo contemplasse os avanços da ciência matemática, principalmente concernentes à inclusão no ensino secundário do estudo das estruturas algébricas, da teoria dos conjuntos, da geometria vetorial e transformações, entre outros, de modo a aproximar a matemática desenvolvida nos cursos superiores da ensinada no ensino secundário. Tal proposta baseou-se nas concepções Bourbakistas de Matemática e ficou conhecida como Matemática Moderna (**MM**).

Quanto aos métodos, as orientações se aproximam do processo de ensino e de aprendizagem, do papel do professor e do aluno. Entre as recomendações estão a valorização:

- i) da compreensão em detrimento à mecanização;
- ii) da aprendizagem por descoberta;
- iii) da intuição como algo que deve preceder o ensino dedutivo;
- iv) importância dada ao trabalho experimental como uma etapa anterior à abstração.

O seminário de Royaumont, que se realizou no final de 1959, na França, e reuniu em torno de 50 representantes de 18 países é considerado um marco para o Movimento da Matemática Moderna (**MMM**). Deste seminário e do encontro de Dubrovnik, realizado em 1960, emergiram orientações sobre o ensino de Matemática tanto com relação aos conteúdos matemáticos como aos métodos de ensino de tais conteúdos, [2].

A Matemática Moderna foi discutida por educadores brasileiros a partir do III Congresso Brasileiro do Ensino de Matemática, realizado no Rio de Janeiro, em 1959. Embora tenha surgido uma primeira

argumentação brasileira em favor dessa nova concepção, já no II Congresso Brasileiro de Ensino de Matemática realizado no Rio Grande do Sul, [3].

Em 1962, no IV Congresso, realizado no Pará, tal movimento foi o tema central das discussões a respeito da reestruturação curricular para o ensino da Matemática, sobretudo por influência do **GEEM**. Nesse evento, o grupo propôs uma lista de assuntos mínimos para um programa moderno de Matemática em todos os níveis do ensino secundário. Essa lista ficou conhecida como *Assuntos Mínimos*.

Nesse programa havia ainda algumas sugestões sobre o que deveria ser explorado. E no programa de geometria analítica as sugestões eram: recordar, sistematizando, os elementos de Geometria Analítica já introduzidos no curso ginasial (coordenadas cartesianas dos pontos, representação da reta como função de primeiro grau no plano cartesiano; examinar as equações como sub-conjuntos de pontos do plano. Poder-se-ia iniciar, inclusive, um tratamento de geometria analítica com álgebra vetorial, [4].

Pela proposta do **GEEM**, além do estudo da reta e da circunferência, retorna o estudo das cônicas a partir das equações cartesianas. Embora os Assuntos Mínimos não fossem oficializados, o programa vigorou em grande medida pela força dos seus difusores no Brasil e pela *abertura* que a **LDB/1961** concedia aos estados e municípios. A busca pela padronização e organização continuou na segunda **LDB**, publicada em 1971, que remodelou o ensino primário e secundário, dando origem ao ensino de 1º e 2º graus.

1. Geometria analítica nos programas portugueses

Desde meados do século XIX, o ensino secundário português compreendia 7 anos após o ensino primário. Tratava-se de um sistema centralizado em que os programas para as diversas disciplinas eram definidos pelo governo. A geometria analítica é mencionada pela primeira vez em 1886 no programa da disciplina de *Matemática elementar* do 6.º ano do curso dos liceus que correspondia ao atual 10.º ano de escolaridade, [5]. Marcando precisamente essa inovação, o tópico denomina-se *Primeiras noções de geometria analítica* e especifica os seguintes temas⁷:

1.1. Primeiras noções de geometria analítica

Representação geométrica das quantidades negativas.

Equações do ponto; equação da linha reta.

Problemas relativos à linha reta.

Equação do círculo referido ao centro ou a uma extremidade de um diâmetro como origem.

Tangentes ao círculo. [5, p. 3.391, negrito no original].

Trata-se do último tópico do programa e a sua inclusão é feita à custa do encurtamento do espaço dedicado à geometria descritiva. O programa não contém mais nenhuma menção de temas de geometria analítica, nem conhecemos outra documentação que orientasse de algum modo

⁷ A grafia foi atualizada em todas as citações.

professores e autores de manuais. Ficava pois ao critério de cada um a concretização do tópico. Foi de curta duração esta inclusão pois no final de 1888 o tópico é retirado dos programas, [6], e só regressa em 1895. A tabela 1 lista os momentos em que o tópico faz parte dos programas relacionando-os com as alterações curriculares relevantes e com momentos base do ensino secundário.

Ano	Geral	Matemática (secundário)	Geometria Analítica
1836	Criação dos liceus		—
1860		Primeiros programas	—
1886			Incluída
1888			Retirada
1895	Consolidação do ensino secundário		Pequena referência
1905		Análise incluída nos programas	Incluída, cónicas
1926			—
1930			Incluída, cónicas
1936		Simplificação dos programas	—
1947		Alargamento. Incluída a análise	Incluída, cónicas
1963		Matemática Moderna (experiência)	Incluída, espaços vetoriais
1973		Matemática Moderna	Incluída, espaços vetoriais

Tabela 1. Cronologia da inclusão da geometria analítica nos programas do ensino secundário português. **Fonte:** Legislação.

Em 1895, com a reforma Jaime Moniz que estabiliza o ensino liceal, e após um hiato de sete anos, a geometria analítica regressa, passando a ocupar um lugar em muitos dos programas de Matemática (com exceção dos períodos 1926-1930 e 1936-1948). Nesse ano de 1895 o tema merece uma curta referência quase no final do 5.º ano liceal (atual 9.º ano de escolaridade):

Coordenadas rectilíneas. Determinação da posição de um ponto pelas suas distâncias a dois eixos fixos: equação do ponto. Lugar geométrico de uma equação a duas variáveis: construção da curva por pontos. O lugar geométrico da equação $y=ax+b$ é uma linha reta, [7, p. 2.518].

Embora explicitando menos temas do que nos programas anteriores, sublinha-se a abordagem centrada nos lugares geométricos das equações a duas variáveis, bem como a quase total ausência de temas usuais próprios da geometria, perspectiva diferente da anteriormente adoptada. Aparentemente, o legislador não tinha como prioridade que os alunos apreciassem os modos como a álgebra esclarecia a geometria, mas o seu inverso, usar a representação geométrica para ilustrar a álgebra.

A reforma de 1905 apresenta, pela primeira vez, em toda a sua extensão o conjunto dos temas de geometria analítica que se repetirão, embora com algumas interrupções, como mencionámos, até ao princípio da década de 1970. Esta inovação é tanto mais significativa por estar integrada numa

alteração legislativa que procurava modificar alguns aspetos do decreto de 1895, nomeadamente integrando o ensino da análise, [8].

O programa de 1905 inclui, para além das noções elementares, o estudo da reta (sua equação, interseção de duas retas, condição de paralelismo e perpendicularidade, equação da reta determinada por dois pontos, ângulo de duas retas), a distância entre dois pontos, a equação de lugares geométricos, circunferência e estudo das outras cónicas e a representação gráfica das funções circulares, [9, p. 3.872].

A geometria é recolocada no centro, sendo discriminados diversos assuntos dotando temas geométricos de uma linguagem algébrica. Por exemplo a equação da reta já não aparece como um lugar geométrico, nem se discutem representações gráficas genéricas de equações de duas variáveis, mas surgem equações das cónicas. Esta opção é mais visível quando reparamos que o tópico está no final do programa imediatamente após a interpretação geométrica do conceito de derivada. Para os autores do programa, parece que a geometria analítica é um aprofundamento de temas geométricos enquanto que o estudo da análise, e em particular, a sua interpretação geométrica, é feito de forma independente.

Todos os programas posteriores até 1931 [10-13] mantêm esta perspectiva sendo o tópico lecionado após o estudo de gráficos de funções. Mais tarde, entre 1931 e 1936, o tópico é colocado antes do estudo das funções. Nas suas “Observações” o programa de 1931

[reconhece] a necessidade de iniciar o estudo da matemática na 6.^a classe por algumas noções de geometria analítica, em ordem a facilitar a fixação de determinadas questões pelo emprego do método gráfico feito a seguir ao analítico, [13, p. 2.202].

O tópico é pois usado como meio de aprofundar o estudo de representações cartesianas que depois facilitarão o estudo gráfico de funções.

O programa de 1930 vai delimitar os problemas relativos à reta que merecem ser estudados: equação da reta definida por dois pontos, coordenadas do ponto de intersecção de duas retas, ângulo de duas retas e condições de perpendicularidade e de paralelismo. Esta listagem de problemas vai-se repetir com uma formulação idêntica em todos os programas estudados a partir daquela data.

O estudo de lugares geométricos, normalmente de equações de duas variáveis é incluído em todos os programas até 1931, sendo apenas retomado em 1947. Nesse ano, o estudo de funções e a geometria analítica regressam aos programas, mas este segundo tópico é ensinado depois do primeiro não tendo pois uma função preparatória da representação gráfica de funções.

A geometria analítica encontra-se quase sempre num dos dois últimos anos de escolaridade antes da universidade. Em geral, o tópico, posicionado como o último tópico do programa, aparece depois da utilização de sistemas de eixos para estudar a representação gráfica de funções. A intenção do legislador seria pois que a geometria analítica revelasse como temas usuais da geometria euclidiana podiam ser tratados por meios algébricos.

A partir de 1973 a Matemática Moderna faz a sua entrada nos programas portugueses após ter sido experimentada desde 1963 num número cada vez mais alargado de escolas secundárias. Agora o tópico vai ser estudado inserido num espaço vetorial em R^2 .

2. Geometria Analítica em livros de texto brasileiros

2.1. A abordagem de Thales Mello Carvalho

Um manual representativo da matemática em nível secundário no Brasil, entre as décadas de 1940 e 1950, é *Matemática, terceira série. De acordo com os programas dos cursos Cursos Clássico e Científico* da autoria de Thales Mello Carvalho, [14]. Atuante autor de livros didáticos de matemática para o ensino secundário, Thales foi também professor do Instituto de Educação e da Faculdade Nacional de Ciências Econômicas no Rio de Janeiro.

Na obra de Thales Mello Carvalho a Geometria Analítica é abordada no volume destinado ao último ano do ensino secundário, nos dois últimos capítulos. Os temas tratam do estudo da reta, da circunferência, das cônicas – elipse, hipérbole e parábola – com tratamento em coordenadas cartesianas.

Inicialmente o autor apresenta vários sistemas de coordenadas – cartesianas, polares, bipolar, polo-diretriz – e explora o sistema cartesiano em situações em que os eixos possuem uma inclinação qualquer. Deduz algumas relações, como a distância entre dois pontos, a partir de coordenadas cartesianas num sistema de eixo não ortogonais e indica como caso particular quando as coordenadas são retangulares. A reta, a circunferência e as cônicas são tratadas como lugares geométricos e as equações cartesianas são trabalhadas a partir das propriedades específicas dessas curvas.

Os temas são apresentados em itens, que fazem referência aos antigos pontos, por exemplo, Equação da Hipérbole é o ponto 15. Após uma explanação teórica, segue uma lista de exercícios para resolver. Em alguns tópicos, como, por exemplo, no ponto 7 Reta que passa por dois pontos, o autor traz um exemplo numérico da dedução sintetizada numa fórmula.

Cabe mencionar que esses mesmos tópicos tratados nessa obra são atualmente estudados no último ano do ensino médio brasileiro.

2.2. A abordagem de Euclides Roxo, Haroldo Cunha, Roberto Peixoto e Dacorso Netto

Representativo do período em que o currículo se organizou a partir dos Programas Mínimos de 1951, a 5ª edição do livro de Euclides Roxo, Haroldo Cunha, Roberto Peixoto e Dacorso Netto, *Matemática 2º ciclo* [15] apresenta o programa relativamente à matemática nas primeiras páginas. Acompanhando a normativa, a obra faz uma breve introdução às coordenadas cartesianas, já estabelecendo eixos ortogonais, e explicitando numa perspectiva cartesiana as equações como representações algébricas dos lugares geométricos.

O estudo da reta e da circunferência a partir de uma abordagem analítica se situa entre os capítulos que tratam de limites de funções e derivadas.

A disposição do conteúdo na obra acompanha o estilo praticado em décadas anteriores, tópicos que são numerados num contínuo, nesse livro são 160, que assemelham-se a *pílulas de conhecimento*, entremeados por exercícios resolvidos e ao final de cada capítulo exercícios propostos. Cabe destacar que não há referências às cônicas e suas equações.

2.3. A abordagem de Luiz Mauro Rocha e Ruy Madsen

A coleção Matemática – Curso Colegial Moderno de Luiz Mauro Rocha e Ruy Madsen Barbosa [16] foi uma das primeiras representativas da apropriação brasileira das propostas do **MMM** para o ensino secundário. Ambos autores atuavam tanto em universidades paulistas, quanto em escolas de ensino secundário.

O volume 3 destinado ao 3º ano do Colegial (1970) é dividido em três partes, sendo a segunda relativa à Geometria Analítica. A abordagem da Geometria Analítica acompanha as discussões da Matemática Moderna, estabelecendo uma correspondência entre o plano cartesiano e os vetores representados por matrizes colunas. Inicialmente são retomadas as noções de coordenadas, distâncias entre pontos e equação da reta em coordenadas cartesianas para o estabelecimento da nova abordagem.

Nesta perspectiva são apresentadas algumas transformações geométricas – translação, simetria, rotação e homotetia. Por fim, o estudo das cônicas conclui a Geometria Analítica contida na obra: circunferência, parábola, elipse e hipérbole.

Dentro de um mesmo capítulo os temas estudados são apresentados de maneira formal, com definição, propriedade, demonstração; e para cada um deles há ao menos um exercício resolvido que é chamado de ilustração. Ao final de cada capítulo consta uma lista de exercícios com as respectivas respostas.

3. Geometria Analítica em livros de texto portugueses

3.1. A abordagem de Serrasqueiro

José Adelino Serrasqueiro (1835-?) foi professor de Matemática no Liceu Central de Coimbra. A partir de 1869 Serrasqueiro escreve uma série coerente de livros destinados a todos os anos do ensino secundário sob a denominação geral de *Curso de Matemáticas Elementares*. Foi a primeira vez que um autor português publicou um conjunto de obras ambicionando abranger toda a matemática do ensino secundário.

Analisaremos a 8.ª edição do seu “*Tratado de Elementar de Trigonometria Retilínea*” [17] que termina com o capítulo “*Noções de geometria analítica relativas à reta e ao círculo*”. Apesar de publicado em 1927, este livro representará as primeiras abordagens à geometria analítica para o ensino secundário que surgiram na sequência do programa de 1886, [18].

Quanto à estrutura, o capítulo reproduz a estrutura do programa de 1886, [5]. Serrasqueiro esclarece logo no início que a geometria analítica é *a ciência que ensina a resolver por meio da álgebra as*

questões relativas às grandezas geométricas [17, p. 131]. Depois, após uma apresentação das coordenadas cartesianas, o autor discute demoradamente (quatro páginas) a interpretação geométrica dos sinais em especial dos negativos.

Após apresentar as “equações do ponto” ($x = a, y = b$), Serrasqueiro apresenta a proposição seguinte:

Uma equação entre duas variáveis $f(x,y) = 0$, em geral representa uma curva, cujos pontos têm por coordenadas os valores de x e y , que satisfazem a equação. [17, p. 135, itálicos no original]

O tema, que remete para uma geometria analítica *no sentido de Fermat* [19], figurou nos programas entre 1895 e 1926, com uma breve menção em 1930 que foi retirada logo em 1931. O autor acrescenta que construindo pares de pontos e unindo os pontos através de uma curva contínua se obtém a *curva da equação* (explicando que a recíproca seria a *equação da linha*). As linhas dividem-se ainda em algébricas e transcendentais. O livro consagra muito pouco espaço a este tema que é apenas abordado através de afirmações genéricas.

Após esta primeira secção, o autor discute as equações das retas paralelas aos eixos. Segue-se o caso de uma reta passando pela origem das coordenadas cuja forma é justificada recorrendo à semelhança de triângulos. O coeficiente a da equação $y = ax$ é associado à tangente trigonométrica do ângulo que a reta faz com o eixo dos x . A equação de uma reta que não passa pela origem é depois discutida, bem como a representação da equação geral do primeiro grau a duas incógnitas e é apresentado um exemplo.

A terceira secção trata de *Problemas relativos à linha reta*: 1) achar a equação de uma reta que passa por dois pontos dados; 2) calcular o ângulo de duas retas, incluindo a condição de perpendicularidade; 3) por um ponto *tirar* uma reta paralela ou perpendicular a uma reta dada; 4) por um ponto dado *tirar* uma reta que faça um ângulo dado com uma reta dada; 5) achar a intersecção de duas retas; 6) achar a distância entre dois pontos; 7) achar a distância de um ponto a uma reta.

A quarta secção do livro de Serrasqueiro foca-se na determinação da equação da circunferência. Inicia-se com o estabelecimento da equação de uma circunferência com centro na origem seguida do desenvolvimento da *equação do círculo referida à extremidade de um diâmetro* [17, p. 147]. A secção termina mostrando como *as principais propriedades do círculo* (p. 149) se deduzem da equação de uma circunferência centrada na origem com eixos perpendiculares: a perpendicular baixada do centro sobre uma corda divide a corda em dois segmentos de igual comprimento; a ordenada de qualquer ponto sobre a circunferência é a meia proporcional entre os dois segmentos do diâmetro determinados pela abscissa do ponto; a corda tirada pela extremidade de um diâmetro é a meia proporcional entre o diâmetro e a sua projecção sobre ele; e o ângulo inscrito no semicírculo é reto.

Estas quatro proposições são bem conhecidas da geometria euclidiana e Serrasqueiro demonstra-as recorrendo apenas a manipulações algébricas e não a propriedades de igualdade e semelhança de triângulos. Reconheça-se aqui o *estilo de Descartes* de que falava Boyer, [19].

A última secção do capítulo de geometria analítica do livro de Serrasqueiro trata da tangente à circunferência.

Em suma, as propostas didáticas de Serrasqueiro constituem-se como uma das primeiras abordagens ao tema da geometria analítica para o ensino secundário português. O seu capítulo de geometria analítica quase não contém exemplos e não encontramos nele nenhum exercício. Embora o autor não tenha optado por uma abordagem lógica formal, o seu texto está ancorado em definições e demonstrações detalhadas.

3.2. A abordagem de Albuquerque adaptada por Martins

Como segunda proposta estudámos a obra *Geometria analítica para o Curso Complementar de Ciências* de Joaquim de Azevedo Albuquerque adaptada por Augusto Martins, [20]. Joaquim Albuquerque (1839-1912) foi um professor do Liceu e da Academia Politécnica do Porto, autor de um conjunto de livros únicos aprovados após as reformas de 1895 e 1905. O autor principal deste livro faleceu em 1912 e Augusto Martins (1885-1932), professor de um dos liceus do Porto é um dos autores que leva a cabo a adaptação das suas obras de trigonometria e geometria analítica a novos programas a partir de 1920.

Tal como a proposta de Serrasqueiro, o texto inicia-se com uma discussão detalhada sobre o significado das coordenadas negativas no sistema de eixo cartesiano. Logo a seguir, no entanto, os autores optam por discutir as representações geométricas associadas a equações lineares, embora o tema não fizesse parte do programa. Demonstra-se genericamente como lugares geométricos produzem curvas, associando-os a equações e a funções:

Assim, cada lugar é caracterizado por uma certa dependência que tem ordenada para cada valor da sua abcissa. Este facto exprime-se, como se sabe, dizendo que y é uma *função* de x para cada lugar; dependência que se representa pela equação $y = f(x)$, *y igual a uma função f de x* . [20, p. 8, itálicos no original].

E mostra-se também como, reciprocamente, uma equação representa um lugar geométrico. Esta correspondência entre equações e lugares geométricos (*correlação íntima*, p. 10) é depois abordada no caso da equação $y = 4x^2$, seguindo-se uma longa discussão (11 páginas) da correspondência entre retas e equações lineares. O tópico termina com uma observação:

Os alunos devem exercitar-se no traçado de lugares geométricos de equações; para o que convém servirem-se de papel *quadriculado*, que muito facilita a representação linear dos valores numéricos das abcissas e ordenadas. [20, p. 17, itálicos no original].

Após esta secção, o manual prossegue discutido os problemas sobre a linha reta exigidos pelo programa. Esta secção termina com 18 exercícios.

Passa-se então para o estudo das cónicas e o livro termina com o estudo da representação gráfica das funções circulares.

3.3. A abordagem de Souto Rodrigues

Contrariamente aos outros autores, João José Souto Rodrigues (1841-1929) não leccionou no ensino secundário, tendo o seu percurso decorrido no ensino superior. Foi professor de diversas disciplinas do curso de Matemática da Universidade de Coimbra, entre elas a Geometria Analítica. Autor de diversos livros para o ensino superior, a partir de 1897 publicou também manuais para o ensino secundário. Analisaremos aqui a sua obra “*Noções elementares de geometria analítica plana*” [21] publicada em 1931.

Tal como os outros dois livros anteriores, o autor começa por uma discussão do sistema cartesiano discutindo os quatro quadrantes e os sinais das coordenadas dos pontos em cada um deles. Segue-se o estudo da representação da reta primeiro o caso de retas paralelas ao eixo dos x , depois o das retas que passam pela origem, onde o autor introduz o conceito de declive, e finalmente o caso geral que é estudado com o apoio de diversos exemplos.

O capítulo seguinte trata de problemas envolvendo retas requeridos pelo programa e cada um destes problemas é acompanhado por um exemplo. As cónicas são discutidas em dois capítulos. O primeiro centrado na circunferência definida como um lugar geométrico, e o segundo onde são tratadas as restantes cónicas.

3.4. A abordagem de Matemática Moderna

Logo em 1973, quando são aprovados novos programas que incluem a Matemática Moderna, é publicado o “*Compêndio de matemática 1º ano Curso Complementar*” da autoria de Garcia, Anjos e Osório [22] que se constitui como livro único de facto para o ano correspondente ao atual 10º ano de escolaridade. A geometria analítica continua a fazer parte do programa, mas a abordagem do tema recorre a uma linguagem baseada na lógica e em conjuntos. Por exemplo, o problema de *definir analiticamente o conjunto dos pontos que distam da origem menos de três unidades e cuja ordenada é maior ou igual à abcissa* [22, p. 131] é resolvido através da interseção de dois conjuntos, cada um deles definido por condições lógicas (que também são designadas de *relações binárias*). O problema geométrico converte-se na resolução de uma conjunção lógica. Depois o livro explora outras relações lógicas entre condições e as consequentes representações no plano.

Após um estudo *clássico* das diversas equações da reta, o estudo do paralelismo é feito de novo recorrendo à interseção de conjuntos. O tópico termina com um estudo das cónicas que é feito de uma forma *clássica*, recorrendo ocasionalmente à lógica, a conjuntos e a transformações geométricas.

4. Concluindo

O trabalho que ora apresentamos permite-nos conhecer algumas das diferentes formas como o tópico geometria analítica foi abordado nos dois sistemas estudados. No caso brasileiro observamos como, nos livros estudados e apesar das alterações legislativas, existe a permanência de temas fundamentais, frequentemente associados ao que poderíamos designar de propedêutica do estudo das funções. No caso português esta ligação é ocasionalmente estabelecida, mas predomina uma visão

da geometria analítica como um tópico que permite recorrer à álgebra para resolver problemas clássicos de geometria.

Esta visão permanece no currículo português mesmo no tempo da grande reforma da Matemática Moderna. O tópico é visto como uma possibilidade de aplicação da teoria de conjuntos e da lógica a problemas de geometria. No caso brasileiro, embora, por exemplo, mantendo o estudo das cónicas, o tópico aparece mais entrosado com o estudo de espaços vetoriais.

Referências

- [1] M.C. Otone e Silva, M.C. “*A Matemática do Curso Complementar da Reforma Francisco Campos*”. São Paulo: PUC-SP, 2006. Dissertação de mestrado.
- [2] H.M. Guimarães, “*Por uma Matemática nova nas escolas secundárias – perspectivas e orientações curriculares da Matemática Moderna*”. In: MATOS, J. M. & VALENTE, W. R. (orgs). “*A Matemática Moderna nas escolas do Brasil e de Portugal: primeiros estudos*”. São Paulo: Da Vinci, 2007.
- [3] M. C. Leme da Silva, “*Movimento da matemática moderna - possíveis leituras de uma cronologia*”. Pontifícia Universidade Católica do Paraná, Brasil. Revista Diálogo Educacional, vol. 6, núm. 18, mayo-agosto, 2006, pp. 49-63
- [4] GEEM, “*Matemática Moderna para o Ensino Secundário*”. 2ª Edição. São Paulo: L.P.M Editora. 1965
- [5] PORTUGAL. Programas do ensino secundário. *Diário do Governo*, 267, 23/11/1886, Lisboa, p. 3389-3394, 1886.
- [6] PORTUGAL. Programas do ensino secundário. *Diário do Governo*, 198, 31/11/1888, Lisboa, p. 2435-2440, 1888.
- [7] PORTUGAL. Programas do ensino secundário. *Diário do Governo*, 208, 16/9/1885, Lisboa, p. 2509-2528, 1895.
- [8] J.M. Matos, “*Mathematics education in Spain and Portugal*”. Portugal. In: KARP, A. e SCHUBRING, G. (Ed.). “*Handbook on the History of Mathematics Education*”. London: Springer, 2014. p. 291-302.
- [9] PORTUGAL. Decreto n.º 3, Programas dos liceus. *Diário do Governo*, 250, 4/11/1905, Lisboa, p. 3866-3873, 1905.
- [10] PORTUGAL. Decreto n.º 5.002, Programas do Ensino Secundário. *Diário do Governo*, 257, 28/11/1918, Lisboa, p. 2015-2034, 1918.
- [11] PORTUGAL. Decreto n.º 6.132, Programas e quadros de distribuição das disciplinas do Ensino Secundário. *Diário do Governo*, 261, 23/12/1919, Lisboa, p. 2562-2576, 1919.

- [12] PORTUGAL. Decreto n.º 18.885, Programas do Ensino Secundário. *Diário do Governo*, 225, 27/9/1930, Lisboa, p. 1995-2037, 1930.
- [13] PORTUGAL. Decreto n.º 20.369, Programas para todas as classes do Ensino Secundário. *Diário do Governo*, 232, 8/10/1931, Lisboa, p. 2166-2207, 1931.
- [14] T.M., Carvalho, “*Matemática, terceira série. De acordo com os programas dos cursos Cursos Clássico e Científico*”. 3ª Ed. SP: Companhia Editora Nacional. 1950.
- [15] E. Roxo, et al. “*Matemática 2º ciclo*”. 2ª Ed. Rio de Janeiro: Editora Paulo, Azevedo LTDA. 1956.
- [16] L.M. Rocha, R.N. Barbosa, “*Matemática Curso Colegial Moderno*”. São Paulo: **IBEP**, 1970.
- [17] J.A., Serrasqueiro, “*Tratado Elementar de Trigonometria Rectilínea e Noções de Geometria Analytica*”. 8.ª edição. Coimbra: Livraria Central de J. Diogo Pires, 1927.
- [18] J.M. Matos, “*A introdução da geometria analítica no ensino secundário português — a contribuição de José Adelino Serrasqueiro*”. **RIDEMA** - Revista de Investigação e Divulgação em Educação Matemática (em impressão).
- [19] C. Boyer, “*History of Analytic Geometry*”. Mineola: Dover Publications, 1956/2012.
- [20] J.D.A. Albuquerque, A. Martins, “*Geometria analítica para o Curso Complementar de Ciências*”. Porto: Imprensa Nacional de Jaime Vasconcelos, 1924.
- [21] J.J.D.S. Rodrigues, “*Noções elementares de geometria analítica plana para uso da 7.ª classe dos liceus*”. Braga: Liv. Cruz, 1931.
- [22] M.M. García, A.O.D. Anjos, A.F. Ruivo, “*Compêndio de matemática 1º ano Curso Complementar 1º volume*”. Porto: Empresa Literária Fluminense, 1973.

Outras fontes

PORTUGAL. Decreto n.º 24.526, Programas do Ensino Secundário. *Diário do Governo*, 235, 6/10/1934, Lisboa, p. 1793-1837, 1934.

PORTUGAL. Decreto n.º 25.414, Programas do Ensino Secundário. *Diário do Governo*, 121, 28/5/1935, Lisboa, p. 750-781, 1935.

S. Ribeiro, “*Um estudo sobre as “quantidades negativas” em José Joaquim Rivara*”. Dissertação de mestrado. Braga: Universidade do Minho, 2009.

J.L. Valentim Jr, “*A geometria analítica como conteúdo do ensino secundário: análise dos livros didáticos utilizados entre a Reforma Capanema e o MMM*”. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Universidade Federal de Juiz de Fora, 2013.

