¿UN POSIBLE ERROR EN LA “GÉOMÉTRIE”?: DESCARTES Y LA SOLUCIÓN DEL PROBLEMA DE PAPPUS

Jorge Enrique Mendoza Guzmán
Universidad del Valle, Colombia
jorge.mendoza@correounivalle.edu.co

FECHA DE RECEPCIÓN: 31/05/17 FECHA DE ACEPTACIÓN: 16/03/18

RESUMEN

En este artículo se presenta un análisis histórico- epistemológico que muestra la manera como Descartes introduce las ecuaciones algebraicas y resuelve el problema de Pappus.De esta forma inaugura la geometría analítica, asociando ecuaciones a las curvas. Uno de los resultados principales de este trabajo es el hallazgo de un posible error al establecer una proporción en la solución del problema de Pappus.

ABSTRACT

This paper presents a historical- epistemological analysis. It refers to the manner which Descartes inserts the algebraic equations and solve the Pappus´ problem. In this sense, Descartes inaugurates the analytic geometry. Itassociates anequation to curves. One of the main results of this paper is the discovery of a mistake in the solution of the Pappus´ problem. I found that it was in the proportion approach.

PALABRAS CLAVE:

curvas – ecuaciones - lugar geométrico

KEYWORDS:

curves – equations - locus

INTRODUCCIÓN

Históricamente la incorporación de las curvas geométricas a la Matemática ha sido un proceso complejo en relación a la manipulación de las mismas. Cabe señalar que dichas curvas son aquellas que son generadas por cortes transversales de un cono, mediante regla y compás o intersecciones de cónicas, destacándose así la parábola, el círculo, la recta entre otras. De hecho, desde la antigüedad griega se manipulaban dichas curvas en formasintética, es decir como cortes transversales de un cono. Justamente los antiguos tenían una clasificación para este tipo de curvas:

La primera, conocida con el nombre de lugares planos, contenía a todas las líneas rectas y circunferencias; la segunda, conocida como la de los lugares sólidos, estaba constituida por todas las secciones cónicas; y la tercera categoría, conocida como la de los lugares lineales, agrupaba a todas las curvas restantes. El nombre dado a la segunda clase venia sugerido sin duda por el hecho de que las cónicas no se definían como lugares geométricos de puntos del plano que satisfacen una condición determinada, sino que se describían de una manera estereométrica como secciones de una figura tridimensional por un plano (Boyer, 2010, p. 133).

Esta clasificación presupone para los antiguos la existencia de familias de curvas; las cuales en la *Geometría* de René Descartes (1596-1650) son clasificadas como curvas geométricas y mecánicas, siendo las últimas aquellas que son generadas por dos o más movimientos independientes, tales como la trisectriz, la cicloide entre otras.

La *Geometría* se constituye en un aparato teórico novedoso, debido a que introduce operaciones para los segmentos, como multiplicación, división y radicación de segmentos. Así mismo, establece una metodología y simbología particular para resolver problemas. De hecho, Descartes propone los siguientes pasos para resolver un problema:

- 1) Suponer que el problema está resuelto
- 2) Interpretar el problema algebraicamente; esto es, trasladarlo al lenguaje de las ecuaciones y resolverlo con los métodos propios del álgebra
- 3) Verificar que la solución satisface los requerimientos del problema

Estos pasos propuestos por Descartes, inauguraron un método para resolver algunos problemas geométricos. Uno de los elementos claves en la obra de Descartes es el tránsito que va de las curvas a las ecuaciones, y la forma de establecer una relación biunívoca entre el objeto curva y su ecuación asociada. En este sentido, este artículo pretende mostrar la manera en que Descartes acoge las curvas geométricas, en particular la solución del problema de Pappus y encuentra la expresión que soluciona dicho problema. Cabe señalar que en la revisión bibliográfica de la *Geometría* cartesiana, específicamente en la edición de 1637 (Descartes, 1637), se ha detectado un posible error al establecer una proporción en la solución del problema de Pappus.

El problema de Pappus

Pappus de Alejandría (290 a.C-350a.C) realiza una gran compilación, organización, clasificación y generalización del conocimiento proveniente de las obras de sus antecesores, en su obra la colección matemática. En este sentido se comparte la idea de (Sefrin-Weis, 2010) quién establece que:

> La colección IV de Pappus puede leerse y fue entendida, como un unificado, coherente y esencialmente un exhaustivo reconocimiento de la tradición geométrica clásica desde el punto de vista de los métodos.(Sefrin-Weis, 2010, p. XIV)

Al igual que Menecmo, Arquímedes, Euclides y Apolonio, Pappus hace distinción entre la clasificación de los problemas, planos, sólidos y lineales. Los primeros se limitan a las construcciones mediante círculos y líneas rectas. Los problemas sólidos pueden ser solucionados mediante el uso de las secciones cónicas y los lineales involucran los dos anteriores, es decir pueden resolverse utilizando círculos, líneas y secciones cónicas.

Al igual que sus predecesores, Pappus se interesa por los tres problemas de la antigüedad griega considerando la duplicación del cubo y la trisección del ángulo como problemas que pertenecen a los sólidos y considera la cuadratura del círculo como un problema lineal.

Pappus brinda un tratamiento a las curvas y utiliza las secciones cónicas para resolver problemas tales como la manera de generar alguna de las secciones cónicas (curvas) dadas tres o cuatro líneas (rectas). Aunque Apolonio y Euclides se plantean estos tipos de problemas preguntándose por el lugar generado dadas cierta cantidad de líneas y ángulos conocidos. Sin embargo, el problema en general queda sin resolver hasta Descartes quién reconoce la manera de encontrar una curva o lugar geométrico, donde el elemento principal es la introducción de las ecuaciones algebraicas y una notación especial para los segmentos.

De tal forma, como lo establece (Arboleda, 2012, p. 3), el problema de Pappus pertenece a la clase que hoy conocemos como problemas *de lugar geométrico* en cuanto a su solución comporta la construcción de una curva algebraica. Pero cabe preguntarse si ¿Pappus era consciente de que su planteamiento en realidad correspondía a la generación de curvas? La respuesta a este interrogante es sí, y se presenta en el hecho de que Pappus soluciona el problema para dos y tres líneas.

En la solución del problema de Pappus se evidencia un uso implícito de un sistema coordenado, aunque no necesariamente este sistema se encuentra constituido por dos rectas perpendiculares como se usa modernamente, sin embargo en el tratamiento dado por Descartes se vislumbra la dependencia entre los términos conocidos y desconocidos. Para precisar un poco veamos cómo se constituye el problema y cómo su solución se convierte en un fuerte indicador de la manera de producir curvas y asociarles una ecuación algebraica.

Por ejemplo, Pappus se pregunta por el lugar generado dadas dos líneas rectas, dos ángulos y una razón dada. Justamente el caso de dos líneas rectas dadas corresponde a un lugar plano. La siguiente construcción detalla un poco esto. De acuerdo con (Arboleda, 2012) consideremos dos rectas, ***L*** y ***M*** , dos ángulos α y β y una razón θ conocidos. Luego se asignan p_1 , p_2 como las distancias desde la recta ***L*** al punto ***P*** y la distancia de la recta ***M*** al punto ***P*** respectivamente. El problema consiste en encontrar los puntos ***P*** de tal forma que la proporción $\frac{p_1}{p_2} = \theta$ se mantenga constante.

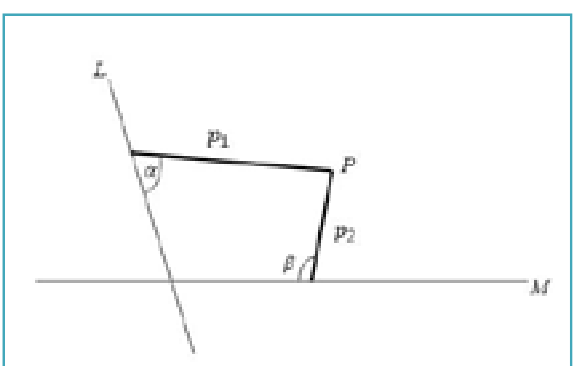

Figura 1:
Problema de Pappus para dos líneas rectas dadas

Ante todo Pappus no resuelve el problema para una mayor cantidad de líneas rectas, el que se encarga de desentrañar este problema geométrico y dar cuenta del lugar geométrico generado es Descartes, en su segundo libro de la geometría *Sobre la naturaleza de las líneas curvas*.

De esta forma Descartes visualiza la posibilidad de aplicar su nuevo método a los problemas que estuvieran asociados a una situación geométrica en particular. Es así como problema de Pappus adquiere una gran estatus en la manera de ver los problemas de orden lineal.

En la *Geometría*, Descartes referencia a Pappus en el sentido de que se evidencia la lectura previa de Descartes a la obra de Pappus llamada la *colección*, exactamente en el libro VII de Pappus se expone el problema para n líneas sin una solución evidente.

Pappus establece:

> Si son dadas tres líneas rectas en posición, y si son trazadas otras tres líneas rectas desde un mismo punto formándose ángulos conocidos con las tres líneas dadas, y si, a su vez, es conocida la proporción del rectángulo formado por dos de las líneas trazadas con el cuadrado de la otra, entonces el punto se encuentra en un lugar sólido, dado en posición, es decir, sobre una de las tres secciones cónicas. Y si, de nuevo, se trazan líneas sobre cuatro rectas dadas en una determinada posición, en ángulos dados, y se da la proporción del rectángulo formado por dos de las trazadas con el formado por las otras dos, entonces y de modo semejante el punto se encuentra en una sección cónica Por otra parte, se ha demostrado que únicamente a dos líneas, el lugar del punto no es de los que son conocidos; es de los llamados simplemente líneas, sin conocerse nada más sobre su naturaleza o propiedades. Una de ellas, no la primera, pero sí la más clara, ha sido examinada, siendo de utilidad. Las proposiciones relacionadas con las mismas son éstas (Descartes, 1637, p. 399).

De acuerdo con Descartes, Pappus es consciente de que el lugar generado corresponde a una sección cónica, más aún, que existe una manera de producir cónicas donde la situación geométrica es un elemento que particulariza el problema. Por esta razón aparece una concepción que relaciona los sólidos y un conjunto de premisas que anteceden la curva generada. En otras palabras, se está reivindicando una unión entre los entes lineales (líneas, rectas) y los entes sólidos, que constituyen el trasfondo conceptual de base para producir y conocer las propiedades de una curva. Sin embargo Pappus presupone un problema para el caso de que el número de líneas sea mayor que cuatro, ¿Qué lugar es generado para cinco líneas o más? Indudablemente Pappus no logra caracterizar la naturaleza, ni las curvas para este tipo de consideraciones, pero sí establece la directriz del problema:

> Para cinco líneas rectas, dadas en posición, sobre otras rectas bajo ángulos dados, y se da la proporción entre el paralelepípedo rectángulo comprendido bajo tres de las trazadas y el paralelepípedo rectángulo comprendido bajo las otras dos y otra línea dada, el punto se encontrará sobre una cierta línea,… (Descartes, 1637, p. 400)

Esta manera de plantear el problema presupone que el problema propuesto, podría ser solucionado, sin embargo, Pappus presenta señales referentes a una posible solución, mas no lo resuelve debido a la carencia de aparato teórico al identificar que la solución caería sobre una línea.

Aunque Pappus plantea el problema, es Descartes quien da respuesta al mismo, realizando una caracterización y generalización del problema para una mayor cantidad de líneas rectas dadas, tal como se introduce en (Álvarez, 2000, p. 43).

> Descartes en ningún momento señala explícitamente la naturaleza de la línea o lugar geométrico de los puntos que dan solución al problema para líneas… Destaca de inmediato la clasificación de curvas en grados.

Casos	**Cantidad de líneas rectas**	**Se hallan los puntos con:**
1	3,4,5	Regla y compás
2	6,7,8,9	Geometría de sólidos (secciones cónicas)
3	10,11,12,13	Línea curva de un grado mayor que las secciones cónicas
4	14, 15, 16, 17…	Línea curva de un grado mayor que la precedente

Tabla 1:
Caracterización y generalización para el Problema de Pappus

En este sentido el problema de Pappus comienza a sufrir un proceso de organización provista por Descartes y no cabe duda que este problema representa en Descartes un punto clave al escribir la geometría, en el sentido de que permite la aplicabilidad de un aparato teórico constituido fundamentalmente por elementos de la teoría de proporciones de Euclides, los aportes y las propiedades de las curvas descubiertas por Apolonio y el simbolismo algebraico procedente de la notación utilizada por Vieta.

El problema de Pappus consiste en encontrar el lugar generado dado cuatro rectas y cuatro ángulos. Como primer paso Descartes da cuatro líneas ***AB, AD, DF, GH,*** como se muestra en la figura.

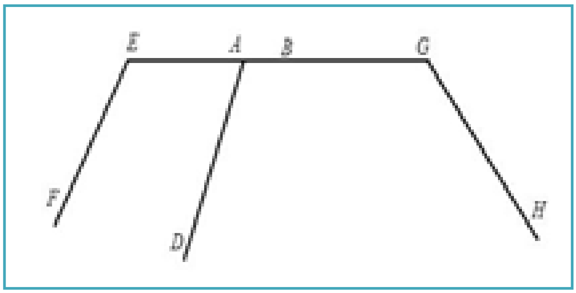

Figura 2
Rectas dadas para el problema de Pappus

Luego de ello supone un punto ***C*** como la solución del problema, de tal forma que al realizar ciertas prolongaciones sea posible encontrar una ecuación que me permita hallar las líneas rectas que pasan por el punto ***C*** en términos de cantidades conocidas y desconocidas, de esta manera se interrelacionan segmentos.

Como punto de partida Descartes supone que el problema está resuelto; siendo el punto ***C*** la solución, luego asigna las cuatro rectas dadas en posición mas no se da su longitud de las mismas, siendo estas ***AB, AD, EF, GH*** los ángulos se dan en términos de trazar las líneas desde el punto ***C***; ***CB, CD, CF*** y ***CH***. y sus respectivos ángulos dados $\angle CBA, \angle CDA, \angle CFE, \angle CHG$. A continuación realiza asignaciones para las líneas dadas, siendo $AB=x, BC=y$ la asignación dada para estas dos líneas radica en el hecho de que se utilizan como sistema referencial que más tarde servirá como parte de la solución del problema que se traduce en una "ecuación" en términos de dos variables. En este momento Descartes utiliza el sistema referencial que modernamente se puede traducir como las coordenadas (x,y) .

Aunque el sistema dado por Descartes es oblicuo, no se separa mucho de la idea moderna debido a que para cada segmento y ó x que suponga conocido, puedo encontrar uno en términos del otro. Es decir posee la idea de tabular (Fig. 3). Descartes logra establecer la siguiente cadena de igualdades.

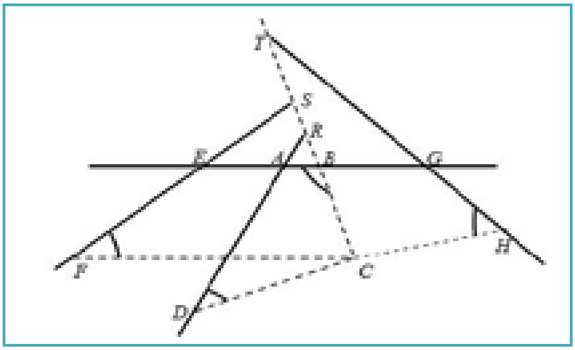

Figura 3
Ángulos dados para el problema de Pappus

$$\frac{AB}{BR}=\frac{z}{b};\frac{CR}{CD}=\frac{z}{c};\frac{BE}{BS}=\frac{z}{d};\frac{CS}{CF}=\frac{z}{e};\frac{BG}{BT}=\frac{z}{f};\frac{TC}{CH}=\frac{z}{g}$$

Para mostrar que los "ángulos del triángulo ***ARB*** son dados" observemos que el ángulo $\angle BAR$ es dado, porque subyace de dos rectas dadas que son ***DA*** y ***AB***. También el ángulo $\angle ABR$ porque es el suplemento de $\angle CBA$, y $\angle BRA$ es el suplemento de $\angle BAR$ y $\angle ABR$. A continuación la proporción ***AB*** y ***BR*** es conocida surge del hecho que como los ángulos ***ARB*** y ***BAR*** son conocidos entonces ***sinARB:sinBAR=AB:BR***. El procedimiento anterior se puede aplicar para los otros triángulos presentes en la (Fig.3) donde la magnitud ***z*** representa una magnitud- parámetro que sirve para medir y establecer las proporciones dadas.

Al establecer la siguiente proporción pareciera ser que se obtuviera un error.

Al parecer cuando se aplica la ley de los senos para los demás triángulos que se muestran en la (figura 3)se encuentra el siguiente error. En la *Geometría* (Descartes, 1637, p. 28), precisamente en la parte donde se establece la siguiente proporción $\frac{CR}{CD}=\frac{z}{c}$ ***(1)***. El error radica en que al realizar el proceso minuciosamente determinado las proporciones dadas, nos lleva al resultado de que $\frac{CR}{CD}=\frac{c}{z}$ ***(2)***. lo cual contradice lo supuesto por Descartes. Y si se tomara la proporción (2) los resultados esperados para segmentos como ***CD*** tendrían otra forma algebraica. Para subsanar este problema considero que Descartes debió haber considerado la proporción ***CD***: ***CR***, sin embargo como z representa un parámetro que se supone constante para el resto de proporciones establecidas con cierto artificio se puede subsanar dicho error.

$$\frac{CR}{CD}=\frac{\sin DRC}{\sin CDR}=\frac{\sin ARB}{\sin CDR}=\frac{z}{c}$$

Después de encontrar la manera de relacionar segmentos y ángulos conocidos con desconocidos, de establecer proporciones y de valerse de las propiedades de la semejanza de triángulos, Descartes aplica el procedimiento mencionado en su libro I.

> En primer lugar supongo la cosa ya hecha, y para aclarar la confusión entre todas estas rectas, considero una de las dadas y una de las que se deben encontrar, por ejemplo ***AB*** y ***CB***, como las principales y a las cuales trato de referir todas las demás. Sea ***x*** el segmento de recta ***AB***, entre los puntos ***A*** y ***B***; y sea y el segmento ***BC***… (Descartes, 1637, p. 28)

De esta forma, Descartes sintetiza la representación de los segmentos a una escritura un poco más simple, así la respectiva asignación para los segmentos inicialmente dados adquiere la forma ***EA=k*** , ***AG=l*** , ***AB=x*** , ***BC=y*** , con lo que la figura dada para el problema de cuatro líneas se transforma en

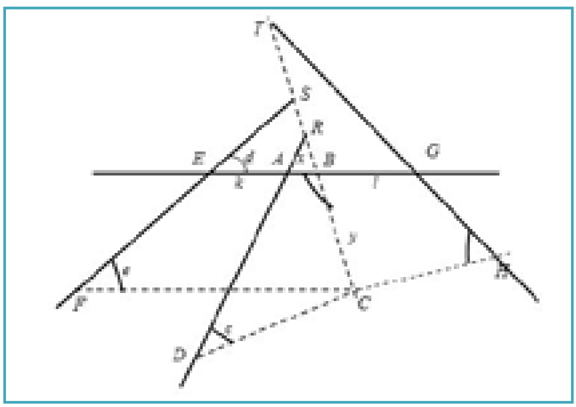

Figura 4
Asignaciones de las rectas y ángulos en posición

Se tienen en cuenta la cadena de igualdades dada al inicio y con base a la asignación y conocimiento de los segmentos y ángulos conocidos y desconocidos, se obtienen las siguientes igualdades:

$$RB = \frac{bx}{z} \text{ (Puesto que se establece la razón } \frac{AB}{RB} = \frac{z}{b} = \frac{x}{RB}\text{)}$$

Puesto que ***BC =y*** la línea ***CR*** se expresa como:

$$CR = BC + RB = y + \frac{bx}{z}$$

$$CD = CR\ x\ \frac{CR}{CD} = \left(y + \frac{bx}{z}\right)\frac{c}{z} = \frac{yc}{z} = \frac{bcx}{z^2} \qquad \text{(Utiliza la proporción } \frac{EB}{CD} = \frac{z}{c} \text{ donde } BS = \frac{c}{z}\ x\ EB\text{)}$$

La línea EB se puede expresar como: Siendo ***EA = k, AB = x***

$$EB = EA + AB = k + x$$

$$BS = EB \; x \; \frac{d}{z} = \frac{(k+x)}{z} d = \frac{dk + dx}{z}$$ (Utiliza la proporción $\frac{EB}{BS} = \frac{z}{d}$ donde $BS = \frac{c}{z} \; x \; EB$)

La línea ***CS*** se expresa en términos de los segmentos anteriormente hallados:

$$CS = CB + BS = y + \frac{dk + dx}{z} = \frac{zy + dk + dx}{z}$$

$$CF = CS \; x \; \frac{e}{z} = \left(\frac{zy + dk + dx}{z}\right) \frac{e}{z} = \frac{ezy + dek + dex}{z^2}$$ (Utiliza la proporción $\frac{CS}{CF} = \frac{z}{d}$ donde $CF = \frac{d}{z} \; x \; CS$)

$$G = AG - AB = l - x$$

$$BT = BG \; x \; \frac{f}{z} = (l - x) \frac{f}{z} = \frac{fl - fx}{z}$$

$$CT = BC + BT = y + \frac{fl - fx}{z} = \frac{zy + fl - fx}{z}$$

$$CH = CT \; x \; \frac{g}{z} = \frac{gzy + fgl - fgx}{z}$$

A partir de la introducción de una nueva representación y expresión de ecuaciones algebraicas en función de segmentos, comienza a verse un cambio cualitativo en la manera de ver las curvas, no solamente como una situación geométrica particular, sino como una expresión analítica, que permite conocer propiedades de la curva tomando como referencia un sistema de coordenadas determinado. Es en este momento que el objeto "curva" comienza a trascender hacia los elementos algebraicos denominados "ecuaciones".

Precisamente las líneas de causalidad teórica presentes en Descartes que permitieron abordar el problema de Pappus y dar solución al mismo, se engendran en la manera de solucionarlo y con más fuerza en la manera de tomar curvas (secciones cónicas) y amarrarles una ecuación algebraica que denotara su representación, más aún, cuando no solamente la manera de hallar ecuaciones se limita a resolver el problema de Pappus sino a la creación de un "instrumento" generalizado que da cuenta de muchas otras curvas diferentes a las secciones cónicas , es decir que posean un grado mayor que una ecuación de segundo grado.

Indudablemente con las diferentes relaciones que se presentan en la cadena de igualdades presentadas por Descartes y los nuevos segmentos que aparecen en términos de ***x*** e ***y***, se muestra una dependencia entre las magnitudes inicialmente dadas, sin embargo, con la eminente solución del problema de Pappus y el evidente proceso de algebrización de las magnitudes cabe preguntarse, si ¿Descartes es consciente de que la solución del problema implica la generación de las secciones cónicas?

La solución del problema se hace tangible en el sentido de que Descartes encuentra las longitudes ***CH, CT, CF, CS*** como las líneas que pasan por ***C***.

Estas líneas cumplen la condición de Pappus, que se puede establecer la siguiente proporción:

$$\frac{CB}{CD} = \frac{CH}{CF}$$

Con la propiedad de cerradura definida anteriormente para la multiplicación y división de segmentos tenemos la condición del problema de Pappus

$$CB \text{ x } CF = CH \text{ x } CD$$

Sustituyendo los valores encontrados para cada segmento con la notación dada por Descartes obtenemos la siguiente expresión,

$$y \text{ x } \frac{ezy + dek + dex}{z^2} = \frac{gzy + fgl + fgx}{z^2} \text{ x } \left(\frac{yc}{z} + \frac{bcx}{z^2}\right)$$

Organizando términos y agrupando los semejantes se obtiene la siguiente expresión:

$$(-cgz^2 + ez^3)\, y^2 + (bcfg)\, x^2 + (bcgz - cfgz - dez^2 - dez^2)\, xy$$
$$+ (-cfglz + dekz^2)\, y + (-bcfgl)\, x = 0$$

> Descartes sabe que todos los puntos de una cónica se pueden construir por regla y compás. Cuando la curva geométrica es una cúbica o tiene grado cuatro se construyen punto a punto por la intersección de dos cónicas. Las de quinto o sexto grado son construibles mediante la intersección de su “parábola de segundo grado” con el círculo, y así sucesivamente. Esto le permite a Descartes generar una jerarquía de curvas reagrupando los grados por pares o géneros : las curvas geométricas de grado $2 \; - 1 \quad 2$ se construyen por la intersección de un círculo y una curva de grado . (Arboleda, 2012, p. 4).

Si tomamos

$A = -cgz^2 + ez^3,$
$B = bcfg,$
$C = bcgz - cfgz - dez^2 - dez^2,$
$D = -cfglz + dekz^2,$
$E = bcfgl$

La ecuación anterior adquiere la forma $Ay^2 + Bx^2 + Cxy + Dy + Ex + F = 0$ a partir de esta ecuación se presentan tres consideraciones para los posibles valores que toma las cantidades constantes:

- Es una parábola si ***A*** ó ***C*** es cero.
- Es una elipse si ***A*** y ***C*** tienen el mismo signo (si ***A***= ***C*** corresponde a un círculo).
- Es una hipérbola ***A*** y ***C*** tienen signos opuestos.

Sin duda los valores desconocidos corresponderían a ***x*** e ***y***. Una de las pretensiones de Descartes es conocer la forma de la cónica generada por la ecuación anterior, para ello realiza ciertas consideraciones sistemáticas a la hora de identificar la cónica. Entre estas consideraciones se encuentra la de mantener fijo un valor de ***y***, a partir de este conocer los de ***x*** modernamente esto correspondería al proceso de tabular.

Para ver mejor este proceso tomemos un caso particular suponiendo que
$EA = 3;\ AG = 5;\ AB = BR;\ BS = \frac{BE}{2};\ GB = BT;\ CD = CR,\ CF = 2CS;\ CH = \frac{2CS}{3};\ \cancel{C}H = \frac{2CT}{3};\ <ABR = 60^\circ$

operando bajo las condiciones dadas obtenemos la siguiente ecuación $y^2=2y-xy+5x-x^2$ que corresponde a un círculo.

Tabulemos algunos valores para la ecuación anterior e identifiquemos que la ecuación anterior efectivamente corresponde a un círculo, suponiendo que la cantidad conocida es ***y***, y la que se desea hallar (la desconocida) es ***x***.

y	x
0	$x_1=0.$ $x_2=5$
1	
-1	
2	

Para el primer valor ***y=0,*** se obtiene $0=5x-x^2$, con lo que la nueva expresión corresponde a una ecuación de segundo grado, la solución de esta ecuación y en general las ecuaciones de la forma $x^2=\pm ax \pm b^2$ Descartes las resuelve mediante un proceso que describe en la (Descartes R. , 1637, pág. 394), de esta forma es posible reducir la ecuación $y^2 = 2y - xy + 5x - x^2$ para valores de ***y*** dados, a una ecuación de segundo grado. Finalmente al realizar el mismo procedimiento para el resto de valores de y, se obtiene la siguiente tabla.

Y	***X***
0	$x_1=0 \quad x_2=5$
1	$x_3=2\sqrt{5}x_4=2+\sqrt{5}$
-1	$x_5=3\sqrt{6}x_6=3-\sqrt{6}$
2	$x_7=0 \quad x_8=3$

Tabla 3.
Tabulación de algunos valores.

Al graficar los puntos en el sistema referencial ***X- Y*** oblicuo se obtiene la siguiente figura.

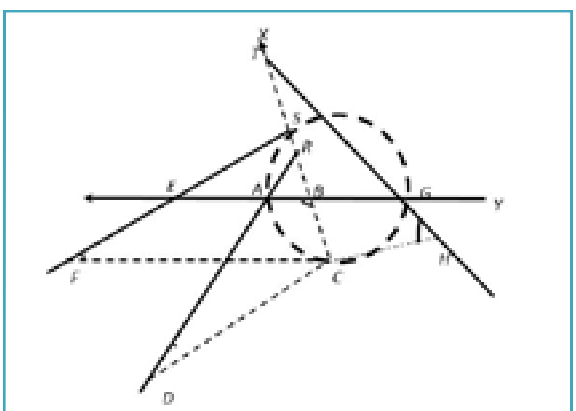

Figura 5
El círculo.

Las parejas obtenidas de la forma (***x,y***) generan punto a punto el círculo, donde el origen (***0,0***) corresponde al punto ***A***, el punto (0,5) coincide aproximadamente en el punto ***S***, hasta generar el círculo.

Hasta este momento lo novedoso del procedimiento implementado por Descartes es la introducción de una notación para los segmentos y la manera de generar ecuaciones para la situación geométrica de las cuatro líneas, pero la potencia de su técnica se fundamenta en la manera como Descartes interrelaciona segmentos conocidos, con desconocidos.

Claro está que Descartes ha encontrado que las cuatro líneas ***CH, CD, CF*** y ***CD*** se pueden reescribir de la siguiente manera:

$$y^2 = \frac{(cfglz - dekz^2)\,y - (dez^2 + cfgz - bcgz)\,xy + (bcfgl)x - (bcfg)\,x^2}{(-\,cgz^2 + ez^3)}$$

$$y^2 = ay - bxy + cx - dx^2$$

Lo interesante del problema de Pappus es preguntarse por el lugar geométrico generado cuando las cuatro rectas ó más de estas son paralelas ó son dos perpendiculares a las otras dos ó tres paralelas y una perpendicular a estas, etc.

OTRAS MANERAS DE GENERAR CURVAS: "EL COMPÁS GENERALIZADO"

Uno de los supuestos más importantes dados por Descartes es la clasificación de las curvas por géneros y la introducción de la herramienta "compás generalizado", que sin duda permite conocer la ecuación algebraica asociada a una gran cantidad de curvas.

Descartes acoge con su método a cierto tipo de curvas, llamadas geométricas y excluye las denominadas curvas mecánicas puesto que, como él menciona, son concebidas como el resultado de dos movimientos independientes cuya relación no admite una determinación exacta (Descartes, 1637, p.44). En esta exclusión de curvas se encuentra la cuadratriz, la espiral de Arquímedes, las curvas logarítmicas y catenarias, que años más tarde se llamarán *curvas transcendentes*.

Las curvas geométricas consideradas por Descartes representan la esencia de la geometría, en ellas reposa la base de su método. Entre estas se destacan la concoide y la cisoide.

Cabe preguntarse ¿cómo Descartes encuentra la ecuación de la hipérbola, elipse y parábola? Para ello define las curvas de primera clase entre ellas el círculo, la parábola, la hipérbola y la elipse, a partir de esta definición extiende la de segunda clase, que corresponderán a las curvas que posean tercera o cuarta dimensión como la concoide, y el tercer tipo las de cuarto y quinto grado. Algo que enmarca esta idea es que Descartes encuentra la ecuación de la hipérbola aplicando su método para una situación geométrica en particular, para ello considera un instrumento donde supone una línea desconocida y que quiere saber a qué clase pertenece. Descartes supone un instrumento como se muestra en la (Figura 6), a partir de esto identifica los segmentos desconocidos y conocidos y trata de relacionarlos entre sí.

Supongamos que la línea ***EC*** es la buscada; pero en este momento nos hemos encontrado con una conexión que es la forma de construirla la línea ***EC***; se realiza en términos mecánicos, en el sentido de la cuadratriz de Hipias, la razón de esto se sustenta ya que la línea ***EC*** es el resultado de la intersección de la recta ***GL*** y del plano rectilíneo ***CNKL.***

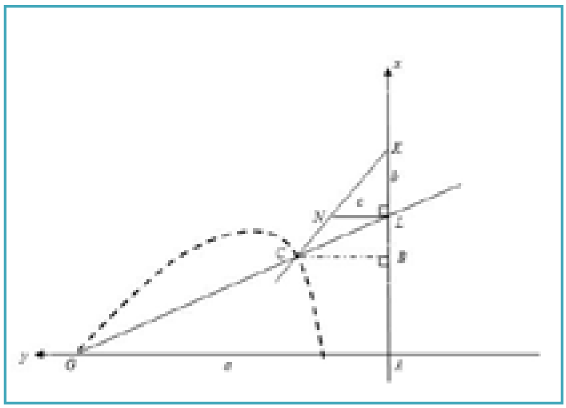

Figura 6:
Compás generalizado para hallar la ecuación de la hipérbola.

Descartes conoce que una curva, como la elipse, cumple determinada condición geométrica proporcionada por Apolonio (es el lugar geométrico de todos los puntos del plano tales que la suma de las distancias que separan a un punto del conjunto de dos puntos dados, llamados focos, es una constante dada, mayor que la distancia entre los focos) (Roshdi 2008 p-6) para el caso de la elipse considera unos supuestos similares a los usados para dar respuesta al problema de Pappus, entre éstos considera las razones y proporciones dadas según la geometría del problema y la asignación de segmentos mediante una cantidad literal.

La manera como Descartes encuentra la ecuación de una hipérbole se colige el uso de un sistema de coordenadas, donde precisamente relaciona las cantidades desconocidas y conocidas x, y, vistas como segmentos que varían y generan la curva deseada.

Para encontrar a qué género pertenece la curva buscada, asigna los segmentos conocidos y desconocidos mediante una expresión literal tales como a, b, c, x, y. Esto se realiza con el objetivo de encontrar una expresión que me relacione los segmentos y sus respectivas magnitudes. En nuestro caso tenemos:

$$GA = a,\ KL = b,\ y\ NL = c,\ BA = x,\ CB = y,$$

Respectivamente, luego por la geometría de la construcción, los triángulos ***KLN*** y ***KDC*** son semejantes, tenemos que:

$$\frac{c}{b} = \frac{y}{BK}$$

Luego $\boldsymbol{BK = \frac{h}{c}y.}$

El segmento $\boldsymbol{BL = BK - KL = \frac{b}{c}\, y - b.}$

Luego el segmento $\boldsymbol{AL = x + BL = x + \frac{b}{c}y - b.}$

Por otra parte los triángulos ***LBC*** y ***LAG*** son semejantes, permitiendo establecer la siguiente proporción:

$$\boldsymbol{\frac{BC}{BL} = \frac{AG}{AL}}$$

que bajo la operación de la multiplicación de segmentos definida se traduce en

$$\boldsymbol{BC \ x\ AL = BL \ x\ AG,}$$

De esta manera sustituyendo las expresiones encontradas se obtiene que

$$\boldsymbol{y\left(x+\frac{b}{c}y - b\right) = \left(\frac{b}{c}y - b\right)a,}$$

Trasponiendo y agrupando términos,

$$\boldsymbol{y^2 = cy - \frac{c}{b}xy + ya - ac.}$$

Descartes conoce la ecuación de la elipse, mas no describe la manera de encontrarla, mediante su método.

Las curvas mecánicas para Descartes, como la espiral, la cuadratriz, las curvas logarítmicas y catenarias, las toma fuera de la geometría ya que representaron un problema puesto que él no tenía una herramienta que permitiera asociarles una ecuación algebraica. Sin embargo en el siglo XVII-XVIII este problema comienza a esclarecerse con la aparición de unos objetos denominados series de potencias. La salida a este problema es visualizada en Newton y Leibniz quienes logran establecer una serie de reglas y lineamientos. En este sentido compartimos la idea de (Guicciardini, 2003, p. 76) *"antes de la aparición de las series infinitas la curvas transcendentes no tenían una representación analítica, se presentaban en términos geométricos".*

Conclusiones

Como un primer momento y como se muestra al inicio de este artículo el paso de lo sintético (curva) a lo analítico (ecuación), se encuentra constituido en dos momentos cruciales:

- 1. El descubrimiento y tratamiento dado a las secciones cónicas.
- 2. La introducción y representación de ecuaciones algebraicas asociadas a las curvas geométricas.

Estos dos momentos nos permiten decir que los procesos evidenciados e intermedios, que se presentan en el paso de la curva a la ecuación, los entes geométricos (secciones cónicas, rectas, circulo, curvas) se conciben como un elemento inicial en la constitución de las matemáticas y, más aún, provenientes de la antigüedad griega. En este sentido el tránsito de lo sintético relacionado con la manera de producir curvas se ve inducido con la introducción de las ecuaciones algebraicas por Descartes y sus contemporáneos. Precisamente en esta identificación las curvas geométricas y mecánicas aparecen caracterizadas tal como lo hace Descartes. Una de los aportes más relevantes encontrados en la obra de Descartes es el cambio cualitativo que se presenta al crear un método para asociar ecuaciones a las curvas. Justamente el paso de una representación visual a una representación analítica expresada mediante una ecuación es el que permite la introducción de un sistema de coordenadas, donde sus elementos constitutivos comienzan a permear la idea de variación bien sea entre segmentos, puntos o curvas.

Tal como se mostró en el desarrollo histórico de este trabajo, el punto central de la solución del problema de Pappus es la caracterización de las secciones cónicas, que con respecto a la caracterización de Menecmo y Apolonio sufren un cambio referente al desprendimiento de una situación netamente geométrica (secciones de un cono) a ser vistas como curvas que poseen una representación analítica. Justamente Descartes al establecer un conjunto de operaciones definidas para los segmentos permiten establecer la dualidad numero-magnitud, con lo cual está introduciendo un cuerpo numérico, que le permite operar segmentos y definirlos como una operación bien establecida. La constitución de una teoría de ecuaciones algebraicas proveniente de los trabajos de Descartes, se constituye en un elemento fundamental en el desarrollo de la idea de función.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Álvarez, C. (2000). Descartes lector de Euclides. En C. Á., & R. Martinez, *Descartes y la ciencia del siglo XVII* (págs. 15-69). México D.F, México: Siglo ventiuno editores.

Arboleda, L. C. (2012). *El análisis cartesiano en la solución del problema de Pappus y la introducción de las curvas algebraicas.* Cali, Colombia: Instituto de Educación y Pedagogía. Universidad del Valle.

Descartes, R. (1637). *La Géometrié.* (D. E. Smith, & M. L. Lathan, Trans.) The open court publishing company.

Guicciardini, N. (2003). *Newton's Method and Leibniz's Calculus.* En H. N. Jahnke, A History of Analysis (págs. 73-103). Rhode Island: American Mathematical Society.

R. R. (2008). *Apollonius de Perge*, Coniques Tome 1.1: Livre I. Berlin, Germany: DeutschenNationalbibliothek.

Recalde, L. C. (2013). *Lecciones de Historia.* Cali, Colombia: Universidad del Valle.

Sefrin-Weis, H. (2010). *Pappus of Alexandria: Book 4 of the collection.* (J. Z. Buchwald, Ed., & H. Sefrin-Weis, Trans.) New York, USA: Springer-Verlag.