

TRANSICIÓN INTERNA DEL CÁLCULO: UNA PROPUESTA PARA LA IDENTIFICACIÓN DE ELEMENTOS DE RUPTURA Y DE TRANSICIÓN APOYADA EN LA SECUENCIA FEDATHI

Francisco Regis Vieira Alves, Hermínio Borges Neto y Katia Vigo Ingar
Instituto Federal de Educação Ciência e Tecnologia do Estado do Ceará, Brasil
Universidade Federal do Ceará, Brasil

Pontifícia Universidade Católica de São Paulo – PUC/SP

regis@ifce.edu.br; herminio@ufc.br; kvingar21@gmail.com

RESUMEN

En este artículo haremos una discusión de los elementos de *transición* y de *ruptura* que caracterizan la transición del estudio del Cálculo de una Variable real (CUV) al Cálculo de Varias Variables (CVV). Alves (2011) llamó a tal proceso, *transición interna*. Se describen y se ejemplifican situaciones didácticas que desarrollan la exploración de conceptos matemáticos, tanto en el CUV como en el CVV, en la perspectiva de la transición. La metodología de enseñanza denominada *Secuencia Fedathi* posibilita la exploración de situaciones, en las cuales el significado y la aplicación de la mejor estrategia deben ser negociados en el proceso de enseñanza, entre los alumnos y profesor.

Palabras clave: Transición interna, Enseñanza del Cálculo, Secuencia Fedathi, Tecnología

INTRODUCCIÓN

Hemos observado hace décadas la fuerza en la producción de investigaciones en el contexto de enseñanza del Cálculo en una Variable real (CUV), sobre todo en el Brasil, observamos la escasez de estudios pertinentes a la enseñanza del Cálculo Diferencial e Integral en Varias Variables (CVV). Por otro lado, la identificación de serias dificultades, hace décadas indicadas en el CUV es digna, también, de atención y vigilancia de los profesores en el contexto de enseñanza del CVV, puesto que, muchos de estos problemas y dificultades tienden a manifestarse, respecto a algunas particularidades y especificidades, en ambos contextos de la enseñanza académica.

Así, a lo largo de nuestra experiencia de enseñanza e investigación en el Brasil, presentamos en este trabajo, interpretaciones de situaciones de enseñanza diferenciadas, en la medida en que exploramos la tecnología en el contexto de la transición del CUV para el CVV. Igualmente, hacemos una discusión que fortalece la crítica a la enseñanza académica que restringe la actividad de investigación del aprendiz al cuadro algorítmico, caracterizado por la práctica indefectible de la aplicación automática de simbologías y fórmulas complicadas del CVV. De este modo, con el

apoyo en una visión metodológica de la enseñanza fundamentada en la Secuencia Fedathi (SF), buscamos identificar *elementos de transición* y *elementos de ruptura* en un proceso de *transición interna* entre los Cálculos. Además acentuamos el uso de los *softwares* como Geogebra y el CAS Maple que permiten la descripción de un escenario de actividades de investigación inaplicable al ambiente lápiz/papel, hecho que puede transformar el aprendizaje en la reproducción automática de técnicas algorítmicas sofisticadas, aún desprovistas de significado conceptual para el alumno.

TRANSICIÓN INTERNA DEL CÁLCULO

En el estudio del CVV, los cambios en las simbologías son notorios, como vemos en la figura 1 que describe el proceso de *transición interna* analizada por Alves (2011).

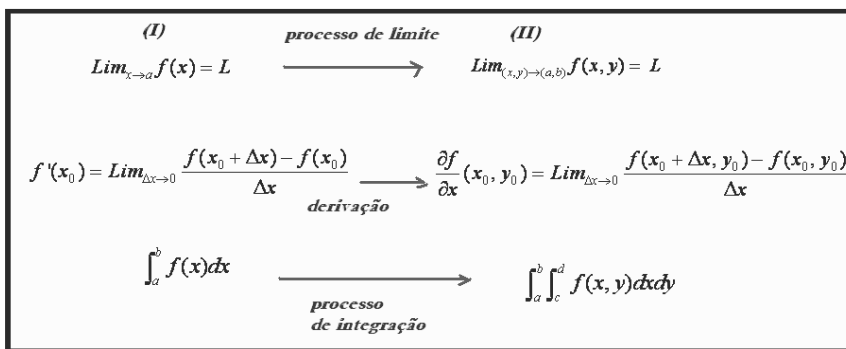


Figura 1: Cuadro de transición interna del CUV al CVV (Alves, 2011)

En su tesis, Alves (2011) indica los *elementos de transición* y los *elementos de ruptura* relacionados al contexto de *transición interna* del CUV al CVV. Tales elementos pueden ser identificados e íntimamente vinculados a los siguientes factores:

- (i) un sistema de representación simbólica más complejo.
- (ii) los argumentos desarrollados en las demostraciones de los teoremas en el CVV desarrollan ideas generalizadas de los teoremas en el CUV, inclusive la naturaleza de las *definiciones formales* desarrolladas.
- (iii) el cambio de la naturaleza geométrica de los objetos matemáticos desarrollados.
- (iv) el cambio del significado conceptual.
- (v) el surgimiento de las *reglas operacionales* semejantes, tanto en el CUV como en el CVV.
- (vi) *reglas operacionales* válidas en un contexto e inapropiadas en otro.
- (vii) teoremas del CUV sin interpretaciones semejantes en el CVV y viceversa.
- (viii) *definiciones formales* que desarrollan un cambio de significado de acuerdo con la teoría formal.

(ix) generalización de las nociones de *definiciones formales* en \mathbb{R}^3 o \mathbb{R}^n , sobretodo de naturaleza topológica.

Teniendo en cuenta la de síntesis de este artículo, nos detendremos sólo en algunos de estos elementos. Y, en la medida en que exploramos el uso de la tecnología de modo adecuado, los *elementos de ruptura* pueden funcionar como *elementos de transición*, una vez que el aprendizaje apoya un nuevo aprendizaje en el CVV en los conocimientos, ya adquiridos del contexto anterior de enseñanza del CUV.

Esta idea es principal en la tesis de Alves (2011), que discute el proceso de *transición interna* del CUV al CVV que, de manera similar como ocurre y es descrito por especialistas, en el contexto de transición de la escuela a la universidad, desarrollando barreras y dificultades en el aprendizaje de los estudiantes.

En relación a tal temática, Alves, Vieira Regis; Borges Neto, Hermínio (2011a) verifican que la exploración de la tecnología proporciona la evolución de habilidades cognitivas y la percepción de propiedades topológicas de gráficos en \mathbb{R}^3 , evitando el proceso de algoritmización en la enseñanza, que se presenta prioritariamente en la enseñanza universitaria; sin embargo es criticada con vehemencia por los especialistas (Artigue, 1998).

En otro estudio, mostramos el efecto didáctico de las representaciones gráficas ofrecidas por el *Computer Algebra System Maple*, en el sentido de promover mejor comprensión y, en consecuencia, la solución de problemas pertinentes al contexto de la enseñanza del CVV, hecho que posibilita suavizar la hegemonía del Álgebra.

En todos estos escritos, de modo simplificado, observamos que los autores hacen una referencia al menos a unos de los elementos de la lista que indicamos al inicio. De modo particular, con respecto al ítem (v), en el CUV, los alumnos pasan buena parte del tiempo, adquiriendo conocimientos *operacionales* pertinentes a las simbología del tipo: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$

y $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$. En el primer caso tenemos un *límite finito*, en el segundo un *límite en el infinito*, y en el tercero, un *límite infinito*.

Destacamos los dos últimos casos, pues, él mismo posibilita el entendimiento de la noción de *asíntota horizontal y vertical*, y a partir de su combinación, la descripción de las *asíntotas oblicuas* que no son objeto de estudio en el CVV. Situaciones desarrollando la noción de continuidad de funciones no serán discutidas aquí, pues en Alves (2011a) encontramos un análisis detallado y una propuesta interesante de enseñanza. Pero en el caso de la noción de límite o las nociones relacionadas al mismo concepto, vale observar la noción de *indeterminación*. De hecho, en el CUV, son diversas las posibilidades y técnicas desarrolladas para evitar o eliminar una *indeterminación*; aún, a los ojos del estudiante, puede parecer extraño la existencia de un vacío en lo que respecta al interés de aplicación del mismo concepto en el contexto del CVV.

Sin embargo, la noción de *indeterminación* puede ser explorada, también cuando estudiamos CVV. En efecto, considerando la función $f(x, y) = \frac{3x^2y}{x^2 + y^2}$ y analizamos su comportamiento cuando

$(x, y) \rightarrow (0, 0)$. En este caso, las funciones que se encuentran en el numerador y denominador son $3x^2y$ y $x^2 + y^2$. Observamos que sus imágenes se aproximan al origen $z = 0$, en la medida en que $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ (figura 2). La situación descrita en la figura 2 muestra el potencial que exploramos con la noción topológica de vecindad en el origen. De hecho, por intermedio de la intuición, y no de percepción (Alves, 2011), podemos imaginar una bola $B_{(0,0,0)}(r) = \{(x, y, z) \mid \|(x, y, z)\| < r\}$, que limita las respectivas imágenes asociadas a cada una de las funciones, en las proximidades de $(0, 0)$.

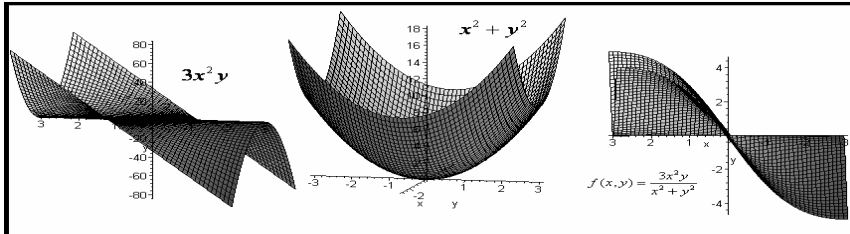


Figura2: Manifestación y significado de la noción de indeterminación en el contexto del CVV.

Por otro lado, de inmediato, inferimos que $\lim_{(x,y) \rightarrow (\infty, \infty)} (x^2 + y^2) = +\infty$, mientras que no se puede prever

el comportamiento de la imagen de la función, cuando las variables de la función $3x^2y$ asumen valores grandes. La propia notación $\lim_{(x,y) \rightarrow (\infty, \infty)}$ que empleamos contraria a la forma *estándar* de

tratamiento en el CVV, el cual finalmente, es el significado algebraico o geométrico del par ordenado (∞, ∞) . Sin embargo, con apoyo en los gráficos de la figura 2 (lado izquierdo), conseguimos un significado geométrico vinculado a la simbología $\lim_{(x,y) \rightarrow (\infty, \infty)} (3x^2y)$, y podemos

producir una conclusión dando cuenta de la imposibilidad de preverse el comportamiento del referido límite en el infinito.

Aún, en lo que respecta a la preocupación con el significado de notaciones matemáticas, una vía más intuitiva, sería el empleo de la siguiente simbología $\lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow \infty}} (x^2 + y^2) = +\infty^0$

$\lim_{x \rightarrow \infty} [\lim_{y \rightarrow \infty} (x^2 + y^2)] = +\infty$. En el primer caso, adoptamos una simbología semejante a la de Simmons (1988), mientras que el segundo límite designa el proceso semejante al que se estudió en el CVV conocido como *límite iterado*.

En este caso, en términos del significado de la notación y también semejante con lo que el sujeto estudia en el CUV, el empleo de *límite iterado* puede actuar como un *elemento de transición*. Por otro lado, con respecto al ítem (vi), identificamos un *elemento de ruptura*.

El ejemplo de la figura 2 destaca las posibilidades al efectuarse el cálculo del límite $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{3x^2y}{x^2+y^2}$ y el papel de la tecnología en evitar cálculos fastidiosos en el contexto del CVV. En el próximo segmento, profundizaremos algunas situaciones pertinentes a su uso didáctico.

ENSEÑANZA DEL CÁLCULO Y TECNOLOGÍA

La exploración didáctica de la tecnología en sala de aula puede proporcionar los cambios de rituales indefectibles de enseñanza que adquieren mayor vigor en estos últimos siglos de predominio y hegemonía del *método axiomático* (Choquet, 1963). En este sentido, *subrayamos* el software libre *Geogebra* y el *CAS Maple*, en lo que se refiere a sus potencialidades de uso. Un ejemplo que merece destacarse es respecto a la noción de valores extremos de funciones. En el contexto del CUV, en la enseñanza, constatamos la exploración de funciones del tipo $y = f(x)$.

Por otro lado, en el caso del CVV, encontramos funciones de tipo $z = f(x, y)$, sin embargo desde el punto de vista geométrico, ¿cuál es el significado de un valor extremo (máximo o mínimo local) para funciones de tipo $w = f(x, y, z)$? De hecho, consideramos las funciones $f(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + z^2 + xy + x^2y$ y $g(x, y, z) = (xyz) \cdot e^{-x^2 - y^2 - z^2}$. En la figura inferior exhibimos algunas de sus superficies de nivel en \mathbb{R}^3 , ya que, sus respectivos gráficos residen en \mathbb{R}^4 y por tanto, imperceptibles a nuestro campo de visión.

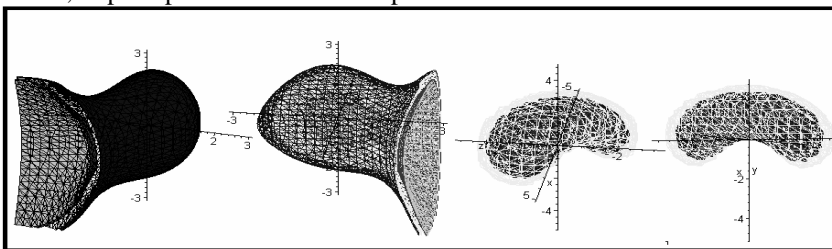


Figura 3: Exploración de la noción de puntos extremos en el contexto del CVV.

En todo caso, en la situación en que exhibimos en la figura 3, con amparo en la visualización y percepción; cómo decidir, ¿en cuál de los casos presentados anteriormente tenemos un punto de mínimo local (respectivamente máximo local)?, ¿qué imagen mental pertinente al CUV puede apoyar nuestro entendimiento ante tal situación desarrollando conceptos del CVV?

Subrayamos que responder investigaciones de esta naturaleza, desarrolla habilidades más simples en \mathbb{R}^2 , adquiridas en el contexto del CUV. En efecto, observando los gráficos de la figura 4, el comportamiento del gráfico no permite formular conjeturas dando cuenta de la existencia de un valor máximo local (gráfico del lado izquierdo) y, posiblemente un valor mínimo en el intervalo $(-1,1)$, a pesar de que, la expresión $\frac{x}{\sqrt{1-x} - \sqrt{1+x}}$ no permita conocer su valor exacto en $x = 0$,

pues $\frac{0}{\sqrt{1-0}-\sqrt{1+0}} = \frac{0}{1-1}$. Por fin, destacamos el extenso estudio de las reglas *operacionales*

particulares de límites en CUV que no se presentan de modo semejante en el CVV. De hecho, en el contexto del CUV, encontramos los siguientes límites $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 4x + 4}{4x^2 + 3x + 2}$ y $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}$. En

el primer caso, verificamos la necesidad de técnicas semejantes a las que mencionamos en la sección anterior, en la medida en que identificamos una indeterminación del tipo $\frac{\infty}{\infty}$.

Identificamos, mientras tanto, que, en un momento inicial, la simple observación del primer límite no nos proporciona alguna indicación sobre la existencia de una recta y, en relación a la cual, el gráfico se aproxima, para valores arbitrariamente grandes de la variable x. En este caso, la función admite una *asíntota horizontal*, puesto que, con el llamado algoritmo, concluiremos que

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 4x + 4}{4x^2 + 3x + 2} = \frac{3}{4}$. Observamos en el contexto del CVV, no se observa la exploración de las

nociones de asíntotas en el gráfico, lo que caracteriza un *elemento de ruptura*. Pero, con el uso del *software Geogebra*, distinguimos, de modo casi inmediato, la existencia de una recta *asíntota horizontal* y la no existencia de cualquier *asíntota vertical* o *asíntota oblicua*. En el caso del

límite $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}$, su potencial pedagógico reside en el hecho de que el observador

comprende que el símbolo $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}$ es desprovisto de significado, puesto que, por la

inspección perceptual del gráfico, percibimos sólo en relación al siguiente dominio $(-1, 1) - \{0\}$.

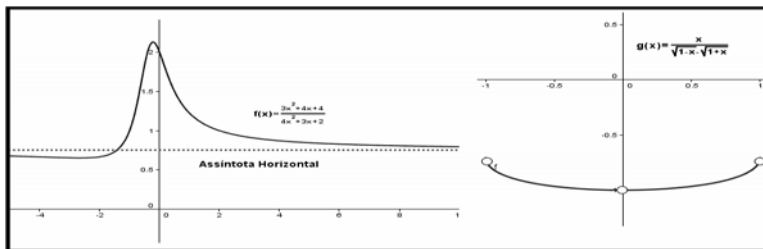


Figura 4: Gráficos relacionados con la descripción y comportamiento geométrico de los límites

Otro concepto común en el contexto de la enseñanza del CUV y del CVV, es con respecto a la noción de *diferenciabilidad* de funciones. Con relación al ítem (ii), observamos que mientras en el CUV, tenemos la noción geométrica de obtención de una recta tangente al gráfico de una función en \mathbb{R}^2 , ya en el CVV, por intermedio de la verificación del límite que caracteriza formalmente a la *diferenciabilidad* de una función;

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\Delta x - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\Delta y}{\|(\Delta x, \Delta y)\|} = 0,$$

lo que no sugiere de modo evidente e inmediata, una interpretación geométrica semejante al CUV.

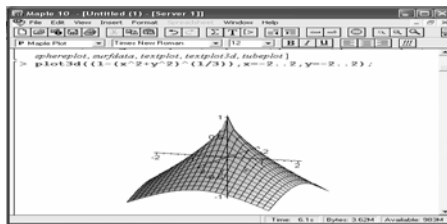


Figura 5: Ejemplo de función no diferenciable en el origen

Por otro lado, con base en la figura, de manera intuitiva, el observador puede producir una inferencia dando cuenta de la pérdida de diferenciability de la función en el origen, descrita analíticamente por $(1 - (x^2 + y^2)^{1/3})$, una vez que, manifieste el entendimiento relativo a la existencia de una “punta”. Antes del uso del vocablo “punta”, de que su propio contenido proporciona un “metaphorical insight” (Otte, 2008, p. 66) vinculando a la relación inmediata que se establece entre dos representaciones distintas del mismo objeto que destacamos en la figura 5.

PROPUESTA DIDÁCTICA DE LA ENSEÑANZA EN EL CONTEXTO DE LA TRANSICIÓN

En las secciones pasadas evidenciamos algunos ejemplos y *situaciones problema* (Brousseau, 1986, p.400), relacionadas a determinados conceptos del CUV y del CVV, en las cuales tenemos la posibilidad de identificar *elementos de transición* y *elementos de ruptura*. En esta sección, adoptamos una perspectiva de metodología de enseñanza que pueda permitir la mediación didáctica del saber en la clase, con la intención de estimular los *elementos de transición* y eliminar o, por lo menos, mitigar *elementos de ruptura*.

De este modo, vale comentar que la exploración de un problema, por parte del profesor de Matemática, influenciado por los fundamentos asumidos en la *Secuencia Fedathi – SF*, no orienta su explicitación inmediata. Igualmente, la SF ha sido utilizada en el Brasil en investigaciones específicas en la enseñanza del CVV (Alves, 2011b; Alves, Borges Neto & Ingar, 2012) que se manifiesta de modo escaso.

De modo sistemático, al transcurrir de una mediación, seguimos las etapas delineadas.

Fase 1: Toma de posición – presentación del problema.

En lo que se refiere a los alumnos, hace parte de su papel de descubrimiento/identificación de un problema relevante. En este caso, sin el recurso algorítmico, podemos instigar la curiosidad de los aprendices en torno de la identificación de valores máximo o mínimo local en los gráficos exhibidos en las figuras 5 y 6. Teniendo sólo conocimientos de CUV, esta tarea puede ser

propuesta sin el conocimiento *a priori* de una definición formal pertinente a los puntos extremos de funciones del tipo $z = f(x, y)$.

De modo intuitivo, con base en la percepción del comportamiento del gráfico de la función $f(x, y) = x^2 - y^2$ (*paraboloide hiperbólico*), el observador, acompañando la trayectoria de las *curvas parametrizadas* que destacamos en rojo, adquiere un entendimiento que, en la condición de curva escogida (además de otras en la superficie), su comportamiento a veces es de *máximo local* y a veces es de *mínimo local* (ver figura 6).

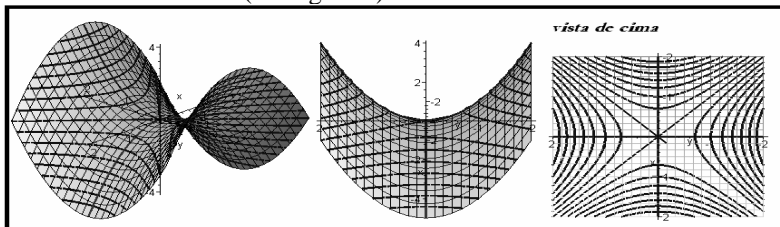


Figura 6: identificación visual de puntos de silla y descripción de las curvas de nivel en el plano

Otro concepto que encontramos en CVV y que exige la adquisición de habilidades del alumno, cuya naturaleza semejante no se observa en el CUV. De hecho, consideremos los siguientes campos vectoriales:

$$\vec{F}(x, y, z) = xz\vec{i} + xyz\vec{j} - y^2\vec{k} \quad \text{y} \quad \vec{G}(x, y, z) = y^2z^3\vec{i} + 2xyz^3\vec{j} + 3xy^2z^2\vec{k}$$

En estos casos, nos restringimos a campos del tipo $\vec{F}, \vec{G} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ que posibilitan una descripción geométrica. En efecto, en la fase de *maduración*, presentamos el comportamiento de los respectivos campos (figuras 7 y 8). La descripción geométrica de campos como éstos, son imposibles sin el recurso computacional.

En la *fase de solución*, mas adelante, usando las notaciones adecuadas, el solucionador de este problema debe inferir que $rot(\vec{F}(x, y, z)) = (-y(2+x), x, yz)$, mientras que $rot(\vec{G}(x, y, z)) = (0, 0, 0)$. En este caso, el *vector rotacional* proporciona una interpretación física por el movimiento de partículas, bajo la acción de un campo (de velocidades). En el segundo caso, las partículas giran a lo largo de su desplazamiento (figura7).

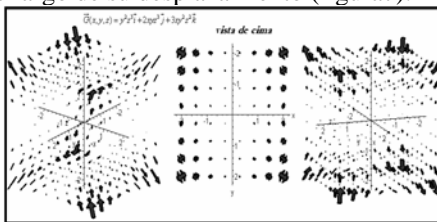


Figura 7: Descripción de campo vectorial en \mathbb{R}^3 con rotacional nulo.

En el caso de la figura 8, exhibimos los campos $\vec{F}(x, y, z) = xz\vec{i} + xyz\vec{j} - y^2\vec{k}$ (de color rojo) y el campo generado por su rotacional (en azul). Por intermedio de la percepción, comprendemos que

la intensidad de ésta, es mayor que la intensidad del anterior en las vecindades del punto $(0,0,0)$, y tal intensidad puede ser aquí entendida de acuerdo con el comportamiento de la longitud de los vectores en el espacio \mathbb{R}^3 .

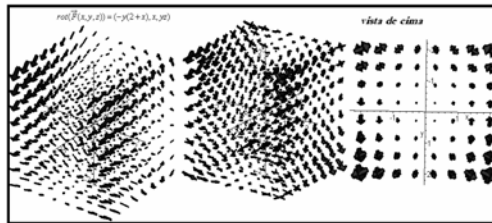


Figura 8: Descripción del campo vectorial en \mathbb{R}^3 con rotacional no nulo.

Fase 2: Maduración – comprensión e identificación de las variables involucradas en el problema. En esta fase, los alumnos son estimulados a la identificación de las variables más pertinentes, o mejor, los elementos invariantes de esta situación – problema.

Nos damos cuenta que, usando sólo a las simbologías algebraicas y direccionando las acciones de los estudiantes en el sentido de extraer información a partir del ambiente lápiz/papel, la fase que llamamos de *maduración*, en general, es desconsiderada en la enseñanza tradicional. En el caso del contexto de la *transición interna* del CUV para el CVV, el profesor debe describir un escenario de investigación que permita comparar los saberes desarrollados, tanto en el CUV como en el CVV. Este momento es decisivo en el sentido de que el aprendiz pone en práctica la estrategia que cree ser la de mayor éxito y, finalmente, la implementa.

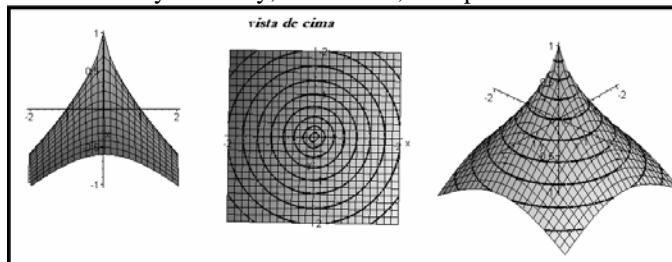


Figura 9: Gráfico estimula la producción de imágenes mentales asociadas a la noción de diferenciabilidad.

Fase 3: Solución – presentación y organización de esquemas/modelos que ven a la solución del problema.

En esta fase los alumnos deben emplear una estrategia con visión en la solución de las actividades propuestas. Destacamos que las elecciones poco exitosas no pueden ser descartadas y las informaciones o acciones solicitadas en los grupos de alumnos deben ser retomadas en la fase subsiguiente. Aquí, la SF se distingue por valorizar el uso del raciocinio lógico matemático formal, además del raciocinio intuitivo, que evolucionó, desde las fases anteriores.

Fase 4: Prueba – formalización del modelo matemático a ser enseñado.

En la última fase, el profesor debe retomar la conducción del debate en aula, con la intención de evidenciar e indicar la adecuación de los argumentos válidos aplicados en la resolución de las actividades propuestas, los límites de aplicabilidad de éstos y la posibilidad de restricciones. En este momento, dependiendo de la calidad de la producción de los aprendices, profesor y alumnos deben confrontar los datos de naturaleza algébrica con los gráficos exhibidos en la pantalla del computador.

Cuando subrayamos la confrontación de los datos, destacamos dos elementos:

- (a) puede haber la confrontación de los datos evidenciando el papel del computador.
- (b) puede haber la confrontación de los datos, en relación al modelo matemático desarrollado y utilizado en las situaciones –problema.

En relación al ítem (a), podemos, por ejemplo, confrontar los datos ofrecidos por CAS Maple en relación a las siguientes funciones:

$$z = xy \quad ; \quad z = x^2y^2 \quad ; \quad z = 1 - x^2 - y^2 \quad ; \quad z = x^2 + y^2 \quad ; \quad z = x^3 - 3xy^2 \quad \text{y} \quad z = 4 - y^2$$

El aspecto diferenciado indicado en el libro de Kaplan & Lewis (1970) al abordar, de modo didáctico, el entendimiento de las conclusiones de la aplicación de la *Matriz Hessiana* para funciones del tipo $z = h(x, y)$.

Observemos que en el Brasil, los dos tipos de demostraciones posibles que describen la referida matriz y son, de modo *estándar*, enseñados, exigen habilidades específicas generalmente manifestadas por los alumnos mas talentosos, del punto de vista matemático.

Una de las dificultades (Alves, Borges Neto & Alves Dias, 2012) identificada en el enunciado del teorema de la Matriz Hessiana, dice al respecto de la identificación de *puntos de silla* y en los casos en que el análisis de la matriz es inconcluso, descrito formalmente por:

$$B^2 - AC = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} (x_0, y_0) \right)^2 - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} (x_0, y_0) \right) \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} (x_0, y_0) \right) > 0 \quad \text{o} \quad B^2 - AC = 0.$$

Sin embargo, con amparo en los ejemplos (figura 10) ofrecidos por Kaplan & Lewis (1970), en la *fase de prueba*, tenemos una buena oportunidad de proporcionar la revisión de las estrategias implementadas en la *fase de solución* y confirmar la mas exitosa, o cual estrategia presentó inconsistencias lógicas.

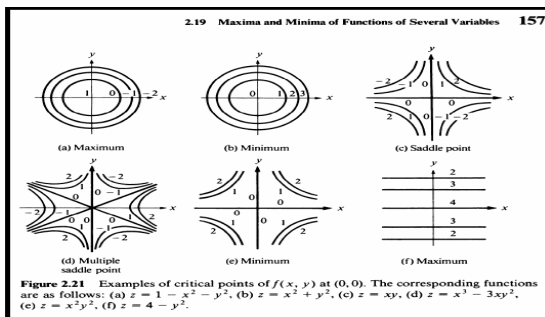


Figura 10: La descripción de los puntos extremos por medio del comportamiento de curvas de nivel descritos en Kaplan & Lewis (1970)

De hecho, una mediación exitosa del profesor, basada en una concepción de la enseñanza que dice que el saber se constituye a partir de buenas preguntas y buenas respuestas (Brousseau, 1986, p.296). Los ejemplos de la figura 10 propician una discusión de los resultados previstos por la prueba de la Hessiana, antes de efectuar cualquier formalismo.

De hecho, comparando el comportamiento del gráfico de la figura 9, vemos que sus curvas de nivel $\left(1 - (x^2 + y^2)^{1/3}\right) = k$ se asemejan al que previnieron Kaplan & Lewis (1970).

Añadimos también la poca atención mostrada por los autores de los libros del CVV en el Brasil respecto a los ejemplos en el caso en que $B^2 - AC = 0$. En efecto, considerando la función $z = x^3 - 3xy^2$, hacemos las cuentas y obtenemos:

$$\nabla f(x, y) = (3x^2 - 3y^2, -6xy) = (0, 0) \Leftrightarrow (x, y) = (0, 0).$$

Y en el caso de la función $z = 4 - y^2$, concluimos más de una vez que la prueba de la Hessiana es inconclusa. Sin embargo, por el comportamiento de su gráfico (figura 11, lado derecho), conjeturamos la existencia del máximo.

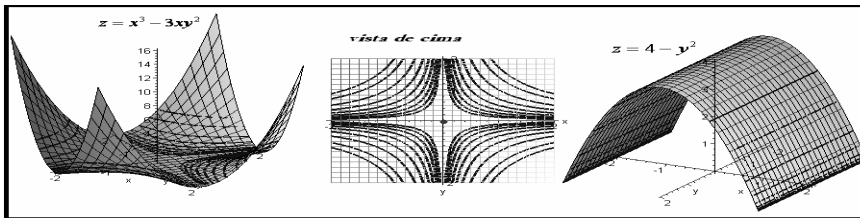


Figura 11: En el caso inconcluso, encontramos ejemplos que indican valor máximo.

Observamos por fin, que en la fase de *maduración*, la *epistemología del profesor* (Brousseau, 1986, p.305) puede condicionar, determinar y colocar en evidencia el momento de la prueba y demostración. Tal actitud es marcada por la fuerte influencia del formalismo y/o una filosofía implícita de la Matemática. De otro modo, apoyándose en la SF, el profesor debe estimular la producción colectiva del grupo, la obtención de los resultados en sinergia y la indicación de respuestas por intermedio de una negociación del propio grupo, y no sólo como respuestas que él recibe, fruto de sus preguntas iniciales.

CONSIDERACIONES Y RECOMENDACIONES

Un carácter distinguido del CVV dice respecto a la posibilidad y a la necesidad de explorar y discutir los conceptos de esta teoría en \mathbb{R}^3 y lo mismo en \mathbb{R}^n . Además según Brousseau (1986, p.296), no podemos restringir la enseñanza del Cálculo a tareas de estilo patrón que el alumno tiene que resolver y presentar una única respuesta.

El alumno debe aprender entonces por adaptación, en un medio repleto de elementos que proporcionan dificultades y desequilibrios. De este modo, en el contexto de *transición interna* del CUV al CVV, es importante la adaptación de los viejos modelos mentales familiares del CUV a un nuevo contexto de aprendizaje. De este modo, todas las situaciones aquí discutidas llevan elementos que mantienen características deseadas en la transición.

En este trabajo, advertimos que el abordaje de la enseñanza del Cálculo puede fortalecer *elementos de ruptura* y descuidar los *elementos de transición*, sin embargo, buscamos evidenciar que la elección de un abordaje metodológico, en nuestro caso la SF, puede potencializar situaciones de aprendizaje que, si no evita, puede, por lo menos, mitigar los males proporcionados por rituales de enseñanza que privilegian la algoritmización y el *tratamiento estructural* (Choquet, 1963), encima del conocimiento conceptual.

No obstante, el uso de *software*, con carácter de complementariedad, como así lo hicimos con *el Geogebra* y el *CAS Maple*, indica un repertorio diversificado de situaciones de aprendizaje. En la figura 12, por ejemplo, exhibimos una situación de ambos *software*, en sintonía con los autores Alves & Borges Neto (2007; 2012).

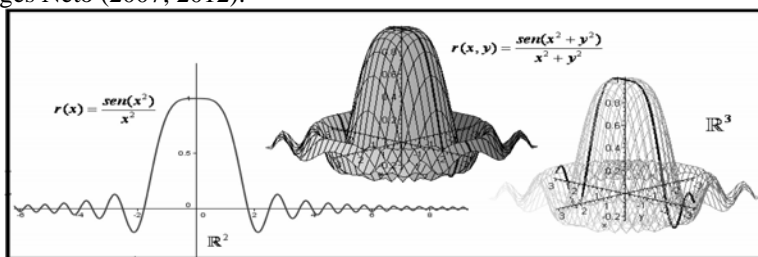


Figura 12: Exploración didáctica de los softwares Geogebra y CAS Maple en el contexto de la transición.

Referencias bibliográficas

- Alves, Francisco. R. V.; Borges Neto, Hermínio. (2007). Uma sequência de Ensino para a aquisição do conceito de derivada parcial, direcional e teoremas correlatos no Cálculo em Várias Variáveis, In: *Conexões, Ciência e Tecnologia*, v. 1, n. 1, p. 29-34. Disponible en: <http://revistaconexoes.ifce.edu.br/index.php/conexoes/issue/archive>.
- Alves, F. Regis. V.& Borges Neto. H. (2008). Aplicação da Sequência Fedathi na aquisição do processo de Integral Tripla com o auxílio do Maple. In: *XII Encontro Brasileiro de Estudantes de Pós-Graduação em Educação Matemática*. Acessível em: http://www2.rc.unesp.br/eventos/matematica/ebrapem2008/trabalhos_comissao_cientifica.php
- Alves, Francisco. R. V. (2011). *Aplicações da Sequência Fedathi na promoção das categorias do raciocínio intuitivo no Cálculo a Várias Variáveis*. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 353p. Disponible en: http://www.teses.ufc.br/tde_biblioteca/login.php
- Alves, Vieira Regis; Borges Neto, Hermínio. (2011a). Transição interna do cálculo em uma variável para o cálculo a várias variáveis: uma análise de livros. In: *Educação Matemática*

- Pesquisa*. v. 13-3, 597-626, Disponível em: <http://revistas.pucsp.br/index.php/emp/issue/archive>. Acesso em: 25 dez. 2011.
- Alves, Vieira Regis; Borges Neto, Hermínio. (2011b). Análise de livros de cálculo a várias variáveis: o caso da comutatividade das derivadas parciais. In: *XIII Conferência Interamericana de Educação Matemática*, 1-12. Disponível em: http://www.cimm.ucr.ac.cr/ocs/index.php/xiii_ciaem/xiii_ciaem
- Alves, Francisco Regis; Borges Neto, H. & Alves Dias. M.. (2012). Implicações e aplicações da teoria das representações semióticas no ensino do Cálculo. In: *Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática*.
- Alves, Francisco. R. V. (2012). Exploração de noções topológicas na transição do Cálculo para a Análise Real com o Geogebra. In: *Revista do Instituto Geogebra Internacional de São Paulo*, 1, P. CLXV-CLXXIX, Disponível em: <http://revistas.pucsp.br/index.php/IGISP/index>. Acessado em: 04 de Abril de 2012.
- Alves, Francisco. R. V.; Borges Neto, Hermínio. Ingar, Kátia, V. (2012). Aplicações da Sequência Fedathi: sobre o ensino dos pontos críticos e de inflexão. In: *VI Colóquio Internacional sobre enseñanza de las Matemáticas*. Disponível em: <http://irem.pucp.edu.pe/164/iv-coloquio-internacional-sobre-ensenanza-de-las-matematicas>
- Artigue, Michelle. (1998). Enseñanza y aprendizaje del Análisis Elemental: que se puede aprender de las investigaciones didácticas y los cambios curriculares? In: *Revista Latinoamericana en matemática educativa*. Março, 1(1), p. 40-55.
- Borges Neto, Hermínio. et al. (2001). A Seqüência Fedathi como proposta metodológica no ensino-aprendizagem de Matemática e sua aplicação no ensino de retas paralelas, In: *XV EPENN – Encontro de Pesquisa Educacional do Nordeste*. São Luís, p. 590-609.
- Brousseau. Guy. (1986). *Théorisation des phénomènes d'enseignement des mathématiques*. Bourdeux (Thèse de doctorat d'Etat). Université de Bordeaux I, 905p.
- Choquet Gustave. (1963). *What is Modern Mathematics*. England: Lampardt Gilbert & Co. Educational Explores Limited Reading.
- Duval, Raymond. (1995). *Sémiosis et Pensée Humaine*. Paris: Peter Lang Edition.
- Lima, Elon Lages. (2009). *Curso de Análise*. v.2, 11ª edição, Rio de Janeiro: Projeto Euclides.
- Lima, Elon Lages. (2010). *Curso de Análise*. v.1, 12ª edição, Rio de Janeiro: Projeto Euclides.
- Martinez-Planell, Rafael & Trigueros, Maria. (2010). Geometrical representations in the learning of two-variable functions. In: *Educational Studies in Mathematics*, 73, 3-19.
- Kaplan, Wilfred & Lewis. Donald. (1970). *Calculus and Linear Algebra*. New York: Donald Publication.
- Otte, Michael. (2008). Metaphor and contingency. In: Radford, L.; Schübring, G. & Seeger, F. *Semiotics in Mathematics Education*, Rotherdam: Sense Publishers, p. 63-82.
- Simmons. George. (1988). *Cálculo com Geometria Analítica*. v. 2, São Paulo: Pearson Editora.