

JUGANDO CON SUCESIONES Y PROGRESIONES ARITMÉTICAS Y GEOMÉTRICAS.

*Alba Ziomara Avilé
Formosa*

Una cosa es resolver problemas similares teniendo como única variante que cambien los números y, otra muy diferente es, frente a un determinado problema, hallar respuestas y soluciones encontrando relaciones muy interesantes entre los números y sus propiedades.

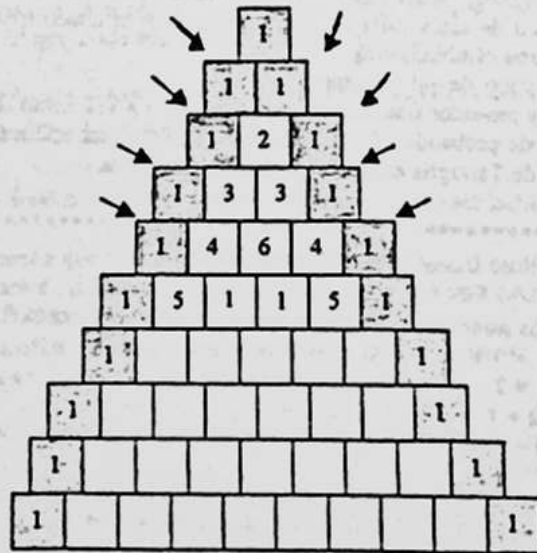
Cuando estamos resolviendo ejercicios "rutinarios", sólo basta con verificar si la solución es correcta. Sin embargo, cuando nos enfrentamos con problemas de cálculo cuya solución se debe demostrar y generalizar, existen infinitas posibilidades de abordar el mismo resultado. Esto último es muy enriquecedor puesto que desarrolla el pensamiento divergente, creativo y deductivo.

El desafío es interesante.

Te invito a que, juntos nos introduzcamos en la "magia" que poseen las siguientes situaciones.

1.- Construiremos una torre de cubos, cuya cúspide, esté "ocupada" por el número 1 y los sucesivos, son la suma de los números que se hallan en los dos cubos superiores.

Completa los cubos que faltan...



- a) Observarás que las "diagonales" de los extremos están formadas por "unos"
1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1...
- b) Escribe los números que se encuentren en los cubos de las diagonales indicadas con la flecha número (1).

¿Encuentras alguna relación o secuencia en la formación de esa diagonal?
Expésala, en caso afirmativo.

- c) Escribe los números que se encuentren en los cubos de las diagonales indicadas con la flecha número (2).

¿Encuentras alguna relación o secuencia en la formación de esa diagonal?
En caso afirmativo, expésala.

- d) Escribe los números que se encuentren en los cubos de las diagonales indicadas con la flecha número (3).

¿Qué relación encuentras para que se forme la secuencia?

- e) Escribe los números que se encuentren en los cubos de las diagonales indicadas con la flecha número (4).

¿Puedes decir cuál es la secuencia seguida en la formación de esta diagonal?

- f) Compara las cinco secuencias que se formaron y establece la diferencia de cada una.

Esta "torre numérica", es conocida como el Triángulo de Tartaglia o de Pascal.

Tartaglia fue un matemático Italiano que vivió entre los años 1499 y 1557. Fue uno de los primeros en descubrir la resolución de ecuaciones de tercer grado. Ideó el citado triángulo para resaltar las propiedades de los números combinatorios.

Se dice que era tartamudo, de ahí su nombre.

Pascal, fue un físico y pensador francés que vivió en el siglo XVII. Sentó las bases de la geometría proyectiva y el cálculo de probabilidades. También realizó grandes aportes a la física y es quién perfeccionó el triángulo de Tartaglia encontrando nuevas relaciones.

.....
2.- Volvamos al maravilloso triángulo y, continuemos con él.

- Si realizamos las sumas de los números que se encuentran en cada fila, tenemos:

1era. Fila: 1

2da. Fila: $1 + 1 = 2$

3era. Fila: $1 + 2 + 1 = 4$

4ta.: Fila: $1 + 3 + 3 + 1 = 8$

- a) Realiza las sumas de los números que se encuentran en las filas sucesivas.
b) ¿Encuentras alguna relación entre los resultados obtenidos?. Fundamenta la respuesta.
Halla dos procedimientos diferentes para obtener las sumas e intenta generalizar el procedimiento.

- c) Aplicando lo que descubriste y, sin continuar con el triángulo, encuentra el resultado de sumar todos los números que se encuentran en la fila decimoquinta.

A esta altura, espero que coincidas conmigo en cuanto a lo mágico y maravilloso de este triángulo. Observarás que ya aprendiste muchos conceptos.
¿Puedes enunciarlos?

.....

.....

.....

3.- *Rectas determinadas por puntos*

Ya sabes que dos puntos determinan una recta, por lo tanto, también determinan un segmento.

Un punto en un plano, ¿determina algún segmento?. Enuméralos.

Dos puntos en el plano, ¿determinan algún segmento?. Enuméralos.

¿Cuántos segmentos determinan tres puntos en el plano, *no alineados*?.
.....

¿Cuántos segmentos determinan cuatro puntos en el plano de forma tal que, *tres de ellos no estén alineados*?.
.....

¿Cuántos segmentos determinan cinco puntos en el plano de forma tal que, *tres de ellos no estén alineados*?.
.....

Enumera los segmentos que fuiste graficando hasta aquí, según el número de puntos en el plano:
.....

¿Encuentras alguna relación entre el número de puntos y el número de segmentos?

Sin dibujar los puntos en el plano, ¿puedes determinar cuántos segmentos determinan 10 puntos del plano de forma tal que, *cada tres de ellos no estén alineados*?.
.....

4.- **MARAVILLAS CON LOS NÚMEROS:**

Los números decimales, esos que "vienen" con coma, suelen ser participantes de muchos acertijos matemáticos.

Uno siempre desearía que todo resultado fuese un entero.

¿Por qué nos parece más elegante un número entero que uno decimal?. ¿Será que un número decimal nos parece "menos número" que un entero?.

Sin embargo aquellos, no son "menos números" que los enteros; los números decimales son igualmente divertidos y también tienen sus magias y secretos.

- Para obtener, por ejemplo el periodo del número $\frac{1}{98}$, debemos efectuar la engorrosa división 1:98 y seguirla por un buen rato hasta observar que las cifras decimales comienzan a repetirse. Pero, ¿existe alguna manera más entretenida de resolver la división sin apelar a la calculadora y utilizando nuestra observación y nuestra mente?.
- Pues, SÍ. El método es fácil, divertido y casi mágico.

- Expresa, al menos, once de las cifras decimales que resultan de dividir 1 por 98.
1. $98 = \dots\dots\dots$

Observa la siguiente adición:

$$\begin{array}{r}
 0,01 \\
 02 \\
 04 \\
 08 \\
 16 \\
 32 \\
 64 \\
 128 \\
 256 \\
 \hline
 0,01020408163264128256
 \end{array}$$

- ¿Coinciden los resultados? Sí () No ()
- ¿Observas algo "especial" entre las cifras colocadas en "escalerita" en forma sucesiva, donde cada nuevo escalón hace asomar dos cifras por debajo del escalón anterior?.
- ¿Son potencias de algún número?.
- ¿Por qué crees que se utilizaron las potencias de ese número y no de otro?. Fundamenta.
- En vez de expresar la relación que descubriste como potencia de un mismo número, hazlo encontrando otra relación.

5.- Dibuja ahora un cuadrado lo suficientemente grande como para que puedas realizar las gráficas que se te solicitarán a continuación.

- Trázale sus bases medias.
¿Cuántos cuadrados te quedaron formados luego de trazar las dos bases medias?.
 - A esos "nuevos cuadrados", trázales nuevamente sus bases medias.
¿Cuántos cuadrados resultan luego de haber trazado, en total, 8 bases medias?.
 - A los cuadrados resultantes, trázales ahora sus bases medias.
¿Cuántos cuadrados obtuviste luego de haber graficado 32 bases medias?
Escribe el número de cuadrados que fuiste obteniendo a medida que graficaste las bases medias de cada cuadrado.....
¿Encuentras alguna relación entre el número de bases medias y el número de cuadrados resultantes?.
- ¿Puedes determinar, sin graficar, cuántos cuadrados resultan luego de trazar 128 bases medias?

6.- La sucesión de Fibonacci

6-1).- Volvamos a nuestra torre de cubos:

Tomemos como "escaleras" los cubos grisados en cada torre. Comenzando por la parte superior, tenemos un solo escalón grisado. Si sumamos los números que se encuentran en las "escaleras" grisadas y anotamos sus sumas, tenemos:

Gráfico 1

Escalón 1 = 1

Gráfico 2

Escalón 2 = 1

Gráfico 3

Escalón 3 = 1+1=2

Gráfico 4

Escalón 4 = 2+1=3

Gráfico 5

Escalón 5 = 1+3+1=5

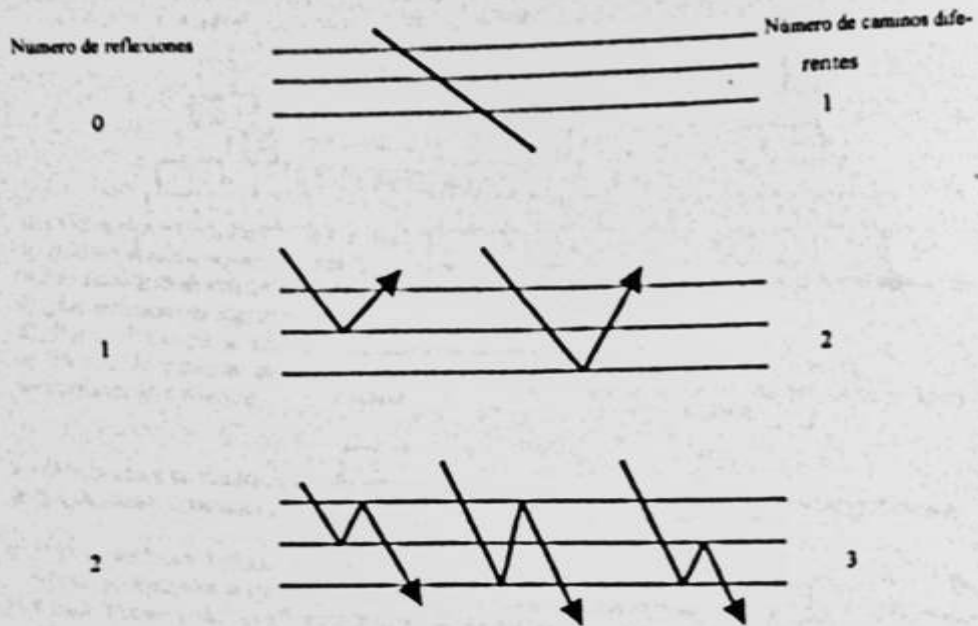
a) Continúa con las adiciones y, coloca los resultados en los puntos suspensivos:
1; 1; 2; 3; 5;;;;

b) ¿Encuentras alguna secuencia lógica en la "obtención" de cada número de la sucesión? Fundamenta.

c) Obtén los quince primeros números de la sucesión citada. (Si quieres hacerlo con la torre de cubos, hazlo, te quedará muy bonito).

6-2)- "Reflexiones múltiples: Las trayectorias de los rayos luminosos que inciden obligadamente sobre dos láminas de vidrio planas en contacto, dependen del número de reflexiones que sufren estos rayos. Si no sufren reflexión, sólo hay una trayectoria, si sufren dos reflexiones, hay tres trayectorias y, así sucesivamente, como indica la figura"¹

¹ Taller de Matemáticas. Tomo 2. Actividades sobre Formas y figuras. Pp.87.



- ¿Cuántas trayectorias habrá, si el rayo tiene tres reflexiones? Graficalo.
- ¿Encuentras alguna relación entre el número de reflexión del rayo y el número de trayectorias?
- ¿Puedes determinar, cuántas trayectorias producen 12 reflexiones?

.....

Leonardo Fibonacci nació en Pisa en el año 1170 y murió cerca del año 1250. Es considerado uno de los matemáticos más importantes de la Edad Media.

Lo que acabas de hacer en los items 5 y 6, es la conocida Sucesión (secuencia de números) de Fibonacci.

¿Te animas a enunciarla con tus palabras?

.....

Uno de los problemas más "populares" que tienen como aplicación la sucesión de Fibonacci es el siguiente. Te invito a que lo resuelvas.

6-3)- "¿Cuántos conejos puede producir una sola pareja en un año, si todos los meses cada pareja entrega una nueva pareja, la cual comienza a entregar a partir del segundo mes, y así sucesivamente suponiendo que no se produce ninguna muerte?"².

.....

Para resolverlo, debes tener en cuenta que en el primer mes comenzamos con una sola pareja de conejos inmaduros. Durante el segundo mes tenemos todavía una sola pareja pero ahora son maduras. Al tercer mes han producido una nueva pareja, por lo tanto dos parejas, una madura y otra inmadura y así sucesivamente ..

7.- Continuando con las "Maravillas con los números", existen algunos números que nos brindan curiosidades decimales exclusivas, tal es el caso de los números $\frac{1}{81}$ y $\frac{1}{89}$.

a) Arma el período de cada uno por el método ya conocido y exprésalos.

b) Coloca en "escalera" la sucesión de números naturales, comenzando con:

0,01

2 y así sucesivamente

¿Con que período de los que calculaste coincide?

c) Coloca en la escalera la sucesión de Fibonacci comenzando con el caso anterior.

¿Con que período de los que calculaste coincide?

.....

Espero que este trabajo, sólo haya sido el comienzo para invitarte a que continúes investigando sobre las aplicaciones aritméticas, numéricas, geométricas, físicas, lúdicas, etc. de las sucesiones y progresiones aritméticas y geométricas. No te olvides que, mediante algunas de ellas, conociste los números Pitagóricos y las particularidades y maravillas de los números decimales. Existen tantas como tu imaginación te lo permita.

.....

BIBLIOGRAFÍA

- ANTON BOZA, J. L.; GONZÁLEZ GACÍA, C.; LLORENTE MEDRANO, J.; MONTAMARTA PRIETO, G.; RODRÍGUEZ RODRIGO, J. A.; RUÍZ JIMÉNEZ, MA. J. - "Taller de Matemáticas - Actividades sobre formas y figuras" - Fascículo 2 - Primera edición - Narcea, S. A. De ediciones Madrid, España - 1994.
- ENCICLOPEDIA TEMÁTICA OCÉANO, Tomo 2 - Barcelona, España. 1988
- ENZENSBERGER, HANS MAGNUS - "El Diablo de los Números" - 4ª. Edición - Ediciones Siruela - Munich, Viena - 1998.

² Matemática 2000, Tomo 4, pp 251.