

DESDE EL LÁPIZ Y EL PAPEL HASTA LAS COMPUTADORAS, TRABAJANDO CON TESELADOS ¹

Silvina Cafferata Ferri – Liliana Homilka – Gerardo Mamani

"¿Cómo me gustaría aprender a dibujar mejor! Hacerlo bien requiere tanto esfuerzo y perseverancia... A veces los nervios me llevan al borde del delirio. Sólo es cuestión de batallar sin descanso con una autocrítica constante e implacable. Pienso que crear mis grabados sólo depende de querer realmente hacerlo bien. En su mayor parte algunas cosas como el talento son naderías. Cualquiera escolar con unas pequeñas aptitudes podría dibujar mejor que yo. Lo que normalmente falta es el deseo incontenible de expresarse, apretando los dientes con obstinación y diciendo:

- Aunque sé que no puedo, sigo queriendo hacerlo."

Maurits C. Escher

LA GEOMETRÍA EN LA ESCUELA

Tradicionalmente, la enseñanza de la Matemática estuvo dirigida a la resolución de operaciones, con creciente complejidad de cálculos, los que muy pocas veces son encontrados fuera de las aulas. No obstante, aún se recuerdan experiencias en las que el nivel de abstracción exigido en las clases sobrepasaba el nivel evolutivo del alumno, incluso de los más interesados.

La enseñanza de la geometría se ha visto desplazada a un segundo plano debido a la poca intensidad horaria y a la fusión con la aritmética o el álgebra dentro de la Educación General Básica, donde sólo tienen cabida el cálculo de perímetros, superficies y volúmenes. Y son muchos los hechos que podemos considerar que agravan esta situación.

Afortunadamente, la organización de eventos académicos han hecho tomar conciencia del nivel formativo que posee la Geometría, ya que permite trabajar a partir de objetos concretos, llegando a distintos niveles de conceptualización. Los niños toman posesión del espacio que los rodea, desde edad temprana, a través de la orientación, el análisis de la forma, la búsqueda de relaciones entre los objetos que encuentran a su alrededor, mediante la experimentación con las formas y los movimientos en el espacio.

¹ Sobre la base de un taller presentado en la XIII Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa. Santo Domingo, (República Dominicana), Julio 1999.

Una de las funciones de la escuela es continuar este proceso, profundizando las ideas previas con las que accede a ella.

Surge entonces la necesidad de proporcionar, de manera amena y sencilla, unas lentes que faciliten la visión de todos los procesos geométricos que diariamente se producen a nuestro alrededor. Unas lentes que no se compran en ningún sitio porque están en nuestro cerebro y que como decía Galileo, *"nos van a permitir, si no salir del laberinto, si al menos saber en qué punto del mismo nos encontramos."*

LA GEOMETRÍA EN EL ARTE

Los movimientos en el plano se hacen arte en los frisos y sobre todo en los mosaicos que rellenan el plano. Es imposible no mencionar en este punto al gran artista holandés, Maurits Escher.

Hoy en día, la obra de Escher es mundialmente conocida y aparece en multitud de lugares, desde remeras hasta portadas de libros científicos. Gran cantidad de gente conoce los grabados y litografías de Escher, aunque muchos menos podrían señalar quién es su autor.

Escher entra de lleno en el concepto de "arte matemático". Un artista figurativo que sepa algo de matemática puede hacer una composición sobre un tema matemático de la misma manera que los artistas de la Edad Media hicieron con los temas religiosos o los artistas soviéticos con los temas políticos. Escher ha escrito que con frecuencia se sentía más próximo a los matemáticos que a sus colegas los artistas. A pesar de ello, Escher no poseía estudios matemáticos extensos ni completos.

La parte fundamental de la obra de Escher la constituye la división regular del plano. Forma parte, de alguna manera, de la mayoría de sus obras. Desglosando el plano en figuras de pájaros, peces, reptiles y figuras humanas, como en un rompecabezas, Escher ha logrado incorporar muchas de sus divisiones del plano en composiciones memorables. La división regular del plano en figuras congruentes que evoquen en el observador una asociación con un objeto natural familiar, es uno de esos problemas que generan pasión.

Una de estas creaciones, los teselados, constituye un buen punto de partida para la introducción y la aplicación de los movimientos del plano.

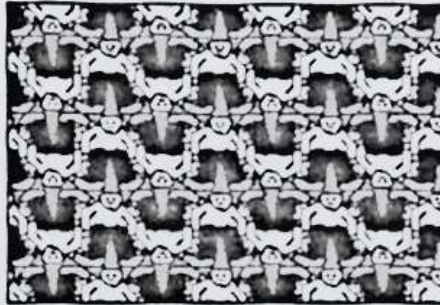
LA COMPUTADORA: UNA HERRAMIENTA PARA TRABAJAR EN EL AULA

Hoy en día, con los avances de la tecnología, encontramos en la computadora un buen recurso para trabajar con nuestros alumnos en el análisis, reproducción y creación de estos diseños, sin necesidad de grandes conocimientos informáticos. Así, la PC pasa a constituir un fuerte soporte para la formación y comprensión de conceptos, la visualización y el uso de múltiples representaciones del objeto matemático.

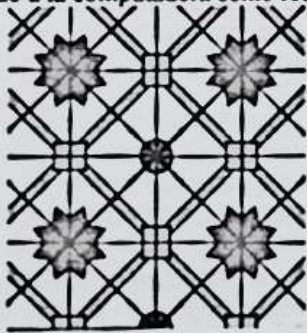
El creciente poder de las nuevas computadoras (junto a paquetes integrados y accesos a información externa), da lugar a considerarla ya sea como objeto de estudio o bien como una herramienta para el abordaje de contenidos pertenecientes a otras áreas. Con este sentido será tomada aquí: como una herramienta para la enseñanza y aprendizaje de la matemática, que permite la experimentación y descubrimiento.

Así, la propuesta pretende que el profesor de Matemática emplee la computadora como un instrumento que permita ampliar (potenciar) la capacidad de comprender y operar en/con la realidad, lo cual no debe interpretarse como un desdén de otros recursos que hasta hoy dieron buenos resultados.

Algunas actividades consisten en presentar teselados y frisos, pidiendo identificar cuáles son las figuras patrón originales y los movimientos realizados para su creación. Un ejemplo puede ser el siguiente diseño creado por nosotros:



Se comparan distintos diseños para analizar cuáles son los polígonos regulares que pueden servir de base para los cubrimientos del plano. Es interesante crear mosaicos propios a partir de estos polígonos y también de otros no regulares. Esta actividad puede llevarse a cabo tanto con lápiz y papel, como utilizando a la computadora como recurso.



Otro ejemplo de nuestros diseños

LOS TESELADOS EN EL AULA

Para la implementación en el aula de estas ideas, deberán tenerse en cuenta tanto algunos conocimientos previos tales como: primeros elementos de geometría euclidiana, concepto y clasificación de ángulos, paralelismo y perpendicularidad, polígonos y región poligonal, como el nivel en el se encuentren los alumnos en el momento de comenzar.

Estas actividades apuntan más allá de la comprensión de los conceptos que ellas enmarcan, ya que consideramos la necesidad de proporcionar elementos formativos esenciales en los estudiantes, para avanzar en el proceso cognitivo y desarrollar capacidades de validación y deducción. Nos interesa que los alumnos no sean sólo capaces de utilizar los conceptos o propiedades vistos en situaciones idénticas a las presentadas en el aula, sino que cuenten con ideas cuando se trata de resolver los mismos problemas planteados en un contexto algo diferente.

Es importante destacar que nos apoyamos, en este punto, en el aporte de los profesores holandeses Pierre Marie Van Hiele y Dina Van Hiele-Geldof, de los cuales surge el hoy reconocido modelo de Van Hiele. Este modelo establece que la comprensión de la geometría pasa por cinco formas de ver los conceptos geométricos que se denominan *niveles de razonamiento*. El progreso en la comprensión de los conceptos geométricos siempre se produce desde el primer nivel y de manera ordenada, a través de los siguientes. No es posible alterar el orden de adquisición de los niveles ya que cada uno de ellos lleva asociado un lenguaje y el paso de un nivel al siguiente se produce en forma continua y pausada.

Partimos de la manipulación de material concreto y avanzamos hasta el ordenamiento de propiedades que podrán ser captadas por los mismos alumnos. De esta manera, podemos avanzar desde el primer nivel de razonamiento planteado por el modelo de Van Hiele (reconocimiento) hasta el tercero (clasificación) alcanzando objetivos específicos en cada uno de los niveles. Las habilidades básicas son útiles para describir los procesos de asimilación y adecuación en el aprendizaje de la geometría puesto que describen en forma gradual el desarrollo mental de los alumnos. La formación matemática que así se logra es valiosa puesto que proporciona un desarrollo en la percepción visual y espacial. Puede servir como vehículo para estimular y ejercitar habilidades generales de pensamiento y capacidades para la resolución de problemas.

La habilidad visual manifiesta características específicas desde los primeros niveles de razonamiento. El reciente desarrollo tecnológico ha hecho que resurja el interés por utilizar las técnicas visuales como uno de los principales elementos de apoyo al proceso de enseñanza-aprendizaje. Se consideran un fuerte soporte para la formación y comprensión de conceptos, la visualización y el uso de múltiples representaciones de un objeto matemático.

El ejercicio de la visualización y la representación y comparación de figuras en diferentes posiciones, permite el desarrollo del sentido espacial que parece necesario para interpretar, comprender y apreciar la geometría.

En las primeras actividades se analizará el desarrollo de estas habilidades, visualizando los diferentes movimientos geométricos, tanto para el reconocimiento de figuras trasladadas o rotadas, por ejemplo, como para la realización de los mismos.

En un segundo nivel, las actividades pretenderán que se empleen correctamente conceptos geométricos en el descubrimiento y análisis informal de los elementos y características de cada uno de los movimientos geométricos. Es importante aquí la justificación de las respuestas, y la discusión y acuerdo grupal de las características encontradas.

Un nivel superior a este, planteará actividades que pretenden la toma de conciencia de la relación existente entre la figura inicial, la transformación efectuada y la figura final.

No siempre se podrá llegar a los niveles superiores que plantea el modelo de Van Hiele. Pero, de todos modos, debemos dejar expuesta la importancia que tiene la validación formal de situaciones geométricas.

COMENTARIOS FINALES

Si bien elegimos en esta ocasión el tema de mosaicos para trabajar, todos sabemos que no es esta la única elección importante, sino también su implementación y análisis. Las actividades están orientadas a dominar las transformaciones geométricas y aplicarlas en la construcción de teselados.

Referencias bibliográficas:

- CAFFERATA FERRI, S. - HOMILKA, L. - MAMANI, G. (1998): *Una experiencia en la elaboración de software educativo y su aplicación en el aula*. XII Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa, Santafé de Bogotá.
- GUTIERREZ SANTOS, M. V. (1992): *Notas de Geometría*. Santafé de Bogotá, Universidad Nacional de Colombia.
- JAIME PASTOR, A. - GUTIERREZ RODRIGUEZ, A. (1996): *El grupo de las isometrías del plano*. Madrid, Síntesis.
- PAPPAS, T. (1996): *El encanto de la Matemática*. Madrid, Zugarto Ediciones.
- SANTALÓ, L. (1992): *Temas nuevos en la enseñanza de la Matemática en un nivel secundario. Elementos de Matemática*. Vol. VII, N°26 (pp. 11-28). Buenos Aires, CAECE.
- SPIEGEL, A. (1997): *La escuela y la computadora*. Buenos Aires, Ediciones Novedades Educativas.
- VILLELLA, J. - CRESPO CRESPO, C. - PONTEVILLE, Ch. (1998): *Cuando la Geometría es el tema de la reflexión matemática*. Buenos Aires, UNSAM.