

## GEOMETRÍA EN ACCIÓN...

*Norma S. Cotic*

*Nivel: EGB, Polimodal, Terciario  
C. electrónico: ncotic@sinectis.com.ar*

La geometría es la rama de la matemática que proporciona a los alumnos las mejores oportunidades de explorar su entorno, investigar situaciones en dos y tres dimensiones, construir y modelizar situaciones, conjeturar sobre patrones y generalizaciones, desarrollar destrezas espaciales, utilizar materiales manipulativos y tecnológicos, para considerar distintos enfoques y soluciones en la exploración de problemas.

En el proceso de aprendizaje de esta rama de la matemática es importante plantear situaciones que motiven a los alumnos, para que trabajen con más entusiasmo en la búsqueda de respuestas nuevas, fundamentadas y enriquecidas por el aporte de la discusión grupal y la toma de decisiones consensuada.

La dinámica de las actividades y el tema que se propone: mosaicos, teselación del plano, permite incorporar conceptos geométricos accesibles y reforzar los conocimientos previos que se requieren espontáneamente de acuerdo al grado de profundización que se desee y que queda a criterio del docente.

La utilización de los recursos informáticos han facilitado la investigación y verificación de las temáticas propuestas, favoreciendo la creatividad e imaginación en la producción de teselados con polígonos regulares o no y figuras transformadas.

### **Actividad I**

**Recursos materiales:** Polígonos regulares en papel u otro material: triángulos, cuadrados, hexágonos, etc., papel transparente, lápices de colores. Dibujos o fotografías con teselaciones. Programas de diseño. Lenguaje LOGO. Internet.

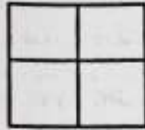
Después de observar en el entorno cotidiano las decoraciones que cubren el plano con combinaciones de distintos polígonos y figuras, los que se pueden registrar en dibujos, fotografías o recortes, se propone a los alumnos encontrar los polígonos regulares que cubren el plano sin dejar huecos y sin superponerse (Teselación del plano)

Nota: los polígonos recortados pueden ser provistos por el docente o confeccionados por los alumnos, como una actividad complementaria.

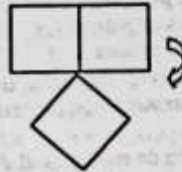
**Orientación didáctica:** La forma de desarrollar estas actividades es abierta, los alumnos utilizan distintas estrategias para la búsqueda de las figuras que cumplen con las condiciones necesarias para teselar el plano, a través de la manipulación de los polígonos recortados y la visualización de imágenes creadas por ellos. Posteriormente, con la estimulación y colaboración del docente que interviene sólo cuando se lo requiere, lograrán la formalización de propiedades esenciales que verifican los

polígonos elegidos y las generalizaciones que permiten reconocer los distintos tipos de teselados. Los alumnos, inicialmente experimentan con el cuadrado, algunos utilizan cuatro cuadrados para colocar uno junto al otro mientras que otros dibujan el contorno de un cuadrado que gira, manteniendo un vértice fijo. En ambos casos la visualización final es la misma.

Con cuatro cuadrados

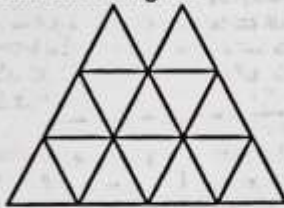


Con un cuadrado que se traslada o gira

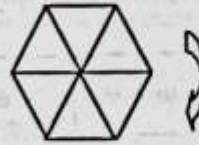


Luego continúan con otros polígonos regulares con las mismas estrategias de construcción, aunque la visualización es distinta según los grupos.

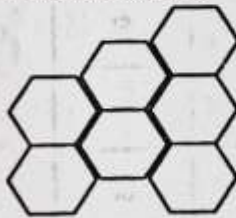
Con varios triángulos



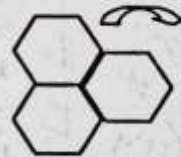
Con un triángulo que gira con centro en uno de sus vértices



Con varios hexágonos



Con un hexágono que gira



De la observación de sus producciones, los alumnos comienzan a detectar ciertas características, así observan que:

- En cada vértice concurren por lo menos tres ángulos.
- La suma de los ángulos que concurren en un vértice suman  $360^\circ$ , por lo tanto se puede anticipar cuáles son los polígonos regulares que pueden teselar el plano.

Para confirmar las conjeturas que surgen en el proceso manipulativo se orienta a los alumnos en la confección de una tabla referente que permite además fortalecer los conceptos previos y adquirir

nuevos. Entre ellos:

- Reconocimiento de polígonos regulares y sus nombres.
- Cálculo de ángulo interior, exterior, suma de ángulos interiores, suma de ángulos exteriores.
- Construcción de polígonos regulares, con distintos métodos.
- Cálculo y comparación de áreas y perímetros de polígonos.
- Reconocimiento de polígonos equivalentes.
- Operar con unidades angulares.
- Isometrías en figuras planas.
- Movimientos en el plano: reflexión, traslación, giros.
- Visualización y representación espacial y plana.


Para la construcción de mosaicos el docente y los alumnos pueden utilizar:

Programas de diseño: Kid Pix, Paint, Corel Draw, etc.

Otros programas específicos que pueden obtenerse por Internet: Tessellations

El lenguaje LOGO que permite la exploración a través de órdenes dadas a la tortuga (medio de comunicación e interacción), de temáticas relevantes como los conceptos de medida, estimación, recursividad, variable, repetición, azar, etc. (no se incorporan ejemplos en este artículo).

TABLA DE REFERENCIA

Polígono Regular	Construcción	Nº de triángulos	Suma de ángulos interiores	Valor del ángulo interior	Tesela el plano
Triángulo		1	$1 \times 180^\circ$	$180^\circ / 3 = 60^\circ$	Sí
Cuadrado		2	$2 \times 180^\circ$	$360^\circ / 4 = 90^\circ$	Sí
Pentágono		3	$3 \times 180^\circ$	$540^\circ / 5 = 108^\circ$	No
Hexágono		4	$4 \times 180^\circ$	$720^\circ / 6 = 120^\circ$	Sí
Octógono		6	$6 \times 180^\circ$	$1080^\circ / 8 = 135^\circ$	No

De acuerdo a la observación y a los datos de la tabla se concluye que el plano se puede teselar con triángulos equiláteros, cuadrados y hexágonos regulares dando origen a los llamados:

"teselados regulares".

La notación para identificarlos es: teselado cuya unidad es el cuadrado 4.4.4.4, porque concurren

cuatro cuadrados en cada vértice.

Teselado con triángulos: 3.3.3.3.3.3. Teselado con hexágonos regulares: 6.6.6.

La condición para teselar el plano es que la suma de los ángulos que concurren en un punto es  $360^\circ$ .

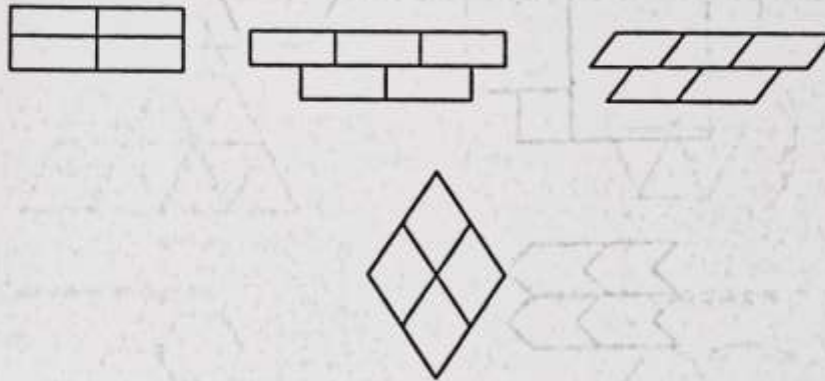
### Actividad 2

Con la condición anterior surge el deseo de investigar otras posibilidades de teselar el plano.

Utilizando figuras que no sean necesariamente regulares o por combinación de diferentes polígonos.

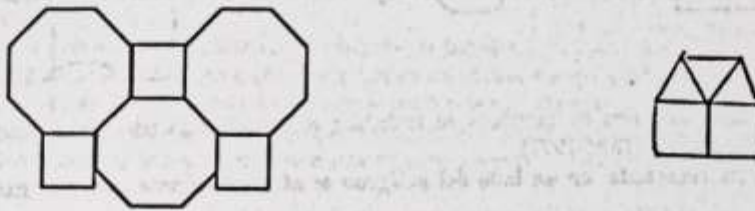
Del trabajo en grupo surgieron variados modelos de teselados, dando la posibilidad de mover en el plano las figuras, componer y descomponer mosaicos, y de acuerdo a las características, agruparlos por convención de la siguiente forma

**Grupo 1:** Formados por polígonos que tienen "alguna regularidad", como rectángulos (ángulos congruentes), rombos (lados congruentes), triángulos isósceles, paralelogramos.



En algunos casos los polígonos se agrupan alrededor de un vértice y en otros se trasladan.

**Grupo 2:** Formados por distintos polígonos regulares siempre que los de cada clase sean del mismo tamaño y que los lados de todos los polígonos sean de igual longitud.



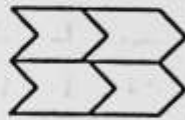
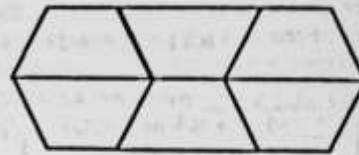
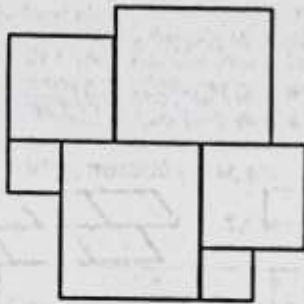
La notación para identificar los ejemplos es 3.3.3.4.4 (tres triángulos equiláteros y dos cuadrados) o 4.8.8 (un cuadrado y dos octógonos).

Aparecen los mosaicos semirregulares, que según Claudi Alsina (Geometría Dinámica), son los que tienen la misma distribución de los polígonos regulares alrededor de cualquier vértice del mosaico. Pueden identificarse cuando se obtiene el mismo polígono al unir los puntos medios de los lados de los polígonos que concurren en cada vértice.

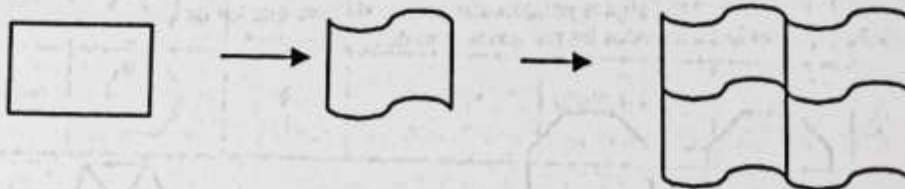
Existen 8 mosaicos semirregulares posibles. Entre ellos los identificados por (3.3.3.3.6), (3.12.12), (4.6.12). Que pueden visualizarse con el material propuesto.

**Grupo 3: Utilizando polígonos semejantes**

**Grupo 4: Utilizando otros polígonos**



**Grupo 5: Con polígonos modificados**



Para construir este tipo de mosaicos se introduce el método utilizado por el célebre artista holandés Maurits Escher (1898-1972).

-Toda parte recortada en un lado del polígono se añade mediante una traslación al lado

**opuesto-**

Para profundizar este tema y visualizar las maravillosas obras del artista se sugiere a los docentes ingresar por Internet a sitios como:

[www.artico.com/escher/mosaicos.htm](http://www.artico.com/escher/mosaicos.htm)

Páginas de Yahoo: The World of Escher, M.C. Escher Gallery y otras.

**Orientación teórica.** Para determinar las distintas posibilidades de teselación con polígonos regulares se considera que el ángulo interior de un polígono regular de  $n$  lados se obtiene por la expresión  $180^\circ \cdot (n - 2) / n$ . Entonces pueden utilizarse:

Tres polígonos regulares diferentes de  $a$ ,  $b$ ,  $c$  lados, cuyos ángulos interiores concurren en un vértice y cumplen que  $\rightarrow 180^\circ \cdot (1 - 2/a) + 180^\circ \cdot (1 - 2/b) + 180^\circ \cdot (1 - 2/c) = 360^\circ$

Simplificado queda:  $1/a + 1/b + 1/c = 1/2$ , esta ecuación tiene soluciones enteras que dan el número de lados de cada uno de los polígonos regulares que intervienen en un teselado. Existen 10 soluciones. Ejemplos: (6.6.6), (5.5.10), (4.5.10), (4.6.12).

Cuatro polígonos regulares:  $1/a + 1/b + 1/c + 1/d = 1$  da cuatro soluciones. Ej. (3.3.4.12)

Cinco polígonos regulares:  $1/a + 1/b + 1/c + 1/d + 1/e = 3/2$  da dos soluciones. Ej. (3.3.3.4.4)

Seis polígonos regulares:  $1/a + 1/b + 1/c + 1/d + 1/e + 1/f = 2$  da una solución. Ej. (3.3.3.3.3.3)

Hay 17 posibles teselaciones, de las cuales sólo tres son regulares.

**BIBLIOGRAFÍA**

- ALSINA Claudi, PÉREZ Rafael y RUÍZ Ceferino. *Simetría Dinámica*. Síntesis, Madrid 1989.
- ALSINA Claudi, BURGÚÉS C. y FORTUNY J. *Invitación a la Didáctica de la Geometría*. Síntesis, Madrid 1987.
- BERMEJO A. *Materiales didácticos. Decorando el plano*. Sigma Nº 17
- PÉREZ Rafael. *Construir la Geometría*, UNO Nº2 - 1994
- SANTALÓ Luis. *La Geometría en la Formación de Profesores*. Red Olímpica 1993
- KENNEY Margaret y STANLEY B. *Tessellations Using LOGO*. Seymour Publications. Calif. USA
- Estándares Curriculares SAEM THALES