UN PROBLEMA SIN RESOLVER PARA LOS FILÓSOFOS DE LA ANTIGÜEDAD

Graciela Lira de Carlorosi

En el siglo V el dialéctico Xenón propuso un problema "La paradoja de Aquiles y la tortuga", al parecer trivial, pero cuando Zenón lo analiza resulta con particular dificultad que los filósofos de la antigüedad y aún en la Edad Media no se pudo resolver.

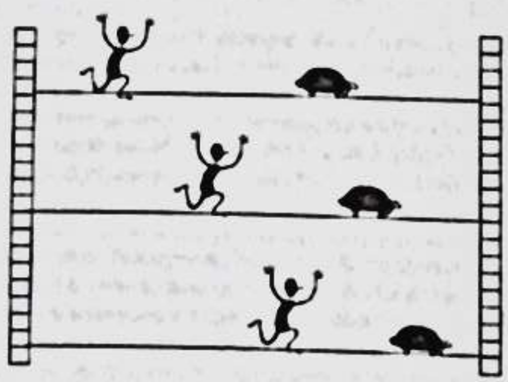
El "problema" consiste en analizar la carrera ideal de Aquiles, llamado "de los pies ligeros" en la Iliada, quien se empeña en la persecución de una tortuga. Al razonar, partiendo del hecho que la tortuga le lleva una ventaja de 100 m y que se desplaza diez veces más despacio que él, cuando corre para alcanzar5la, en ese tiempo la tortuga se desplazó 10 m, siendo la distancia que ahora los separa. En el segundo trayecto Aquiles recorre 10 m y la tortuga la décima parte, o sea 1m, ésta tiene recorrido 111 m y Aquiles 110, en el siguiente la tortuga 111,1 y Aquiles solo 111 y luego 111,11 y 111,1 respectivamente. ¿En definitiva podrá Aquiles estar en la misma posición de la tortuga?.

Como vemos, entre las trayectorias siempre quedará una diferencia pequeña, pero positiva, que el la décima parte del recorrido anterior de Aquiles. Ni en sucesivas etapas llegaría Aquiles a superar la ventaja del lento animal.

Por lógica pensaríamos que siendo Aquiles diez veces más veloz, esta ventaja sería fácilmente superada. Este planteo fue un real "problema" para los antiguos, que no podían entender como al perseguir a alguien que va más lento no se lo pueda alcanzar, así fue un problema sin resolver en la antigüedad, hasta que fue solucionado fácilmente gracias al uso de series.

Razonando las etapas y considerando la diferencia inicial entre ambos protagonistas expresamos:

$$S_0 = 100, \; S_1 = 100 + 10, \; S_2 = 100 + 10 + 1, \; S_3 = 100 + 10 + 1 + 0{,}1$$



En las etapas sucesivas los términos que se añaden a la suma son:

$$0.01, \; 0.001, \; 0.00001, \; 0.000001, \ldots$$

Si continuamos con el cálculo hasta la octava etapa, lo que separa a la tortuga de Aquiles no es más que una micra, es lo que avanzó la tortuga mientras Aquiles recorre 0.00001 m. Sería interesante pensar qué pasa cuando se calcule $S_{1\,000\,000}$, pero ¡qué complejo sería realizarlo!.

Tal vez por otro camino, observando la sucesión de trayectos recorridos por la tortuga

100, 10, 1, 0.1, 0.01, 0.0001, ... es una progresión geométrica de razón 0,1.

La suma de estos primeros seis términos es:

$$S = 100\ \frac{1-(0.1)^6}{1-(0.1)} \qquad (1)$$

S = 100 x 1.11111 **S = 111.111** lo comprobamos sumando los términos anteriores.

Pero lo que interesa es la suma S_∞ no para 6, 1000, 1.000 000 términos de la progresión, por lo que el término que influye es $(0.1)^n$, para hallar esta suma infinita, calculemos el límite de la expresión (1).

$$\left(\frac{1}{10}\right)^n \qquad S = 100\frac{1-\left(\frac{1}{10}\right)^n}{1-\frac{1}{10}}$$

cuando n crece indefinidamente se va haciendo cada vez más pequeño,

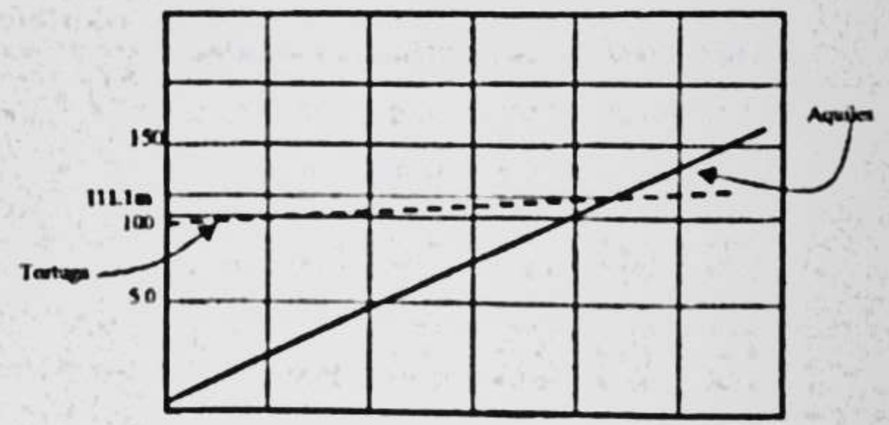
pudiendo llegar a ser más pequeño que cualquier número dado para un determinado valor de n, por lo que podemos decir que en el límite es cero, entonces

$$S_\infty = 100\frac{1-0}{\frac{9}{10}}$$

$$S_\infty = 100\left[\frac{\frac{10}{10}}{\frac{9}{10}}\right] \qquad S_\infty = 100\left[\frac{10}{9}\right] \qquad S_\infty = \frac{1000}{9}$$

Es este el valor de la serie $\frac{1000}{9}$ m donde Aquiles encontrará a la tortuga, es un valor exacto.

Los antiguos por lógica sabían que debía producirse el encuentro y en forma rápida pero por el atraso de la matemática fracasaron en la resolución, no conocían el cálculo de límite.



Tiempo transcurrido