



# EL DESARROLLO DE LA DIDÁCTICA DE LAS MATEMÁTICAS, UNA MIRADA INTERNACIONAL<sup>1</sup>

*THE DEVELOPMENT OF MATHEMATICS EDUCATION RESEARCH,  
AN INTERNATIONAL PERSPECTIVE*

Michèle Artigue, [michele.artigue@univ-paris-diderot.fr](mailto:michele.artigue@univ-paris-diderot.fr)  
*Université de Paris, Laboratoire de Didactique André Revuz,  
Paris, France*

## RESUMEN

Este artículo trata del desarrollo internacional de la investigación didáctica en matemáticas. Después de recordar la relación especial que existe entre las matemáticas y su enseñanza, evoca en primer lugar la emergencia de la didáctica de las matemáticas como un campo de investigación específico, en un contexto marcado por la reforma de las matemáticas modernas y la influencia de la epistemología piagetiana. A continuación, se examina la evolución de este campo de investigación, centrándose en algunas tendencias globales que trascienden su diversidad inherente, antes de abordar más específicamente la cuestión de las relaciones entre centros y periferias, y destacar la lenta pero real evolución hacia una didáctica de las matemáticas más auténticamente internacional.

## PALABRAS CLAVE:

*Didáctica de las matemáticas; Educación Matemática; desarrollo internacional de la investigación didáctica.*

## ABSTRACT

This article addresses the international development of research in mathematics education. After reviewing the special relationship existing between mathematics and mathematics education, this work first recalls the emergence of the didactics of mathematics as a specific field of research, in a context marked by the New Math reform and the influence of Piagetian epistemology. It then considers the evolution of this field of research, focusing on some global trends that transcend its inherent diversity, before addressing more specifically the question of the relationship between centers and peripheries in mathematics education, and highlighting the slow but real evolution towards more authentically international didactics of mathematics.

## KEYWORDS:

*Didactics of mathematics; Mathematics Education; international development of didactic research.*

<sup>1</sup>Este artículo se basa en el capítulo de libro (Artigue, 2018).

## 1. Matemáticas y Educación Matemática: unas relaciones específicas

Como han señalado varios historiadores de las matemáticas y de su enseñanza (véase, por ejemplo, Belhoste, 1998; Gispert, 2008), no cabe duda de que esta disciplina tiene una relación especial con su enseñanza. De hecho, más que otros campos del conocimiento humano, el desarrollo de las matemáticas como ciencia y su enseñanza han estado estrechamente ligados a lo largo de los siglos. Es común subrayar el papel que jugó el curso de Augustin Cauchy en la Escuela Politécnica en la reorganización y fundación del campo del análisis matemático a principios del siglo XIX, pero este es solo un ejemplo entre muchos. Hélène Gispert, en su estudio dedicado a las influencias cruzadas de las esferas social, escolar y académica entre 1860 y 1930 a través de tratados y libros de texto (Gispert, 2008), subraya por ejemplo el papel desempeñado por el curso de Ulysse Dini en la Universidad de Pisa y el primer tratado moderno sobre las funciones de una variable real que él publicó en 1878, en el desarrollo de este campo de investigación en Italia. También subraya el papel que desempeñó en Francia la colección de obras sobre la teoría de las funciones iniciada por las *Leçons sur la théorie des fonctions* (Lecciones sobre la teoría de las funciones) de Emile Borel a partir de su enseñanza en la Escuela Normal Superior. Esta colección, que se enriqueció con una veintena de volúmenes en unos quince años, basados en los cursos impartidos en el Collège de France o en la Sorbona por brillantes analistas, tanto franceses como extranjeros, puso al alcance de la comunidad matemática los más recientes desarrollos de la investigación en este campo. También contribuyó a legitimar e institucionalizar esta nueva investigación sobre las funciones basada en la teoría de los conjuntos en un momento en que, como también señala Gispert, seguía habiendo, por ejemplo, en Francia, cierta reticencia hacia ella.

Igualmente Belhoste, en su texto antes mencionado, utilizando varios ejemplos –Alemania, Francia, Italia– muestra que la constitución e institucionalización de una comunidad matemática en estos países ha estado estrechamente ligada al desarrollo de instituciones educativas para esta disciplina. En el capítulo dedicado a la tradición didáctica francesa del libro resultante del grupo temático del congreso ICME-13 (International Congress of Mathematics Education) (Artigue et al., 2019), también hemos destacado la participación histórica de algunos de los más eminentes matemáticos franceses en cuestiones de enseñanza, mencionando en particular el papel de Nicolás de Condorcet, quien presidió el Comité de Educación Pública en los primeros años de la Revolución francesa,

y la implicación de matemáticos como Joseph-Louis Lagrange, Pierre-Simon de Laplace, Gaspard Monge y Adrien-Marie Legendre en ese momento. Luego, a principios del siglo XX, mencionamos la participación de matemáticos como Emile Borel, Gaston Darboux y Henri Poincaré en la importante reforma del liceo de 1902, con Darboux presidiendo la comisión encargada de la renovación curricular, y a mediados de la década de 1930, cuando jóvenes matemáticos crearon el famoso grupo Bourbaki, para renovar la enseñanza del cálculo diferencial e integral para la licenciatura en matemáticas.

Por lo tanto, no es sorprendente que fuera en matemáticas y con ocasión de un congreso internacional de matemáticos (el quinto, en 1908) que se creó la primera organización internacional, llamada entonces CIEM (*Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique*) en francés, dedicada a la enseñanza de una disciplina. Actualmente, esta organización se conoce por su acrónimo en inglés ICMI (International Commission on Mathematical Instruction) modificado después de la Segunda Guerra Mundial. Esta creación fue, de hecho, el resultado de una propuesta de David Eugene Smith, historiador de las matemáticas y profesor de la Universidad de Columbia, documentada en 1905 en la nueva revista *L'Enseignement Mathématique*, fundada en 1899 por Henri Fehr y Charles-Ange Laisant, que se convertiría en el órgano oficial de la CIEM (Coray, Furinghetti, Gispert, Hodgson y Schubring, 2003). La misión encomendada a la CIEM, cuya presidencia fue confiada al matemático alemán Felix Klein, él mismo muy implicado en cuestiones de educación y formación de profesores (véase Weigand, McCallum, Menghini, Neubrand y Schubring, 2019), hizo un estudio global del progreso de la Educación Matemática en las diferentes naciones. En respuesta a ello, se establecieron comités nacionales en los 18 países miembros y 15 países asociados, entre los que figuraban, para América Latina, Argentina, Brasil, Chile, México y Perú. En unos pocos años, antes de que la Primera Guerra Mundial y sus secuelas la dejaran en suspenso, la CIEM elaboró más de 300 informes sobre una amplia variedad de temas que iban desde la enseñanza de áreas matemáticas específicas, como el cálculo diferencial e integral, que entonces se estaba generalizando en el nivel secundario, hasta la formación de profesores o futuros ingenieros (Schubring, 2008). Sin embargo, no se trataba de investigación didáctica como la entendemos hoy en día. Aunque existieron muchos trabajos precursores como los mencionados en Kilpatrick (2020), no fue hasta después de la Segunda Guerra Mundial y el período de las matemáticas modernas que el campo de la Educación Matemática se convirtió en

un verdadero campo de investigación científica. La segunda sección se dedicará a la emergencia de este campo de investigación.

## 2. La emergencia de un campo de investigación específico

La emergencia de este campo de investigación está bien documentada (véase, por ejemplo, Kilpatrick, 1992, 2020, o Dorier, 2018 para la didáctica francófona). Me limitaré aquí a recordar algunos elementos claves del contexto de su aparición y algunas características de este nuevo campo de investigación. En primer lugar, el contexto es el de la posguerra, con la competición científica que tiene lugar entre los bloques del Oeste y del Este; la necesidad que se siente de una profunda renovación de los contenidos y las prácticas de la enseñanza de las matemáticas y, más en general, de la enseñanza de las ciencias; el desarrollo de la epistemología genética de Jean Piaget y la visión constructivista del aprendizaje asociada y, más globalmente, la influencia del estructuralismo que afecta tanto a las ciencias duras como a las ciencias humanas. En este contexto, las limitaciones de los estudios y comparaciones como los que tradicionalmente realizaba la CIEM aparecen más y más evidentes. Como bien se explica en Menghini, Furinghetti, Giacardi y Arzarello (2008), esto condujo en 1957 a la creación de una nueva organización internacional, la CIEAEM (*Commission Internationale pour l'Étude et l'Amélioration de l'Enseignement des Mathématiques*), por iniciativa del psicólogo y educador Caleb Gattegno. Piaget es miembro fundador, al igual que los matemáticos André Lichnerowicz y Gustave Choquet, y los profesores Emma Castenuovo, Sofia Krigovska, Lucienne Felix y Tamás Varga. Luego, bajo el impulso de su presidente Hans Freudenthal, la ICMI también entró en acción, con la creación de la revista *Educational Studies in Mathematics* en 1968 y la organización del primer congreso ICME en Lyon en 1969. Posteriormente en 1976, después del ICME-3 se crearon los dos primeros grupos de estudio afiliados a la ICMI: HPM (Historia y Pedagogía de las Matemáticas) y PME (Psicología de la Educación Matemática). El segundo se dedica especialmente a la investigación y su nombre muestra la estrecha relación de la investigación de la época con el campo bien establecido de la psicología, una relación también claramente visible en las obras precursoras.

La investigación de la época se centraba principalmente en los alumnos y su aprendizaje. En los países que más contribuyeron a los intercambios internacionales en esa época, la visión del aprendizaje estuvo fuertemente influenciada por la epistemología

piagetiana. La enseñanza se considera un proceso de adaptación ante situaciones problemáticas, y se hace hincapié en las rupturas y reestructuraciones cognitivas que requieren esas adaptaciones. Se expresa en los conceptos utilizados, ya sea la noción de obstáculo epistemológico, tomada del filósofo Gaston Bachelard, o las nociones de *misconception*, obstáculo o conflicto cognitivo. También, observamos la aparición temprana de taxonomías para dar cuenta de los desarrollos cognitivos, como la elaborada ya en 1958 por Pierre y Dina van Hiele que distinguía cinco niveles en el aprendizaje de la geometría, una taxonomía que se utiliza hasta hoy en día (Pegg, 2020). Además, surgen distinciones que expresan diferentes tipos de relación con el conocimiento matemático y ponen de relieve los límites de la enseñanza convencional, como la distinción hecha por Richard Skemp (1976) entre conocimiento instrumental y relacional. La investigación, en esta fase emergente, se está desarrollando particularmente a nivel de la escuela básica. Esto es claramente visible en Francia con el papel esencial que desempeñan las investigaciones llevadas a cabo por Guy Brousseau y sus colegas en la escuela primaria Michelet asociada al COREM, que es el Centro de Observación para la Investigación sobre la Enseñanza de las Matemáticas (Brousseau, 2008).

No obstante, a pesar de estas tendencias comunes, el campo de investigación en Educación Matemática ya es muy diverso en ese momento. Esta diversidad es incluso visible si uno se limita a países con contextos a priori similares. La investigación que llevamos a cabo como preparación para la jornada temática en el ICME-13 sobre las tradiciones didácticas alemana, francesa, italiana y holandesa, cuatro tradiciones que, como otras en Europa continental, utilizan el término didáctico para denominar este campo de investigación, lo demuestra claramente (Blum, Artigue, Mariotti, Strässer y Van den Heuvel-Panhuizen, 2019).

A continuación, me limitaré a mencionar brevemente el caso de las tradiciones francesa y holandesa, remitiendo al lector interesado al propio libro para obtener más detalles. Estas dos tradiciones tienen en común la característica de basarse en una profunda reflexión sobre las matemáticas y su epistemología. Comparten la visión de las matemáticas como una construcción humana elaborada para responder a problemas, tanto matemáticos como extramatemáticos. Comparten la visión de que la enseñanza tradicionalmente impartida corresponde a una inversión epistemológica, presentando el conocimiento en una forma quizás simplificada pero acabada, ocultando los caminos que históricamente lo han hecho emerger como respuesta a necesidades

y problemas. Además, estas dos tradiciones se han desarrollado de manera particularmente coherente desde los años setenta, siendo esta coherencia aún más visible para la tradición holandesa. Esta última está anclada en la fenomenología didáctica de Freudenthal, mientras que la tradición francesa, inicialmente dominada por la teoría de las situaciones de Brousseau, se ha ido diversificando progresivamente sin dejar de estar fuertemente influenciada por esta teoría. En ambas tradiciones, también, el diseño didáctico juega un papel esencial. Sin embargo, estas dos tradiciones son sustancialmente diferentes. Desde el principio, la didáctica francesa se ha fijado la ambición de ser una ciencia fundamental y aplicada. Ha dado prioridad a la comprensión de los complejos y entrelazados procesos de enseñanza y aprendizaje, al funcionamiento y la ecología de los sistemas didácticos y la identificación de los fenómenos didácticos, considerándolo un requisito previo para la acción razonada sobre estos sistemas. La tradición holandesa, teorizada hoy en día en términos de *Realistic Mathematics Education* (RME), corresponde a una construcción diferente puesta muy pronto al servicio de la producción de teorías locales de aprendizaje en diversos dominios, y de recursos para la enseñanza. Las teorías locales y los recursos se desarrollan en estrecha interacción, de manera pragmática e iterativa. Se basan en un principio de reinención guiada de las matemáticas por los alumnos y en un doble proceso de matematización, horizontal y vertical, a partir de situaciones radicadas en la realidad de los alumnos; esta realidad se va poblando progresivamente de objetos matemáticos. La propia teoría RME se presenta como un conjunto coordinado de principios de diseño y, por lo tanto, tiene una estructura muy diferente de la teoría de las situaciones y, más en general, de las construcciones teóricas de la didáctica francesa. Estas diferencias, por supuesto, influyen en los tipos de conocimiento que producen los investigadores que se refieren a una u otra de estas tradiciones, y las funciones que atribuyen a estos conocimientos. Sin embargo, dichas diferencias no impiden que se desarrollen colaboraciones fructíferas, como lo demuestra, por ejemplo, el trabajo conjunto de Luc Trouche y Paul Drijvers (2010) sobre la noción de orquestación instrumental.

### 3. Evoluciones convergentes y prometedoras

Tras destacar algunos rasgos del surgimiento de este campo de investigación y la diversidad que estuvo presente en él muy pronto pero que creció sin cesar a lo largo de los decenios, reflejando la diversidad de los sistemas de educación y de las culturas, y las historias particulares que les han dado forma, mencionaré en esta sección algunas evoluciones convergentes y prometedoras.

#### 3.1 La creciente atención prestada a las dimensiones sociales y culturales de la enseñanza y el aprendizaje

Esta evolución, ya muy avanzada en el siglo pasado, ha sido descrita a menudo como un “giro sociocultural” en referencia a Lerman (2000). Se ha caracterizado, en términos de referencias psicológicas, por un cambio de la referencia inicialmente dominante de la epistemología piagetiana a la obra de Vygotsky y sus sucesores. Según el contexto, se ha expresado mediante diversas construcciones teóricas, entre ellas, sin pretender ser exhaustivo, la teoría antropológica de la didáctica (TAD) (Chevallard, 2019), la teoría de la objetivación (Radford, 2019), la socioepistemología, actualmente de gran influencia en América Latina (Cantoral 2013), y las diversas variaciones desarrolladas a partir de la teoría de la actividad de Leontiev, por ejemplo, la *Cultural Historical Activity Theory* (CHAT) (Roth & Lee, 2007). También se caracterizó por una mayor atención a las cuestiones de equidad, desigualdad y justicia social. Así pues, el pensamiento del pedagogo brasileño Paulo Freire ha sido una fuente de inspiración para muchos investigadores y, en particular, ha inspirado el desarrollo del movimiento de educación matemática crítica (Skovsmose, 1994). Es también en América Latina donde surgió el campo de la etnomatemática, ahora plenamente reconocido, por iniciativa de Ubiratan d'Ambrosio, que recibió la Medalla Felix Klein de la ICMI por su obra de investigador y especialmente por su papel en este surgimiento (D'Ambrosio, 2008).

#### 3.2 La creciente atención prestada a las dimensiones discursivas y semióticas de los procesos de enseñanza y aprendizaje

Esta creciente atención prestada a las dimensiones semióticas y discursivas de los procesos de enseñanza y aprendizaje es una segunda tendencia fuerte. La conciencia de la dimensión eminentemente social del aprendizaje de las matemáticas ha llevado necesariamente a prestar una mayor atención a los intercambios discursivos dentro del aula. Los investigadores han utilizado instrumentos de lingüística o semiótica social con ese fin, como, por ejemplo, en el caso de Candia Morgan (2006), o han elaborado enfoques específicos. Una construcción cada vez más influyente es la desarrollada por Anna Sfard conocida como “comognición” (2008), por la cual recibió la Medalla Hans Freudenthal de la ICMI. Como explica en la entrada asociada de la segunda edición de la *Encyclopedia of Mathematics Education* (Sfard, 2020), la comognición se basa en la idea de que el pensamiento puede modelarse útilmente como comunicación con sí mismo. En una visión no dualista de la cognición humana, las matemáticas se

conciben como “a historically established discourse” y su aprendizaje como “becoming a participant in this special form of communication” (Sfard, 2020, p. 95).

La sensibilidad a la dimensión semiótica del aprendizaje no es en absoluto reciente, como lo demuestran, por ejemplo, las investigaciones desarrolladas por Raymond Duval desde los años ochenta (Duval, 1995). Sin embargo, esta sensibilidad ha crecido mucho a principios de este siglo, ejemplo de ello son los dos números especiales publicados por la revista *Educational Studies in Mathematics* (Radford, Schubring y Seeger, 2011; Saenz-Ludlow y Presmeg, 2006). Este crecimiento está impulsado en parte por los avances tecnológicos que han ampliado considerablemente el espacio de las representaciones disponibles para acceder a los objetos matemáticos, esencialmente abstractos, los medios de acción sobre estas representaciones, así como los medios de interacción dinámica entre estas. Basta pensar cómo programas informáticos ampliamente utilizados como GeoGebra permiten hoy en día trabajar con objetos funcionales, articulando representaciones a través de tablas de valores, representaciones gráficas, expresiones algebraicas, cálculo exacto y aproximado, y permitiendo visualizar dinámicamente, gracias a deslizadores, el efecto de la variación de parámetros sobre las funciones de una misma familia, polinómicas, sinusoidales o exponenciales.

La atención se ha ampliado también, más allá de los sistemas clásicos de representación, a los gestos que los medios tecnológicos permiten registrar y estudiar con gran sutileza, y más en general a la llamada dimensión “encarnada” de la cognición. Más allá de referencias bien establecidas, como las que tratan la teoría semiótica de Duval basada en la noción de registro de representación semiótica, los enfoques semióticos se han multiplicado y se han hecho multimodales, como lo demuestra, por ejemplo, el papel fundamental que desempeña la noción de *semiotic bundle* en el enfoque semiótico APC (Acción, Producción, Comunicación) desarrollado por Ferdinando Arzarello (2008).

Por supuesto, estos desarrollos no son independientes del mencionado en el apartado 3.1. Esto queda claro, por ejemplo, en la teoría de mediación semiótica desarrollada por Mariolina Bartolini Bussi y Maria Alessandra Mariotti (2008), que se basa en una visión de los artefactos como instrumentos de mediación semiótica inspirada directamente en la obra de

Vygotsky, o en la teoría de la objetivación de Radford ya señalada, en la que la semiótica también ocupa un lugar central. Esto también queda claro cuando Marcelo Borba, para romper con la habitual visión dicotómica de la relación entre los humanos y la tecnología –inspirándose en las ideas de Tikhomirov y Lévy– introduce el concepto de “humanos-con-medios” (Borba y Villarreal, 2006, pp. 21-25). En este concepto se condensan varias ideas: el hecho de que la cognición no es algo individual sino una empresa social y que es inseparable de las tecnologías que la equipan, hoy como ayer, pero con la diferencia de que las tecnologías actuales están modificando profundamente estas interrelaciones.

Otro desarrollo convergente en la investigación sobre las tecnologías digitales es la creciente atención que se está prestando a las génesis instrumentales y la necesidad de atenderlas en la educación. Esta atención a las génesis instrumentales, que se ha nutrido de las investigaciones en ergonomía cognitiva de Pierre Vérillon y Pierre Rabardel (1995), también ha tomado diversas formas según los marcos teóricos en los que se ha insertado, como ha demostrado claramente el proyecto europeo ReMath (Kynigos y Lagrange, 2014; Artigue y Mariotti, 2014). Ha llevado, entre otras cosas, a la aparición de lo que ahora se conoce como el enfoque instrumental en didáctica de las matemáticas (véase Artigue, 2011, para una presentación en español y también la serie de videos<sup>2</sup> realizada como parte del proyecto AMOR de la ICMI [*Awardees Multimedia Online Resources*] que traza su surgimiento y desarrollo).

### 3.3 La descentralización de la investigación del alumno al docente

Otra evolución importante que comenzó en el decenio de 1990 es el cambio de orientación de la investigación del alumno al docente. Las primeras investigaciones didácticas se centraron principalmente en los alumnos, las dificultades que probablemente encontrarían en su aprendizaje y la búsqueda de medios para superarlas. Se esperaba que los docentes, a través de su formación inicial y continua, fueran informados de los conocimientos y recursos producidos por la investigación didáctica, para que pudieran utilizarlos en su enseñanza. Sin embargo, esta explotación pronto resultó más difícil de lo previsto, lo que motivó un interés creciente en los propios docentes, sus conocimientos y creencias, sus prácticas y los factores determinantes

<sup>2</sup> <https://icmiamor.org/awardee-units/michele-artigue-unit>

de esas prácticas, su formación inicial y su desarrollo profesional. La encuesta que Jill Adler piloteó para el congreso ICME-10 en 2004, ha mostrado que, ya a principios de este siglo una proporción importante de la investigación se centraba en los docentes, revelando así un cambio en la orientación de la investigación (Adler, 2008). Asimismo, en esta área de investigación se nota una gran diversidad de aproximaciones, como lo demuestra claramente el 15.º estudio de la ICMI dedicado a este tema (Even y Ball, 2009).

En el contexto internacional, sin embargo, se observa la fuerte influencia del modelo desarrollado por Deborah Ball y sus colegas (Ball y Bass, 2000), derivada de la distinción introducida por Shulman entre *content knowledge*, *pedagogical knowledge* y *pedagogical content knowledge*. Conocido como MKT (*Mathematical Knowledge for Teaching*), este modelo también se utilizó en el primer estudio internacional TEDS-M (Teacher Education and Development Study in Mathematics) que, al igual que las principales evaluaciones internacionales de alumnos, tenía por objeto reunir datos sobre la formación inicial de los maestros de enseñanza básica y evaluar los conocimientos matemáticos y profesionales adquiridos por los maestros después de esta formación.

En la didáctica francesa, la investigación sobre las prácticas docentes ha dado lugar, en particular, a un enfoque específico, inspirado en la teoría de la actividad. Se trata del doble enfoque didáctico y ergonómico de las prácticas de enseñanza iniciado por Aline Robert y Janine Rogalski (2002), al que contribuyen ahora varios investigadores (véase Vandebrouck, 2013, por ejemplo). En este enfoque, las prácticas de enseñanza son vistas como objetos coherentes y estables, y son analizadas a través de cinco componentes. Los dos componentes principales son el componente cognitivo y el componente de mediación. El primero corresponde a la organización didáctica por el docente de las tareas propuestas a los alumnos, mientras que el segundo corresponde a su manejo en el aula, a las interacciones directas entre el profesor y los alumnos. En esta actividad didáctica y de mediación influyen diversas determinaciones que se tienen en cuenta en los otros tres componentes del modelo, el institucional, el social y el personal. El objetivo de la investigación es identificar las regularidades y variabilidades en las prácticas según los contextos, los dominios matemáticos, los niveles de enseñanza, los docentes, etc., para poder comprenderlas.

### 3.4 La evolución de las problemáticas: modelización y enfoques de investigación

Concluiré este panorama de evoluciones convergentes mencionando otros desarrollos más estrechamente vinculados a cuestionamientos sobre la naturaleza misma de la actividad matemática. Por supuesto, estas cuestiones siempre han estado presentes en la didáctica de las matemáticas y en el corazón del trabajo epistemológico de los didactas. Desde el comienzo de las investigaciones, en particular, el cuestionamiento sobre la especificidad de las formas de validación en matemáticas ha alimentado las numerosas investigaciones realizadas sobre la enseñanza y el aprendizaje de la demostración. La investigación en este campo sigue siendo extremadamente activa, como lo demuestra el volumen resultante del 19.º estudio de la ICMI recientemente dedicado a este dominio (Hanna y De Villiers, 2012). Sin embargo, otros cuestionamientos han ganado cada vez más importancia, en parte a causa de la evolución de las ciencias matemáticas y de las prácticas asociadas, de sus relaciones con otros campos científicos, ciencias de la naturaleza o ciencias económicas y sociales, y con la sociedad. El caso de la modelización es un buen ejemplo de esto. La modelización es esencial para las conexiones que las matemáticas mantienen con un número creciente de campos, y las herramientas de cálculo y simulación producidas por los avances tecnológicos renuevan las prácticas asociadas. Aunque la cuestión de la importancia que se debe dar a las aplicaciones de las matemáticas en la enseñanza de esta disciplina fue un tema de debate desde los primeros años de la CIEM, solo se abordaba en términos de aplicaciones la cuestión de la relación entre lo matemático y lo extramatemático en la enseñanza. Esta visión ha perdurado durante mucho tiempo, a pesar de los esfuerzos de pioneros como Henri Pollak y de la creación en 1983 de la serie de conferencias ICTMA (*International Conference on the Teaching of Mathematical Modelling and Applications*), que en 1999 dio lugar al grupo internacional con la misma sigla (esta vez para designar la *International Community of Teachers of Mathematical Modelling and Applications*), que actualmente es un grupo de estudio afiliado a la ICMI. Hoy en día, nadie pensaría solo en términos de aplicaciones la relación entre lo matemático y lo extramatemático (Blum, Galbraith, Henn y Niss, 2007). La elaboración de modelos se ha convertido en un componente reconocido de la actividad de muchos matemáticos, una actividad que desarrollan en colaboración con investigadores de otras disciplinas. El desarrollo entre los estudiantes de la competencia o de competencias de modelización (véase Niss y Blum, 2020, para una discusión detallada de esta terminología) está pasando a formar parte cada vez más de los planes de estudio de matemáticas, y la investigación didáctica en esta área está creciendo (véase, por ejemplo, la síntesis realizada por Blum,

2015). Estos trabajos muestran claramente la distancia que separa una visión en términos de modelización de la visión en términos de aplicación que es familiar para los profesores de Matemáticas. Ofrecen numerosos ejemplos de experiencias exitosas tanto en lo que se refiere a la enseñanza de los alumnos en todos los niveles de escolaridad como en la formación de los profesores. Nos ayudan a identificar las numerosas dificultades que hay que superar para dar vida a la modelización en el aula, construir progresiones de aprendizaje en este campo y articularlas con los contenidos de enseñanza. Estas dificultades explican por qué las prácticas de modelización, incluso cuando son promovidas por la institución escolar, siguen siendo, generalmente, ocasionales y marginales.

Los avances tecnológicos también han contribuido a poner de relieve el componente experimental de la actividad matemática, lo han dotado de nuevos y cada vez más potentes instrumentos y han facilitado el acceso a esta forma de actividad y a los resultados que produce, como lo muestra por ejemplo la creación en 1992 de la revista *Experimental Mathematics*. Aunque las ciencias matemáticas tienen especificidades innegables, el hecho de destacar su dimensión experimental las acerca a otras ciencias y a sus propios enfoques de investigación. Por lo tanto, no es casualidad que, en el último decenio, expresiones como “enfoque de indagación”, IBL (*Inquiry Based Learning*), IBE (*Inquiry Based Education*), que se han utilizado durante mucho tiempo en los trabajos relativos a la enseñanza de las ciencias, hayan migrado a la enseñanza de las matemáticas. La trayectoria europea es interesante desde este punto de vista. Tras la publicación del informe conocido como el Informe Rocard (Rocard et al., 2007), en el que se expresaba la preocupación por el decreciente atractivo de las carreras científicas en Europa y se consideraba que una fuente importante de este se encontraba en las prácticas de enseñanza de las matemáticas y las ciencias excesivamente deductivas y formales, la Comisión Europea decidió financiar sustancialmente proyectos innovadores dirigidos a posibilitar la difusión del IBL y de la IBE en la enseñanza de las matemáticas y las ciencias. El número de proyectos se ha multiplicado, como se muestra, por ejemplo, en el sitio web Scientix<sup>3</sup>. Desde 2009, he participado personalmente como experta científica en cinco de esos proyectos, cada uno de ellos movilizándolo investigadores de varios países y abarcando simultáneamente matemáticas y ciencias. Como señalamos en (Artigue y Blomhøj (2013), desde su aparición, la investigación didáctica

ha desarrollado múltiples construcciones teóricas que pueden vincularse a los conceptos de IBL y IBE, y múltiples recursos para la enseñanza y la formación de docentes en consonancia con estas construcciones, pero no se ha logrado que estas construcciones y recursos influyan en la enseñanza de las matemáticas a gran escala. Estos proyectos europeos han dependido en gran medida de estas construcciones y recursos para su realización, pero al mismo tiempo, dada su especificidad y escala, les dan una nueva extensión. También nos obligan a cuestionar las proximidades, diferencias y complementariedades entre estas diferentes construcciones teóricas para llegar a visiones suficientemente compartidas del IBL y de la IBE que permitan el trabajo de colaboración que se espera de los diferentes participantes, tal como lo muestra Katja Maass en Artigue et al. (2020). Este cuestionamiento está vinculado, de hecho, a otro cuestionamiento que también se ha desarrollado en el último decenio, basado en la observación de la diversidad teórica exponencialmente creciente del campo didáctico y el consiguiente riesgo de fragmentación. Esta es la empresa que ahora se conoce como *Networking of theories* (Bikner-Ahsbahs y Prediger, 2014).

Estos ejemplos de la evolución de las problemáticas de investigación son solo dos de los muchos ejemplos que podrían citarse y que son ampliamente compartidos. La conferencia asociada al estudio ICMI-24 sobre los recientes desarrollos curriculares mostró claramente la importancia tomada por el concepto de competencia(s) y, por supuesto, por las investigaciones relacionadas (Shimizu y Vithal, 2018). La nueva versión de la *Encyclopedia of Mathematics Education* muestra, por otra parte, el desarrollo de la investigación sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas a nivel universitario, con 10 nuevas entradas dedicadas a este tema. Esta evolución también se pone de manifiesto en la creación en 2015 de INDRUM (*International Network for Didactic Research in University Mathematics*) y de IJRUME (*International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education*). En este texto, como en la conferencia de la que surgió, no me pronunciaré más en estos desarrollos convergentes, para considerar otra cuestión igualmente esencial, la de las relaciones entre centros y periferias.

<sup>3</sup> <http://www.scientix.eu/>

#### 4. Centros y periferias

Voy a abordar este tema de las relaciones centros-periferias usando el filtro de la CIEM-ICMI. Como señalé en la primera sección de este texto, desde principios del siglo XX, con la creación de la CIEM, se desarrollaron intercambios internacionales sobre la enseñanza de las matemáticas. Sin embargo, aunque más de 30 países eran miembros o miembros asociados de esta organización, la CIEM fue, en sus inicios, una organización dominada por los europeos. De los 18 países miembros (con derecho a voto en contraposición a los miembros asociados), todos eran países europeos, excepto los Estados Unidos y Rusia, y hasta la Segunda Guerra Mundial, todos los miembros de los comités ejecutivos fueron de Europa o de los Estados Unidos. La situación mejoró con la refundación de la Comisión en 1952, que convirtió a la ICMI en una subcomisión permanente de la IMU (International Mathematical Union). En ese momento, la ICMI tenía 27 miembros de pleno derecho. El Comité Ejecutivo comenzó a incluir a matemáticos de nuevos países, primero con la elección en 1954 de Ram Behari (India), y luego en 1958 de Yasuo Akizuki (Japón) y Aleksandr Danilovic Aleksandrov (URSS). Pero no fue hasta 1979 que América Latina estuvo representada, con la elección de Ubiratan d'Ambrosio. Para África sólo sucedió en 2003, con la elección de Jill Adler, quien fue luego elegida presidenta de la ICMI en 2017. Sin embargo, fue con países latinoamericanos que se creó la primera red regional de la ICMI: el Comité Interamericano de Educación Matemática (CIAEM) en 1962, por iniciativa del entonces presidente de la ICMI, Marshall H. Stone, y de matemáticos latinoamericanos comprometidos con cuestiones educativas, después de una conferencia en Bogotá en 1961. Los vínculos establecidos en este momento con la Organización de las Naciones Unidas para la Educación, la Ciencia y la Cultura (UNESCO) también contribuyeron al fortalecimiento de los intercambios internacionales y al examen de cuestiones especialmente sensibles en los países de la periferia. La UNESCO en particular apoyó las acciones del CIAEM, como se destacó cuando fue otorgada la primera Medalla Luis Santaló a Ed Jacobsen quien estuvo a cargo de las matemáticas en la UNESCO durante mucho tiempo. La ICMI y la UNESCO también organizaron conjuntamente dos reuniones en África en esa época, la primera en Nairobi en 1974, *Language and Mathematics Teaching*, y la segunda en Jartum en 1978, *Developing Mathematics in Third World Countries*.

Sin embargo, la evolución de la ICMI hacia una verdadera internacionalización ha sido lenta y, como se puso de relieve en el Simposio que celebró el centenario de la Comisión en 2008, las acciones

llevadas a cabo no siempre han podido evitar los clásicos tropiezos de las relaciones entre centros y periferias, la dominación y la indiscutida exportación de perspectivas y obras de los países desarrollados de Occidente. Sin embargo, ya en 1959, el matemático japonés Yasuo Akizuki, que había sido elegido miembro del Comité Ejecutivo en 1958, escribía:

Oriental philosophies and religions are of a very different kind from those of the West. I can therefore imagine that there might also exist different modes of thinking even in mathematics. Thus I think that we should not limit ourselves to applying directly the methods which are currently considered in Europe and America to be the best, but should study mathematical instruction in Asia properly. Such a study might prove to be of interest and value for the West as well as for the East. (Akizuki, 1960, p. 288)

Pero solo décadas después, cuando el éxito de los países asiáticos en las evaluaciones internacionales TIMSS (Trends in Mathematics and Science Study) atrajo la atención de la comunidad internacional, se abordó realmente esta cuestión. La ICMI contribuyó a ello dedicando su 13° estudio a la comparación de las culturas de enseñanza de las matemáticas de los países del Asia sudoriental de tradición confuciana con las de Occidente (Leung, Graf y Lopez-Real, 2006).

Como también se señaló en el Simposio de 2008 (Menghini et al., 2008), en el cambio de siglo, este movimiento hacia una verdadera internacionalización de la ICMI se convirtió en una prioridad (véase también Hodgson y Niss, 2018). Esto ha resultado notablemente en:

- La inclusión de nuevos países, más allá de los miembros de la IMU una inclusión que también se vio favorecida por la decisión adoptada por la IMU de crear la categoría de miembro asociado más inclusiva.
- Los esfuerzos sistemáticos realizados para asegurar un mejor equilibrio en la composición de los diversos comités ICMI (comités de los congresos ICME y de los estudios ICMI) y favorecer la contribución de participantes de países de la periferia en las actividades asociadas.
- La creación de dos nuevas redes regionales en las que participa África en particular, la red AFRICME, creada en 2005, cuyas actividades federan principalmente a los países anglófonos de África, y la red EMF (*Espace Mathématique*



*Francophone*), primera red regional de la ICMI organizada en torno a una unidad lingüística y cuyas conferencias se celebran alternativamente en un país del Norte y en un país del Sur, siendo este siempre un país africano francófono.

- La elección de los temas para los estudios ICMI, especialmente con el estudio ICMI-21 sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en contextos multilingüísticos, el primer estudio ICMI cuyos dos líderes, Maria do Carmo y Mamokgethi Setati, fueron de países del Sur, Brasil y Sudáfrica respectivamente, una elección que refleja el papel esencial y pionero que desempeñaron los investigadores del Sur en el estudio de estas cuestiones de multilingüismo (Barwell et al., 2016).
- La elección de los sitios de las conferencias asociadas a los estudios ICMI, y también, de manera particularmente simbólica, la organización por primera vez de un congreso ICME en un país emergente, México, en 2008.
- Por último, la puesta en marcha del programa CANP (Capacity and Networking Project) en 2010, en asociación con la UNESCO y con el apoyo de la IMU. Este programa se centra en el desarrollo de la capacidad de formación y en la creación de sinergias entre los diferentes agentes que participan en la formación de profesores de Matemáticas, en el marco de nuevas redes regionales en las que participan países cercanos, todavía poco conectados a las redes existentes y a la comunidad internacional reunida por la ICMI. Durante la última década, se ha convertido en un programa emblemático de la ICMI y de las cinco realizaciones asociadas, dos han sido organizadas en América Latina, la primera en 2012 en Costa Rica para países de América Central y del Caribe, que condujo a la creación de la red REDUMATE (Red de Educación Matemática de América Central y El Caribe), y la segunda en 2016 en Lima, para los países andinos y el Paraguay, que condujo a la creación de la red CEMAS (Comunidad de Educación Matemática de América del Sur).

Mirando la situación actual, incluso más allá de la ICMI, la evolución es evidente. Conferencias en el campo de la Educación Matemática se están multiplicando en todas las regiones del mundo. En todas partes también se desarrollan programas de maestría y doctorado, como el que celebró su décimo aniversario en la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Chile, cuando presenté la conferencia de la que se deriva este texto. También se han elaborado nuevos estudios comparativos, atentos al respeto de

la diversidad cultural, tanto en su conceptualización como en su metodología, como el estudio *The Learner's Perspective Study*, iniciado por el australiano David Clarke (Clarke, Keitel y Shimizu, 2006), con quien tuve la oportunidad de colaborar en los últimos cinco años en el proyecto internacional Lexicon (Mesiti, Artigue, Hollingsworth, Cao y Clarke, en prensa), y que lamentablemente falleció a principios de este año. Además, se observa la creciente influencia de investigaciones, teorías y prácticas no originadas en los países y culturas tradicionalmente dominantes. La multiplicación internacional de las investigaciones y realizaciones en torno al concepto de Lesson Study es un excelente ejemplo de ello (Huang, Takahashi y Da Ponte, 2019). Se puede también mencionar el lugar tomado en América Latina por la socioepistemología, los coloquios RELME (Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa) y la revista RELIME (*Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*), y el reconocimiento internacional de este enfoque atestiguado, en particular, por la existencia de una entrada asociada en la nueva versión de la *Encyclopedia of Mathematics Education* (Cantoral, 2020).

Sin embargo, queda mucho por hacer para que el campo de la Educación Matemática se beneficie plenamente de la riqueza que ofrece su diversidad cultural, y se libere de relaciones de dominación heredadas de la historia. Cada uno de nosotros puede contribuir a esto.

## 5. Conclusión

En este texto, al igual que en la conferencia de la que surgió, he tratado de trazar, en sus grandes líneas, la historia del campo de investigación que hoy llamamos, según el país, Didáctica de las Matemáticas, Educación Matemática o Matemática Educativa. Esta descripción es necesariamente esquemática; es también parcial y no objetiva, marcada por la cultura didáctica en la que me construí como investigadora, las experiencias que viví como docente, formadora, investigadora, pero también la forma en que mi intensa participación en las actividades de la ICMI durante catorce años, como miembro de su Comité Ejecutivo, influyó en mi visión de la Educación Matemática, en el sentido amplio del término. Espero que este relato, a pesar de sus evidentes limitaciones, logre comunicar, de manera suficientemente argumentada, mi convicción de que este campo de investigación es hoy en día un campo cada vez más reconocido, legitimado e institucionalizado en el mundo entero; un campo de investigación vivo cuyas problemáticas y herramientas, tanto conceptuales como metodológicas, evolucionan constantemente; un campo de investigación que

ha producido a lo largo de los decenios muchos conocimientos sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas; un campo de investigación que ha alimentado un gran número de realizaciones para mejorar la enseñanza y la formación de los docentes, y ha influido notablemente en los planes de estudio; y también un campo de investigación particularmente diverso en todos sus aspectos y cada vez más sensible a la riqueza potencial que constituye esa diversidad, pero también a los esfuerzos que hay que hacer para que esa riqueza pueda expresarse y explotarse. Sin embargo, también hay que reconocer que este campo de investigación se enfrenta a muchos desafíos, entre ellos, el desafío de la relación entre la investigación fundamental y la acción didáctica y, asociado a este, el desafío de los cambios de escala; de conciliar el tiempo prolongado de las investigaciones con el tiempo de los cambios, incluso los trastornos, en el mundo que nos rodea. Mientras escribo estas líneas, en medio de la pandemia del virus covid, en un momento en que las escuelas y universidades deben encontrar repentinamente nuevas formas de operar y evitar un crecimiento de desigualdades educativas ya insostenibles, este desafío es particularmente obvio.

## Referencias

- Adler, J. (Coord.) (2008). Mirror images of an emerging field: Researching mathematics teacher education. En E. Emborg, y M. Niss (Eds.), *Proceedings of the 10<sup>th</sup> International Congress of Mathematics Education* (pp. 123-139). Copenhagen: Roskilde University.
- Akizuki, Y. (1960). Proposal to ICMI. *L'Enseignement Mathématique*, t. V, fasc.5, 288-289.
- Arzarello, F. (2008). Mathematical landscapes and their inhabitants: Perceptions, languages, theories. En E. Emborg, y M. Niss (Eds.), *Proceedings of the 10<sup>th</sup> International Congress of Mathematics Education* (pp. 158-181). Copenhagen: Roskilde University.
- Artigue, M. (2002). Learning mathematics in a CAS environment: the genesis of a reflection about instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work. *International Journal of Computers for Mathematics Learning*, 7, 245-274.
- Artigue, M. (2011). Tecnología y enseñanza de las matemáticas: desarrollo y aportaciones de la aproximación instrumental. *Cuadernos de Investigación en Educación Matemática*, 8, 13-33.
- Artigue, M. (2018). Les recherches sur l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques à l'étranger. En J.-L. Dorier, G. Guedet, M.-L. Peltier, A. Robert, y E. Roditi (Eds.), *Enseigner les mathématiques. Didactique et enjeux d'apprentissage* (pp. 408-420). Paris: Editions Belin.
- Artigue, M., y Blomhøj, M. (2013). Conceptualizing inquiry-based education in mathematics. *ZDM – The International Journal on Mathematics Education*, 45(6), 797- 810.
- Artigue, M., y Mariotti, M.A. (2014). Networking theoretical frames: the ReMath enterprise. *Educational Studies in Mathematics*, 85(3), 329-356.
- Artigue, M. et al. (2019). The French didactic tradition. En B. Werner, M. Artigue, M. A. Mariotti, R. Strä er, y M. Van den Heuvel-Panhuizen (Eds.), *European Traditions in Didactics of Mathematics* (pp. 11-56). New-York: Springer Open.
- Artigue, M., Bosch, M., Doorman, M., Juhász, P., Kvasz, L., y Maass, K. (2020). Inquiry based mathematics education and the development of learning trajectories. *Teaching Mathematics and Computer Science*. 18/3, 63-89.
- Ball, D. L., y Bass, H. (2000). Interweaving content and pedagogy in teaching and learning to teach: knowing and using mathematics. En J. Boaler (Ed.), *Multiple perspectives on the teaching and learning of mathematics* (pp. 83-104). Westport: Ablex.
- Bartolini Bussi, M. G., y Mariotti, M. A. (2008). Semiotic mediation in the mathematics classroom: Artifacts and signs after a Vygotskian perspective. En L. English, M. Bartolini Bussi, G. Jones, R. Lesh, y D. Tirosh (Eds.), *Handbook of international research in mathematics education* (2nd edition, revised, pp. 746-805). Mahwah: Lawrence Erlbaum.
- Barwell, R., Clarkson, P., Halai, A., Kazima, M., Moschkovich, J., Planas, N.,... y Ubillús, M. V. (Eds.). (2016). *Mathematics Education and Language Diversity. The 21<sup>st</sup> ICMI Study*. New York: Springer. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-14511-2>
- Belhoste, B. (1998). Pour une réévaluation du rôle de l'enseignement dans l'histoire des mathématiques. *Revue d'histoire des mathématiques*, 4, 289-304. Recuperado desde [http://www.numdam.org/article/RHM\\_1998\\_4\\_2\\_289\\_0.pdf](http://www.numdam.org/article/RHM_1998_4_2_289_0.pdf)
- Bikner-Ahsbabs, A., y Prediger, S. (Eds.) (2014). *Networking of Theories as a Research Practice in Mathematics Education*. New York: Springer. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-05389-9>
- Blum, W. (2015). Quality teaching of mathematical modelling: What do we know, what can we do? En S. J. Cho (Ed.), *The Proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education* (pp. 73-96). New York: Springer Open. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-12688-3>
- Blum, W., Galbraith, P. Henn, H.-W., y Niss, M. (2007). *Modelling and Applications in Mathematics Education. The 14th ICMI Study*. New York: Springer. <https://doi.org/10.1007/978-0-387-29822-1>
- Blum, W., Artigue, M., Mariotti, M. A., Strä er, R., y Van den Heuvel-Panhuizen, M. (Eds.) (2019). *European Traditions in Didactics of Mathematics*. New York: Springer Open. <https://doi.org/10.1007/978-3-030-05514-1>
- Borba, M. C., y Villarreal, M. E. (2006). *Humans-with-Media and the Reorganization of Mathematical Thinking*. New York: Springer. <https://doi.org/10.1007/b105001>
- Brousseau, G. (2008). Research in mathematics education. En E. Emborg, y M. Niss (Eds.), *Proceedings of the 10th International Congress of Mathematics*

- Education* (pp. 244-254). Copenhague: Roskilde University.
- Cantoral, R. (2013). *Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa*. México: Gedisa editorial. Recuperado desde [https://www.researchgate.net/profile/Ricardo\\_Cantoral/publication/261363815\\_Teoria\\_Socioepistemologica\\_de\\_la\\_Matemática\\_Educativa\\_Estudios\\_sobre\\_la\\_construcción\\_social\\_del\\_conocimiento/links/0a85e5398a4c0323d5000000.pdf](https://www.researchgate.net/profile/Ricardo_Cantoral/publication/261363815_Teoria_Socioepistemologica_de_la_Matemática_Educativa_Estudios_sobre_la_construcción_social_del_conocimiento/links/0a85e5398a4c0323d5000000.pdf)
- Cantoral, R. (2020). *Socioepistemology in mathematics education*. En S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (2nd edition, pp. 790-797). New York: Springer. <https://doi.org/10.1007/978-3-030-15789-0>
- Chevallard, Y. (2019). Introducing the anthropological theory of the didactic: an attempt at a principled approach. *Hiroshima Journal of Mathematics Education*, 12, 71-114. Recuperado desde [https://www.jasme.jp/hjme/download/05\\_Yves%20Chevallard.pdf](https://www.jasme.jp/hjme/download/05_Yves%20Chevallard.pdf)
- Clarke, D. J., Keitel, C., y Shimizu, Y. (Eds.) (2006). *Mathematics classrooms in twelve countries: The insider's perspective*. Rotterdam: Sense Publishers. <https://doi.org/10.1163/9789087901622>
- Coray, D., Furinghetti, S., Gispert, H., Hodgson, B., y Schubring, G. (Eds.) (2003). *One hundred years of L'Enseignement Mathématique*. Genève: L'Enseignement Mathématique. Recuperado desde [https://www.mathunion.org/fileadmin/ICMI/files/Digital\\_Library/Other\\_ICMI\\_Conferences\\_Proceedings/Proc\\_EM\\_ICMI\\_Symp\\_01.pdf](https://www.mathunion.org/fileadmin/ICMI/files/Digital_Library/Other_ICMI_Conferences_Proceedings/Proc_EM_ICMI_Symp_01.pdf)
- D'Ambrosio, U. (2008). *Etnomatemática. Eslabón entre las tradiciones y la modernidad*. México: Limusa.
- Dorier, J.-L. (2018). Aperçu de l'histoire de la didactique des mathématiques francophone. En J.-L. Dorier, G. Gueudet, M.-L. Peltier, A. Robert, y E. Roditi (Eds.), *Enseigner les mathématiques. Didactique et enjeux d'apprentissage* (pp. 74-88). Paris: Editions Belin.
- Duval, R. (1995). *Semiosis et pensée humaine*. Berne: Peter Lang.
- Even, R., y Ball, D. L. (Eds.) (2009). *The Professional Education and Development of Teachers of Mathematics. The 15th ICMI Study*. New York: Springer. <https://doi.org/10.1007/978-0-387-09601-8>
- Gispert, H. (2008). Traités et manuels: influences croisées des sphères sociales, scolaires et académiques dans les sciences. En L. Viennot (Ed.), *Didactique, épistémologie et histoire des sciences-Penser l'enseignement* (pp. 257-279). Paris: PUF. <https://doi.org/10.3917/puf.vienn.2008.01.0257>
- Hanna, G., y De Villiers, M. (2012). *Proof and Proving in Mathematics Education. The 19th ICMI Study*. New York: Springer. <https://doi.org/10.1007/978-94-007-2129-6>
- Hodgson, B., y Niss, M. (2018). ICMI 1966-2016: A Double Insiders' View of the Latest Half Century of the International Commission on Mathematical Instruction. En G. Kaiser (Ed.), *Invited Lectures from the 13th International Congress on Mathematical Education* (pp. 229-247). New York: Springer Open. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-72170-5>
- Huang, R., Takahashi, A., y Da Ponte, J. P. (Eds.) (2019). *Theory and Practice of Lesson Study in Mathematics. An International Perspective*. New York: Springer. <https://doi.org/10.1007/978-3-030-04031-4>
- Kilpatrick, J. (1992). A history of research in mathematics education. En D. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 3-38). New York: Macmillan.
- Kilpatrick, J. (2020). History of research in mathematics education. En S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (2nd edition, pp. 349-354). New York: Springer. <https://doi.org/10.1007/978-3-030-15789-0>
- Kynigos, C., y Lagrange, J. B. (Eds.) (2014). Special issue: Representing mathematics with digital media: Working across theoretical and contextual boundaries. *Educational Studies in Mathematics*, 85(3). <https://www.jstor.org/stable/i40143011>
- Lerman, S. (2000). The social turn in mathematics education research. En J. Boaler (Ed.), *Multiple perspectives on mathematics teaching and learning*. Westport: Ablex. <https://doi.org/10.2307/749752>
- Leung, F. K. S., Graf, K.-D., y Lopez-Real, F. J. (Eds.) (2006). *Mathematics education in different cultural traditions: A comparative study of East Asia and the West. The 13th ICMI Study*. New York: Springer. <https://doi.org/10.1007/0-387-29723-5>
- Menghini, M., Furinghetti, F., Giacardi, L., y Arzarello, F. (Eds.) (2008). *The first century of the International Commission on Mathematical Instruction (1908-2008). Reflecting and shaping the world of mathematics education*. Roma: Istituto della Enciclopedia Italiana.

- Mesiti, C., Artigue, M., Hollingsworth, H., Cao, Y., y Clarke, D. J. (Eds.). (en prensa). *Teachers talking about their classrooms: Learning from the professional lexicons of mathematics teachers around the world*. Routledge.
- Morgan, C. (2006). What does social semiotics have to offer to mathematics education research? *Educational Studies in Mathematics*, 61(1-2), 219-245. <https://doi.org/10.1007/s10649-006-5477-x>
- Niss, M., y Blum, W. (2020). *The Learning and Teaching of Mathematical Modelling*. New York: Routledge. <https://doi.org/10.4324/9781315189314>
- Pegg, J. (2020). The van Hiele theory. En S. Lermann (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (2nd edition, pp. 896-899). New York: Springer. <https://doi.org/10.1007/978-3-030-15789-0>
- Radford, L. (2019). On the epistemology of the Theory of Objectification. *Proceedings of the Eleventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*. Utrecht University. Recuperado desde <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-02417416/document>
- Radford, L., Schubring, G., y Seeger, F. (Eds.) (2011). Signifying and meaning-making in mathematical thinking, teaching and learning: Semiotic perspectives. Special issue. *Educational Studies in Mathematics*, 77(2-3). <https://doi.org/10.1007/s10649-011-9322-5>
- Robert, A., y Rogalski, J. (2002). Le système complexe et cohérent des pratiques des enseignants de mathématiques: une double approche. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education* 2(4), 505-528. <https://doi.org/10.1080/14926150209556538>
- Rocard, M., Csermely, P., Jorde, D., Lenzen, D., Walberg-Henriksson, H., y Hemmo, V. (2007). *L'enseignement scientifique aujourd'hui: une pédagogie renouvelée pour l'avenir de l'Europe*. Bruxelles: Commission Européenne, Direction générale de la recherche, science, économie et société.
- Roth, W. -M., & Lee, Y. -J. (2007). "Vygotsky's neglected legacy": Cultural-historical activity theory. Review of Educational Research, 77(2), 186-232.
- Sáenz-Ludlow, A., y Presmeg, N. (Eds.) (2006). Semiotic perspectives in mathematics education. Special issue. *Educational Studies in Mathematics*, 61(1-2). <https://doi.org/10.1007/s10649-005-9001-5>
- Schubring, G. (2008). The origins and early incarnations of ICMI. In M. Menghini, F. Furinghetti, L. Giacardi, y F. Arzarello (Eds.) (2008). *The first century of the International Commission on Mathematical Instruction (1908-2008). Reflecting and shaping the world of mathematics education* (pp. 113-130). Roma: Istituto della Enciclopedia Italiana.
- Sfard, A. (2008). *Thinking as Communicating*. Cambridge: Cambridge University Press. <https://doi.org/10.1017/CBO9780511499944>
- Sfard, A. (2020). Commognition. En S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (2nd edition, pp. 95-101). New York: Springer. <https://doi.org/10.1007/978-3-030-15789-0>
- Shimizu, Y., y Vithal, R. (Eds.) (2018). *School Mathematics Curriculum Reforms: Challenges, Changes and Opportunities. Proceedings of the ICMI-24 Study Conference*. University of Tsukuba & ICMI, Tsukuba, Japan. Recuperado desde <https://www.mathunion.org/fileadmin/ICMI/ICMI%20studies/ICMI%20Study%2024/ICMI%20Study%2024%20Proceedings.pdf>
- Skemp, R. (1976). Relational Understanding and Instrumental Understanding. *Mathematics Teaching*, 77, 20-26 Recuperado desde <http://www.davidtall.com/skemp/pdfs/instrumental-relational.pdf>
- Skovsmose, O. (1994). *Towards a Philosophy of Critical Mathematics Education*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers. <https://doi.org/10.1007/978-94-017-3556-8>
- Trouche, L., y Drijvers, P. (2010). Handled technology: Flashback into the future. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education*, 42(7), 667-681. <https://doi.org/10.1007/s11858-010-0269-2>
- Vandebrouck, F. (2013). *Mathematics Classrooms: Students' Activities and Teachers' Practices*. Rotterdam: Sense Publishers. <https://doi.org/10.1007/978-94-6209-281-5>
- Vérillon, P., y Rabardel, P. (1995). Cognition and Artifacts: A Contribution to the Study of Thought in Relation to Instrumented Activity. *European Journal of Psychology of Education*, 10(1), 77-101. <https://doi.org/10.1007/BF03172796>
- Weigand, H.-G., McCallum, W., Menghini, M., Neubrand, M., y Schubring, G. (Eds.) (2019). *The legacy of Felix Klein*. New York: Springer. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-99386-7>