



NOTAS AL PIE EN LA ARITMÉTICA (1884) DE LOS CORONELES SALINAS Y BENÍTEZ

José M. Muñoz-Escolano, Universidad de Zaragoza

Antonio M. Oller-Marcén, Centro Universitario de la Defensa de Zaragoza

Resumen

Dentro de la Historia de la Educación Matemática, el análisis de libros de texto antiguos es una importante línea de trabajo y el siglo XIX resulta un periodo de especial interés debido a su proliferación durante esa época. El estudio de ciertos elementos de una obra (prólogos, notas al pie, etc.) proporciona información relevante para los investigadores. Aquí, abordamos el estudio de las notas al pie de una obra de Manuel Benítez y Parodi e Ignacio Salinas y Angulo, dirigida a estudiantes de academias militares. Se detecta una mayor presencia en esta obra que en otras de la época. Al analizarlas por su función y temática, se aprecia que su función más común es plantear digresiones al discurso principal, en muchos casos ofreciendo información sobre aspectos etimológicos e históricos.

Palabras clave: *Historia de la Educación Matemática, siglo XIX, libros de texto, paratextos, notas al pie.*

Footnotes in the *Arithmetic* (1884) by the Colonels Salinas and Benítez

Abstract

In the field of History of Mathematics Education, the analysis of old Mathematics textbooks is an important line of work and the 19th century is a particularly interesting period due to its proliferation during that time. The study of certain elements of a work (prefaces, footnotes, etc.) provides relevant information to researchers. Here, we study the footnotes from a textbook written by Manuel Benitez y Parodi and Ignacio Salinas y Angulo addressed to military academy students. We detect a higher presence in this book than in others from that time. After analyzing them regarding their functions and themes, we see that their more common role is to digress from the main discourse, often providing information about etymological and historical aspects.

Keywords: *History of Mathematics Education, 19th century, textbooks, paratexts, footnotes*

INTRODUCCIÓN

Durante el siglo XIX se desarrollaron las primeras leyes educativas en España que terminarían desembocando en la denominada Ley Moyano de 1857 cuyo espíritu se mantuvo vigente prácticamente hasta la Ley General de Educación de 1970. También es en el siglo XIX cuando se fundan las Escuelas Normales (Carrillo Gallego, 2005). Esta preocupación por la educación se hizo extensiva al contexto de la formación militar con la creación de múltiples centros de formación militar, el diseño y reforma de distintos currículos y la promoción de la redacción de libros de texto específicos (Ruiz, 2004).

En cuanto a las matemáticas, el tercio final del siglo XIX supuso en España “un periodo de consolidación y en el que se acorta la distancia que hasta entonces separaba el cultivo de esta ciencia en España de la de otros países avanzados” (García Camarero, 1984, p. 126). No es de extrañar, por lo tanto, que “el ámbito en el que se movieron los físicos y matemáticos españoles de aquella centuria fue, con muy pocas excepciones, el de la enseñanza” (Sánchez Ron, 1992, p. 58). En relación con esto, durante la época se produjo un gran aumento en la producción de libros de texto de matemáticas, así como una popularización de los mismos que ha llevado a que algunos autores hayan denominado el siglo XIX como el “periodo del libro de enseñanza” (Gómez, 2011, p. 13). Entre los múltiples autores de textos matemáticos de la época, Maz (2005) señala la existencia de un buen número de militares profesionales. Por citar unos pocos, podemos encontrar a Miguel Ortega y Sala, Antonio Terry y Rivas, Juan Montero Gabutti, Cirilo Aleixandre, Manuel Benítez y Parodi e Ignacio Salinas y Angulo. Las obras de todos estos autores, aunque inicialmente dirigidas a estudiantes de academias militares, tuvieron una gran influencia y fueron extensivamente utilizadas también fuera de ese ámbito.

El análisis de libros antiguos de Matemáticas es una importante línea de trabajo en el ámbito de la Historia de la Educación Matemática entre otros motivos porque permite contextualizar los conceptos matemáticos y conocer diversos acercamientos (López-Esteban, 2019). Fan, Zhu y Miao (2013) señalan que a nivel internacional los estudios más frecuentes son aquellos que se centran en el análisis del tratamiento recibido por algún contenido y en el caso de la investigación histórica esta tendencia parece mantenerse. Así, a modo de ejemplo, podemos citar los trabajos de González Astudillo y Sierra Vázquez (2004) sobre los puntos críticos de funciones, de Picado (2012) sobre el sistema métrico decimal o de Maraví Zabaleta (2019) sobre los números complejos.

En cualquier caso, aunque un buen número de trabajos se centran de forma prioritaria en el análisis del contenido matemático (Gómez, 2018), cabe señalar que existen cuestiones no directamente matemáticas que merece la pena tener en cuenta a la hora de analizar globalmente un texto matemático antiguo. La originalidad de la obra, los principios didácticos seguidos por el autor, etc. son aspectos que permiten contextualizar la obra, valorar su importancia o evaluar su posible impacto en la formación matemática de la época (Maz-Machado & Rico, 2015). Muchos de estos elementos, además, no se encuentran presentes en el cuerpo del texto, sino que pueden identificarse en otros elementos como los prólogos, las dedicatorias, las portadas, las notas al pie de página, etc.

OBJETIVOS

La investigación que pretendemos abordar surge en relación a la siguiente pregunta de investigación: ¿Qué información relevante desde el punto de vista de la Historia de la Educación Matemática está presente en las notas al pie de los libros de texto y manuales

escolares del siglo XIX? Más en particular, el presente trabajo se concreta en los siguientes objetivos específicos:

- Estudiar la presencia de notas al pie en una obra de contenido elemental, pero dirigida a estudiantes de educación superior a finales del siglo XIX.
- Analizar el contenido de las notas al pie, determinando tanto sus posibles funciones, como los temas tratados en ellas.

MARCO TEÓRICO

Con el término ‘paratexto’ se definen todos aquellos acompañamientos de un texto escrito que hacen que dicho texto “se convierta en un libro” (Genette, 2001). En la Tabla 1 se proporciona un listado relativamente exhaustivo de posibles paratextos.

Tabla 1. *Posibles paratextos de una obra literaria (Genette, 2001)*

Peritextos del editor (portada, portadilla, anexos, etc.)	Epigramas
Nombre del autor	Prefacios
Título	Intertítulos
Prière d’insérer	Notas
Dedicatorias (del trabajo y del ejemplar)	Epitextos (públicos o privados)

La presencia de paratextos es especialmente importante y relevante en obras de carácter literario, pero se encuentran, de hecho, en todo tipo de libros. De hecho, es posible encontrar trabajos centrados en el análisis de paratextos de libros de texto de matemáticas. Por ejemplo, Barbosa (2014) analiza los paratextos de traducciones al portugués de manuales franceses utilizados en la Real Academia Militar de Río de Janeiro. Por su parte, Andrade y de Souza Ferreira (2015) ilustran la contribución que el análisis de los paratextos puede hacer a la Historia de la Educación Matemática estudiando en detalle los paratextos presentes la obra *Arithmetica theorico-practica* de André Perez y Marín.

Dentro del ámbito de la Historia de la Educación Matemática, los prólogos son los paratextos que más atención han recibido. Posiblemente, esto se debe a que los prólogos aparecen en prácticamente cualquier texto matemático ya desde la antigüedad (Vitrac, 2008). Además, como Christiansen (2017) pone de manifiesto, es posible encontrar interesante información contextual y sobre aspectos didácticos en los prólogos de textos dedicados a la enseñanza de las matemáticas. En este sentido, existen trabajos centrados en diversas obras españolas de los siglos XVI y XVIII que muestran que los prólogos constituyen efectivamente una unidad de análisis interesante para identificar concepciones y creencias del autor de la obra sobre distintos aspectos de las matemáticas (Oller-Marcén & Muñoz-Escolano, 2019; Muñoz-Escolano & Oller-Marcén, 2020a, 2020b).

Al margen de los prólogos, no conocemos apenas trabajos centrados en analizar la presencia y el contenido de otros paratextos concretos en libros de texto o manuales de matemáticas. Puig (2006), con su análisis del contenido de una nota al pie del *Tratado Elemental de Matemáticas* de Vallejo ya puso de manifiesto que las notas al pie pueden contener información de interés desde el punto de vista de la historia de la educación matemática. Oller-Marcén y Meavilla-Seguí (2018) señalan que las notas al pie eran utilizadas por algunos autores para aportar información que podía resultar formativa o interesante para el lector al margen del propio contenido del texto (sobre aspectos históricos, por ejemplo). Recientemente, y de un modo más sistemático, Muñoz-Escolano y Oller-Marcén (en prensa) han analizado las notas al pie de algunas obras del matemático

bilbaíno Juan Cortázar, observando que su presencia es relativamente importante en las obras consideradas y que el uso de las notas al pie por parte del autor (en cuanto a funciones y temas tratados) parece variar según los destinatarios objetivos del texto.

Genette define las notas (2001, p. 272) del siguiente modo:

Una nota es un enunciado de extensión variable (una palabra es suficiente) relativo a un segmento más o menos determinado del texto, y dispuesto ya sea junto a ese segmento o en referencia a él. El carácter siempre parcial del texto de referencia, y en consecuencia el carácter siempre local de enunciado de la nota, me parece el rasgo formal más distintivo de este elemento del paratexto, que lo opone al prefacio entre otros.

De entre los diversos tipos existentes (en función de elementos como el remitente, el destinatario, la temporalidad, etc.), nos centramos aquí en las notas más usuales, es decir, en aquellas escritas por el propio autor presentes en textos de carácter discursivo. Genette (2001) señala que la función básica de este tipo de notas es la de servir como un suplemento, una digresión o un comentario. No obstante, el propio Genette especifica hasta ocho funciones posibles para las notas: proporcionar definiciones o explicaciones de términos usados en el texto, aportar traducciones de citas que aparecen en el texto, proporcionar referencias de citas y fuentes empleadas, exhibir autoridades o documentos de apoyo o confirmativos, precisar un hecho mencionado de forma vaga o descuidada en el texto, señalar incertidumbres o complejidades que el autor ignoró en el texto por considerar que no interesan al lector ordinario, aportar argumentos suplementarios o anticipaciones a objeciones y, por último, realizar digresiones a propósito.

MÉTODO

Para alcanzar los objetivos indicados anteriormente, realizamos un estudio de caso de tipo exploratorio (Lune & Berg, 2017). Más en particular, abordamos una investigación de carácter documental (McCulloch, 2004) que se lleva a cabo según las fases clásicas del método de investigación histórico (Ruíz Berrio, 1976): heurística, crítica (interna y externa) y hermenéutica. Este método se puede particularizar de forma fructífera en el ámbito de la Historia de la Educación Matemática (González Astudillo, 2009; Conejo, 2015). La fase heurística consiste en la búsqueda, selección y clasificación de los documentos relevantes; en la fase crítica se determina la autenticidad de los citados documentos y se analizan los mismos y, por último, la fase hermenéutica involucra la interpretación de los resultados obtenidos en la fase anterior.

El estudio realizado se centra en una pareja de autores de textos de aritmética de gran influencia en España durante los últimos años del siglo XIX y a lo largo de toda la mitad del siglo XX, a juzgar, entre otros aspectos, por el muy elevado número de reediciones de todas sus obras (Oller-Marcén & Meavilla-Seguí, 2018). Se trata del binomio formado por Ignacio Salinas y Angulo y Manuel Benítez y Parodi. Estos autores, ambos oficiales del Ejército de España, publicaron diversos manuales sobre aritmética y álgebra a finales del siglo XIX que serían ampliamente utilizados, y no solo en el ámbito militar, hasta muy entrado el siglo XX. En este trabajo nos centraremos en su primera obra publicada, la *Aritmética* (Salinas y Angulo & Benítez y Parodi, 1884).

Sobre Ignacio Salinas y Angulo no se posee información biográfica al margen de su hoja de servicios y no se le conoce labor pedagógica o producción científica más allá de los libros publicados con Manuel Benítez y Parodi. Sobre este último, sin embargo, se posee mayor información que pone de manifiesto una intensa actividad científica. Cabe señalar, por ejemplo, que en 1893 ganó un accésit de la Real Academia de Ciencias Exactas,

Físicas y Naturales por la memoria titulada *Exposición razonada y metódica de los desarrollos en serie de las funciones matemáticas* (Octavio de Toledo, 1912). Además, fue colaborador de *El Progreso Matemático*, miembro de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales y vicepresidente de la Sociedad Matemática Española (Oller-Marcén & Meavilla-Seguí, 2018).

La *Aritmética* de Salinas-Benítez (Figura 1) fue elegida como libro de texto para todas las Academias Militares, por Real Orden de 28 de junio de 1884, en el concurso celebrado el 30 de abril del mismo año por la Dirección General de Instrucción Militar (*Gaceta de Madrid*, nº 191, 9 de julio de 1884). Fue además premiada con medalla de oro en la Exposición Universal de Barcelona celebrada en 1888. De su éxito da buena cuenta el gran número de reediciones de la obra. Antes de terminar el siglo aparecieron tres nuevas ediciones (en 1890, 1895 y 1898) y durante el siglo XX se siguió reeditando profusamente, siendo la edición más tardía de la que tenemos noticia la decimonovena, de 1955. El texto, cuyos contenidos y extensión aproximada se fijaban en las bases del citado concurso, se divide en dos partes. La primera parte, dedicada aspectos teóricos, se divide en cuatro libros; mientras que la segunda, dedicada a aplicaciones, se divide en dos libros. A continuación, indicamos el título de cada uno de los seis libros que componen la obra, lo que da una idea de los contenidos de cada uno de ellos. Para una descripción más detallada se puede consultar el trabajo de Oller-Marcén y Meavilla-Seguí (2018).

- Libro primero: Números enteros.
- Libro segundo: Fracciones.
- Libro tercero: Potencias y raíces.
- Libro cuarto: Números inconmensurables y aproximados.
- Libro quinto: Números concretos.
- Libro sexto: Magnitudes proporcionales.

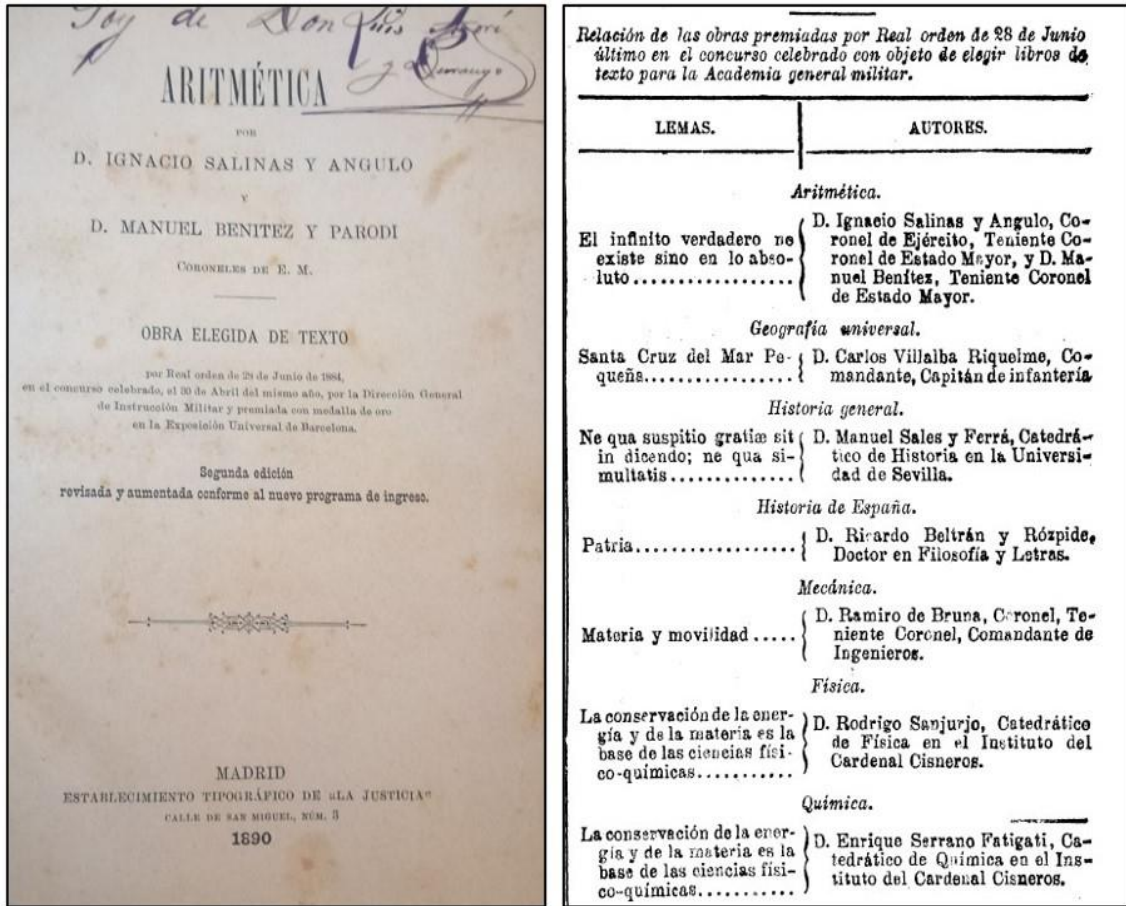


Figura 1. Portada del ejemplar utilizado en el trabajo (izda.) y declaración de la obra como libro de texto (dcha.). Fuente: Elaboración propia

Para este trabajo hemos utilizado el ejemplar de la segunda edición de la obra que forma parte de la colección privada del segundo autor (Salinas y Angulo & Benítez y Parodi, 1890). Existe una versión digitalizada de la cuarta edición en la Biblioteca Nacional de España. Una inspección de estas dos ediciones ha puesto de manifiesto que no existen diferencias sustanciales entre su contenido. Del mismo modo, las notas al pie presentes en ambas ediciones son las mismas. De todo lo anterior se puede concluir que los criterios señalados por Scott (1990) para investigaciones de tipo documental (autenticidad, credibilidad, representatividad y significado) se cumplen en este trabajo.

Siguiendo la metodología establecida en (Muñoz-Escolano & Oller-Marcén, en prensa) el análisis que se ha llevado a cabo es de tipo deductivo y se ha realizado en dos niveles. Una vez identificadas todas las notas al pie presentes en la obra, en el primer nivel de análisis se ha asignado a cada nota al menos una de las ocho funciones distinguidas por Genette (columna izquierda de la Tabla 2). El segundo nivel de análisis se centra en los temas tratados en las notas. Además de las categorías señaladas por Maz-Machado y Rico (2015), se ha tenido en cuenta que en la obra analizada “los autores incluyen algunos interesantes comentarios etimológicos e históricos en la forma de notas al pie” (Oller-Marcén & Meavilla-Seguí, 2018, p. 175). De este modo, las categorías utilizadas en este segundo nivel de análisis son las que se presentan en la columna derecha de la Tabla 2.

Tabla 2. *Categorías para en las dos fases del análisis*

Funciones	Temas
F1 – Definir o explicar términos.	T1 – Actualización.
F2 – Traducir fragmentos del texto.	T2 – Originalidad.
F3 – Mencionar referencias o fuentes.	T3 – Rigor y precisión.
F4 – Exhibir autoridades y/o documentos de apoyo.	T4 – Interés social de las matemáticas.
F5 – Precisar afirmaciones o enunciados.	T5 – Principios filosóficos.
F6 – Señalar complejidades ignoradas en el texto.	T6 – Principios didácticos
F7 – Aportar argumentos suplementarios o anticipar objeciones.	T7 – Aspectos etimológicos
F8 – Realizar digresiones.	T8 – Aspectos históricos

Para mejorar la fiabilidad de las interpretaciones realizadas y aumentar la legitimación del estudio en el sentido de Onwuegbuzie y Leech (2007) se ha seguido una estrategia de triangulación de investigadores (Flick, 2004) en las dos fases del análisis. De este modo, cada uno de los investigadores implicados en el estudio asignaron independientemente categorías a cada nota y, en los casos de discrepancia, estas se asignaron finalmente tras un proceso transaccional.

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Presencia y densidad de notas

En primer lugar, presentamos un resumen sobre el número de notas al pie identificadas en cada una de los seis libros en los que se divide la obra analizada (Tabla 3).

Tabla 3. *Notas al pie en las distintas partes de la obra analizada*

	Notas al pie	Páginas	Densidad
Libro primero	41	82	0,50
Libro segundo	35	51	0,69
Libro tercero	15	40	0,38
Libro cuarto	42	48	0,88
Libro quinto	19	25	0,76
Libro sexto	50	36	1,39
TOTAL	202	282	0,72

Como podemos observar, en términos absolutos las notas son especialmente abundantes (por orden) en los Libros sexto, primero, cuarto y segundo. En términos relativos, los Libros tercero y primero presentan una densidad de notas al pie claramente por debajo de la global, mientras que el Libro sexto muestra una densidad de notas al pie que prácticamente duplica la densidad global de la obra.

La densidad de notas en esta obra es mucho mayor que la detectada en algunas de las obras de otro importante autor de la época, Juan Cortázar (Muñoz-Escolano & Oller-Marcén, en prensa). Oller-Marcén y Meavilla-Seguí (2018) señalan que la *Aritmética* de Salinas y Benítez aborda contenidos que abarcan y extienden los de la Educación Secundaria de la época. De este modo, si comparamos la densidad de notas de la *Aritmética* con la de obras de Cortázar dirigidas a un público similar, vemos que llegan a multiplicarla por 7. Quizás una posible explicación pueda encontrarse en que la *Aritmética* se dirigía específicamente a un ámbito militar. Para poner a prueba esta hipótesis podría ser interesante analizar las notas al pie de la adaptación de la obra que hicieron los autores en 1887, dirigida a la Escuela Preparatoria de Ingenieros y Arquitectos; así como analizar más obras publicadas en España durante la época en el ámbito del Ejército (Velamazán, 1994) o de la Armada (Comas Roqueta, 2015).

Funciones de las notas

En cuanto a las funciones de las notas al pie identificadas en la obra, estas se recogen en la Tabla 4. Destaca la escasez de las notas correspondientes a F2 y la ausencia total de las relativas a F4. La ausencia de estas últimas se puede explicar quizás por tratarse de una obra matemática que probablemente no requiere de argumentos de autoridad.

Tabla 4. Frecuencia de las funciones de las notas presentes en las distintas partes de la obra

	F1	F2	F3	F4	F5	F6	F7	F8
Libro primero	17	1	16	0	3	7	3	26
Libro segundo	11	4	2	0	10	14	5	10
Libro tercero	1	0	1	0	4	6	1	5
Libro cuarto	6	2	3	0	25	13	7	2
Libro quinto	3	1	0	0	4	3	1	12
Libro sexto	17	1	1	0	7	15	9	9
TOTAL	55	9	23	0	53	58	26	64

Dentro de la finalidad F2, que Genette define como “traducir fragmentos de texto”, ubicamos aquellas notas al pie dedicadas a aclarar aspectos notacionales y de simbolismo utilizados en el texto. En la Figura 2 damos un ejemplo. La escasez de estas notas se debe, probablemente, a la relativa ausencia de lenguaje simbólico especializado en una obra de contenido aritmético.

(**) La letra a se escribe debajo de ϵ para indicar que se trata del error absoluto: ϵ_a se enuncia *epsilon sub a*.

Figura 2. Nota al pie correspondiente a F2 (Salinas y Angulo & Benítez y Parodi, 1890, p. 186)

Como se observa, las notas al pie se plantean mayoritariamente con el objetivo de realizar digresiones (F8). Como veremos más adelante cuando se presenten los resultados por temática, esta función suele realizarse habitualmente para abordar aspectos de la etimología del nombre de un concepto matemático presentado en el texto o para señalar alguna nota sobre el origen histórico de un concepto matemático. Por estos motivos, esta función como digresión de las notas al pie suele aparecer acompañada de otras funciones como la de definir y precisar términos (F1) o la de mencionar o exhibir fuentes (F3). En consecuencia, las digresiones están presentes mayoritariamente en los Libros I, II y V, que son principalmente aquellos en los que se introducen por primera vez conceptos matemáticos más básicos, susceptibles de apuntes históricos o etimológicos.

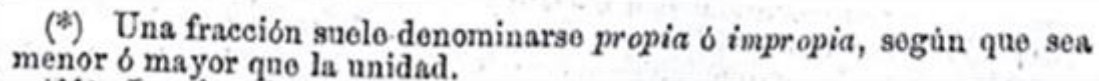
(**) Cuando se adoptó el sistema métrico, los académicos franceses propusieron someter también a la ley decimal las unidades de tiempo y la división de la circunferencia. Las dificultades que presentan la transformación de las tablas y cálculos astronómicos y la de los aparatos de medición construidos, han imposibilitado la adopción del sistema en lo que se refiere al tiempo, si bien los ingleses lo emplean en la circunferencia.

Figura 3. Nota al pie correspondiente a F8 (Salinas y Angulo & Benítez y Parodi, 1890, p. 229)

La abundante presencia de la función F8 (ver un ejemplo en la Figura 3) en este libro marca una nueva diferencia con los resultados obtenidos a partir del análisis de las notas

presentes en diferentes obras de Cortázar (Muñoz-Escolano y Oller-Marcén, en prensa). Esto pone de manifiesto una clara diferencia entre el estilo expositivo de los distintos autores.

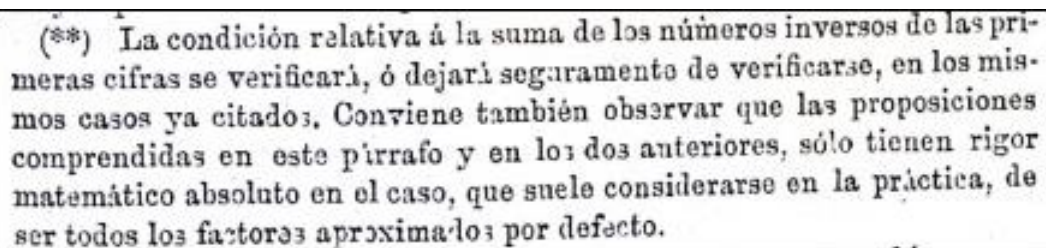
Además de la función de digresión, son también bastante abundantes las relacionadas con las funciones F1 (definir y precisar términos), F5 (precisar afirmaciones o enunciados) y F6 (señalar complejidades ignoradas en el texto). La presencia de la función F1 (ver Figura 4) es especialmente habitual en los dos primeros libros, cuando se introducen términos o conceptos, y nuevamente en el Libro VI de proporcionalidad. En ellas se precisan aspectos de una definición de un concepto que no ha quedado reflejadas en el texto.



(*) Una fracción suele denominarse *propia* ó *impropia*, según que sea menor ó mayor que la unidad.

Figura 4. Nota al pie correspondiente a F1 (Salinas y Angulo & Benítez y Parodi, 1890, p. 85)

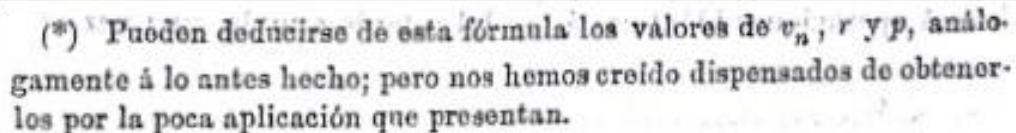
Por su parte, las funciones F5 y F6 están especialmente presentes en el Libro IV, que es el que aborda un contenido matemático de carácter más abstracto y complejo. De hecho, como sucede en la Figura 5, es relativamente común encontrar notas que se corresponden con ambas funciones.



(**) La condición relativa á la suma de los números inversos de las primeras cifras se verificará, ó dejará seguramente de verificarse, en los mismos casos ya citados. Conviene también observar que las proposiciones comprendidas en este párrafo y en los dos anteriores, sólo tienen rigor matemático absoluto en el caso, que suele considerarse en la práctica, de ser todos los factores aproximados por defecto.

Figura 5. Nota al pie correspondiente a F5 y F6 (Salinas y Angulo & Benítez y Parodi, 1890, p. 209)

Por último, las funciones menos habituales, al margen de las ya comentadas F2 y F4, son F3 y F7. Genette define la función F7 como “aportar argumentos suplementarios o anticipar objeciones” (ver Figura 6). En esta función, podemos clasificar también algunas notas en las que se avisa o indica al lector que un resultado o un término pudiera aparecer o poseer otro uso en otro punto de la obra.



(*) Pueden deducirse de esta fórmula los valores de v_n , r y p , análogamente á lo antes hecho; pero nos hemos creído dispensados de obtenerlos por la poca aplicación que presentan.

Figura 6. Nota al pie correspondiente a F7 (Salinas y Angulo & Benítez y Parodi, 1890, p. 265)

La función F3, de la que ya hemos hablado, es escasa en términos absolutos en la obra completa, pero es muy abundante en el Libro I. Su presencia marca una clara distinción en el modo en que los autores abordan el tratamiento de las fuentes. Mientras que Salinas y Benítez incluyen referencias incluso en el cuerpo de la obra (Oller-Marcén & Meavilla-Seguí, 2018), en Cortázar, la mención explícita a fuentes está prácticamente ausente (León Mantero, 2017). Sobre este asunto volveremos más adelante.

Temas abordados en las notas

En la Tabla 5 se recogen los temas abordados por los autores en las distintas notas al pie identificadas en el texto.

Tabla 5. Frecuencia de las temáticas de las notas presentes en las distintas partes de la obra

	T1	T2	T3	T4	T5	T6	T7	T8
Libro primero	3	0	17	1	0	3	8	20
Libro segundo	0	0	27	1	0	2	4	3
Libro tercero	0	0	11	0	0	2	0	1
Libro cuarto	1	0	41	2	0	0	1	3
Libro quinto	0	0	9	7	0	0	6	2
Libro sexto	0	0	31	7	0	2	5	3
TOTAL	4	0	136	18	0	9	24	32

Podemos ver que, como cabría esperar en un texto matemático, predominan claramente las notas relacionadas con el rigor y la precisión (T3), como la que se puede ver en la Figura 7.

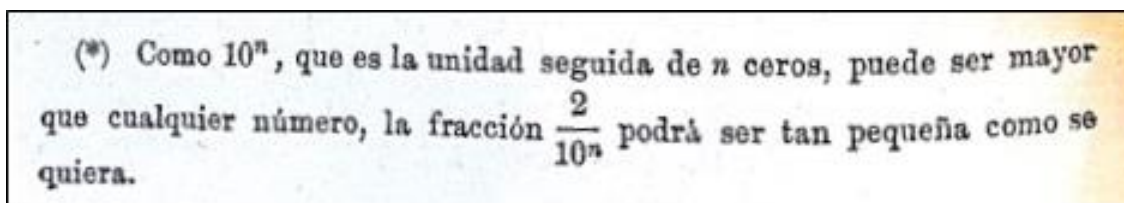


Figura 7. Nota al pie correspondiente a T3 (Salinas y Angulo & Benítez y Parodi, 1890, p. 182)

El resto de las temáticas recogidas por Maz-Machado y Rico (2015), excepto T4, o bien no aparecen (T2 y T5) o bien lo hacen de forma no significativa (T1 y T6). En particular, resulta llamativa la escasez de la temática T6 (principios didácticos) en una obra destinada a servir de libro de texto. Mostramos un ejemplo en la Figura 8.

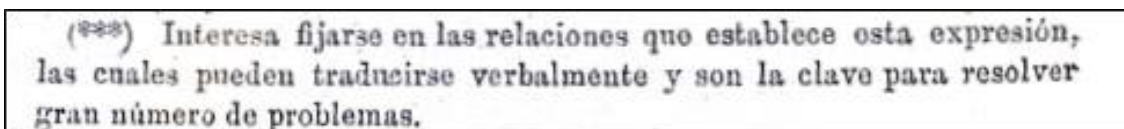


Figura 8. Nota al pie correspondiente a T6 (Salinas y Angulo & Benítez y Parodi, 1890, p. 274)

En el caso de T4 (interés social de las matemáticas), su presencia se concentra principalmente en los Libros V y VI (ver Figura 9). Esto se debe a que estos dos últimos libros son precisamente los dedicados a las aplicaciones prácticas de la aritmética.

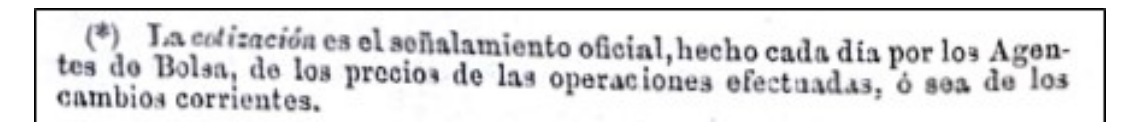
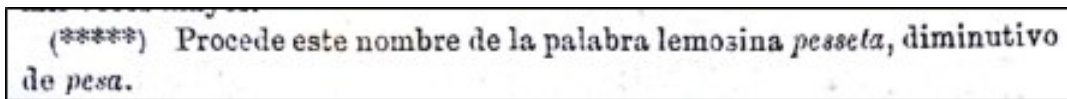


Figura 9. Nota al pie correspondiente a T4 (Salinas y Angulo & Benítez y Parodi, 1890, p. 268)

Al margen de las temáticas recogidas por Maz-Machado y Rico (2015) hemos detectado una presencia bastante relevante de los temas T7 (aspectos etimológicos) y T8 (aspectos históricos) que habían sido apuntados por Oller-Marcén y Meavilla-Seguí (2018). Como

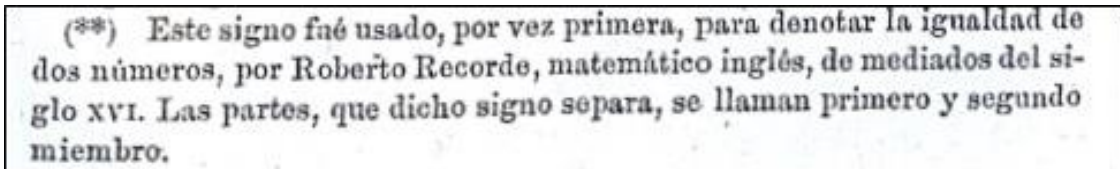
podemos observar en la Tabla 5, los 24 comentarios con contenido etimológico (ver Figura 10) se reparten de forma bastante equitativa por toda la obra.



(****) Procede este nombre de la palabra lemosina *pesseta*, diminutivo de *pesa*.

Figura 10. Nota al pie correspondiente a T7 (Salinas y Angulo & Benítez y Parodi, 1890, p. 225)

Sin embargo, aunque todos los Libros de la obra contienen al menos una nota al pie con contenido histórico, la mayor parte de los 32 comentarios relacionados con este tipo de contenido (ver Figura 11), se concentran en el Libro I.



(**) Este signo faé usado, por vez primera, para denotar la igualdad de dos números, por Roberto Recorde, matemático inglés, de mediados del siglo XVI. Las partes, que dicho signo separa, se llaman primero y segundo miembro.

Figura 11. Nota al pie correspondiente a T7 (Salinas y Angulo & Benítez y Parodi, 1890, p. 13)

Estos temas T7 y T8 aparecen vinculados generalmente a la función F8 y su presencia es relativamente poco habitual. Esta tendencia a realizar digresiones al margen del discurso puramente matemático está insinuada en parte en las palabras de Octavio de Toledo (1912, p. 195) que, en su obituario, se refería a Manuel Benítez y Parodi en los siguientes términos:

Como Profesor de Matemáticas y como expositor, nuestro biografiado era inimitable; tenía la envidiable habilidad de hacer interesante y atractiva la materia que exponía; su ingenio y gracejo natural le llevaban a mezclar términos gráficos militares en la exposición y enseñanza de materias matemáticas, y esta mezcla ingeniosa contribuía no poco a fijar la atención del oyente y a hacer amenísimas teorías, al parecer abstrusas y desabridas

Parece, por tanto, que el propio estilo expositivo y docente del autor puede verse reflejado en los temas y funciones de las notas al pie presentes en su obra.

Aspectos etimológicos e históricos

Como acabamos de adelantar, la presencia de los temas T7 y T8, que abordan aspectos etimológicos e históricos, es un rasgo poco habitual y muy específico de la obra analizada. Estos temas no aparecen en absoluto en las notas al pie de las obras de Cortázar (Muñoz-Escolano & Oller-Marcén, en prensa). De hecho, en relación con la presencia de elementos históricos en las obras matemáticas españolas de principios del siglo XIX, Garma Pons (1980, p. 70) señala que: “los textos que se usaron en la enseñanza de las matemáticas en la enseñanza superior fueron los de Vallejo, Cortázar, [...] junto con las traducciones de textos franceses [...]. Ninguno de ellos hace referencias históricas”.

A lo largo del texto aparecen 24 notas que contienen información sobre la etimología o el origen de distintos términos. En la Tabla 6 se listan los términos cuyo origen se proporciona.

Tabla 6. *Términos sobre cuyo origen o etimología se proporciona información en notas al pie*

Términos	
Libro primero	Cálculo, Algoritmo, Dígito, Millón/Billón/Trillón..., Cero, Cociente, Congruente, Primo
Libro segundo	Magnitud, Módulo, Fracción, Inconmensurable
Libro tercero	n/a
Libro cuarto	Límite
Libro quinto	Metro, Litro, Gramo, Peseta, Día, Quintal métrico/Tonelada métrica
Libro sexto	Esquema, Incógnita, Fórmula, Aligación, Conjunta

Podemos observar que generalmente se trata de términos técnicos (congruente, primo, límite, etc.). Llama la atención que se explique el origen de los nombres de las unidades del Sistema Métrico Decimal (ver Figura 12). A este respecto hay que tener en cuenta que el uso de este sistema no se impuso por ley en España hasta 1849 (Aznar, 1997) por lo que el uso de estos términos podría no estar aún completamente extendido entre los lectores de la obra.

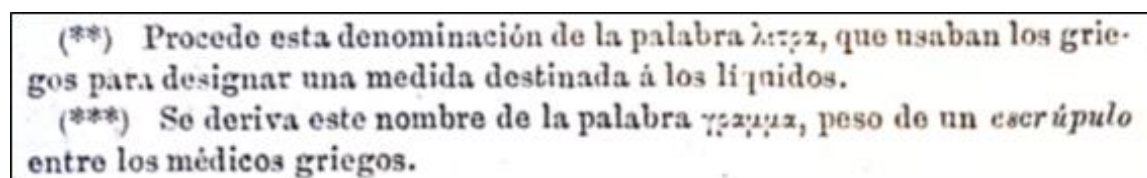


Figura 12. Información etimológica (Salinas y Angulo & Benítez y Parodi, 1890, p. 225)

Muchas de las notas con contenido histórico hacen mención a personajes, en su mayor parte matemáticos y científicos. En la Tabla 7 recogemos los 34 personajes mencionados en notas al pie en los distintos libros que componen la obra (algunos de ellos en más de una ocasión).

Tabla 7. *Personajes históricos mencionados en notas al pie*

Personajes históricos	
Libro primero	Wronski, Vieta, Harriot (2), Recorde, Rudolff, Gunter, Oughtred, Leibnitz (3), Pitágoras, Descartes, Pell, Leopoldo de Pisa, Baltzer, Gauss, Eratóstenes, Tolomeo Evergetes
Libro segundo	Leonardo de Pisa, Brounker, Juan Muller (Regiomontano)
Libro tercero	Cardano, Tartaglia, Rudolff
Libro cuarto	Arquímedes, D'Alembert, Duhamel, Rubini, Arbogast
Libro quinto	Císcar, Jorge Juan, Ulloa, Delambre, Mechain, Godin, Bouguer, Lacondamine
Libro sexto	Arquímedes (2), Wronski

Observamos que entre los nombres reseñados en la obra encontramos desde autores de la antigüedad clásica (Arquímedes, Eratóstenes) hasta contemporáneos de los autores (Rubini); y tanto españoles como extranjeros.

Por otro lado, hay un gran número de notas al pie que contienen información sobre el origen de diversas notaciones (símbolos de las operaciones, signo de igualdad, etc.). Es el caso de la Figura 13, donde vemos un ejemplo en el que no solo se informa sobre el origen y evolución de la disposición de los datos en una división, sino que se presenta la figura del matemático Leonardo de Pisa (nótese la errata).

(*) El conjunto de las líneas vertical y horizontal, que sirven para disponer convenientemente el dividendo, el divisor y el cociente, se llama *caja de la división*. En un principio sólo se usó la línea vertical, llamada *barra*, que fué empleada, por vez primera, por Leopoldo de Pisa, matemático italiano de principios del siglo XIII.

Figura 13. Información sobre notación (Salinas y Angulo & Benítez y Parodi, 1890, p. 39)

Estas notas de contenido histórico, como indican Oller-Marcén y Meavilla-Seguí (2018, p. 175) “anticipa, en cierto modo, el interés posterior por introducir la historia en la enseñanza de las matemáticas”. Actualmente es habitual encontrar elementos de historia de las matemáticas en libros de texto con diferentes objetivos (Madrid, Maz-Machado, León-Mantero & López-Esteban, 2018), pero a finales del XIX, como ya hemos indicado, no era usual. En cuanto a los objetivos perseguidos por los autores con estas notas al pie, son diversos, y se corresponden con algunos de los señalados por Fauvel (1991).

Además del carácter motivador genérico que puede tener esta información, la nota presentada en la Figura 13 relaciona la técnica de la época con otra anterior; mientras que la Figura 14 muestra un caso en que la información proporcionada contribuye a resaltar el carácter multicultural de las matemáticas.

(*) Estas cifras, que han experimentado algunas modificaciones en su forma, son de origen indio, si bien fueron introducidas por los árabes cuando se establecieron en España. Por ese motivo algunos atribuyen a éstos su invención; pero los mismos árabes declaran en sus obras aquella procedencia, llamándolas cifras indias. Lo comprueba también el nombre *Hendes-séh*, que daban a su aritmética, que quiere decir *la ciencia indiana*.

Figura 14. Carácter multicultural (Salinas y Angulo & Benítez y Parodi, 1890, p. 8)

CONCLUSIONES

En este trabajo hemos continuado con una reciente y poco explorada línea de trabajo que se inició en (Muñoz-Escolano & Oller-Marcén, en prensa). El estudio de las notas al pie presentes en libros de texto de matemáticas y, en concreto, de su función y de los temas tratados en ellas puede aportar información interesante sobre los autores y sobre el carácter de la obra.

De hecho, en el trabajo citado, ya se apreció la posibilidad de que, dentro de las obras de un mismo autor, el uso de las notas al pie fuese diferente en función de los destinatarios objetivos de cada texto. Con los resultados obtenidos en el estudio que nos ocupa, podemos plantear la hipótesis de que el uso de las notas al pie también se vea influido y refleje las características específicas de los autores. De hecho, hemos detectado grandes diferencias entre el uso de notas al pie por parte de Juan Cortázar y del binomio Salinas y Benítez. Estas diferencias se manifiestan tanto en la cantidad y densidad de notas en las obras, como en sus funciones y temas. Evidentemente, serán necesarios trabajos más amplios y sistemáticos para poder explorar esta idea en profundidad.

En cuanto a los instrumentos analíticos utilizados, debemos hacer algunos comentarios. Por un lado, parece necesario realizar una labor de adaptación de las categorías F1 - F8 al contexto de los libros de texto de matemáticas. Hay que tener en cuenta que estas

funciones de los pies de página propuestas por Genette (2001) se plantearon para el análisis de obras literarias (aunque Genette hable en algún punto de libros educativos). En primer lugar, esto obliga a redefinir funciones como F2 (traducir fragmentos del texto) que, en nuestro ámbito, pueden estar relacionadas con la explicación del significado de símbolos matemáticos o con la “traducción” entre distintos sistemas de representación. En segundo lugar, pensamos que resultará indispensable (y algo más complejo) detallar y refinar el significado de las funciones F5 y F6. Estas funciones suelen estar asociadas a procesos de demostración y sería necesario proporcionar definiciones de las mismas en términos relacionados con dichos procesos.

Por otro lado, si bien las categorías T1 - T6 (extraídas del trabajo de Maz-Machado y Rico (2015) para clasificar los temas abordados en las notas al pie) fueron adecuadas para el análisis de la obra de Cortázar, habrían resultado claramente insuficientes para el análisis realizado en este trabajo. Además de esta ampliación, y al igual que en el caso anterior, pensamos que será necesario refinar alguna de ellas. Es el caso, especialmente de la categoría T3 (rigor y precisión) que está resultando la más frecuente con gran diferencia. El gran número de notas al pie clasificadas en este tema sugiere que quizás sea posible obtener subcategorías de la misma que permitan realizar un análisis más fino de los datos.

Los futuros trabajos a realizar en esta línea, en los que se consideren muestras más amplias y con una mayor variabilidad, nos permitirán también desarrollar instrumentos válidos para el análisis de las notas al pie de textos matemáticos.

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo se ha realizado dentro del Grupo S60_20R (Gobierno de Aragón y Fondo Europeo de Desarrollo Regional).

REFERENCIAS

- Andrade, M.M., & de Souza Ferreira, M.P. (2015). Uma análise paratextual da obra “arithmetic theoreico-pratica”. *Conexões-Ciência e Tecnologia*, 9(4), 153-165.
- Aznar, J.V. (1997). *La unificación de los pesos y medidas en España durante el siglo XIX*. Tesis doctoral inédita. Valencia: Universidad de Valencia.
- Barbosa, E.M. (2014). *As matemáticas puras e mistas e a Academia Real Militar do Rio de Janeiro: análise de paratextos de tratados, elementos e compêndios*. Tesis de maestría inédita. Sao Paulo: Universidad de Sao Paulo.
- Carrillo Gallego, D. (2005). *La Metodología de la aritmética en los comienzos de las Escuelas Normales (1838-68) y sus antecedentes*. Tesis doctoral inédita. Murcia: Universidad de Murcia.
- Christiansen, A. (2017). The function of a preface: Contextual information and didactical foundation described in the preface of a textbook in arithmetics from 1825. En K. Bjarnadóttir, F. Furinghetti, M. Menghini, J. Prytz y G. Schubring, (Eds.). “Dig where you stand” 4. *Proceedings of the fourth International Conference on the History of Mathematics Education* (pp. 415-416). Torino: Edizioni Nuova Cultura.
- Comas Roqueta, J. (2015). *La enseñanza de las matemáticas en la armada española en el siglo XIX*. Tesis doctoral inédita. Zaragoza: Universidad de Zaragoza.

- Conejo, L. (2015). *Análisis histórico de las demostraciones en libros de texto sobre los teoremas de límites y continuidad: de la Ley General de Educación a la Ley Orgánica de Educación*. Tesis doctoral inédita. Valladolid: Universidad de Valladolid.
- Fan, L., Zhu, Y., & Miao, Z. (2013). Textbook research in mathematics education: development status and directions. *ZDM Mathematics Education*, 45(6), 633-646.
- Fauvel, J. (1991). Using history in mathematics education. *For the Learning of Mathematics*, 11(2), 3-6.
- Flick, U. (2004). Triangulation in qualitative Research. En U. Flick, E. von Kardoff, & I. Steinke I. (Eds.), *Companion to Qualitative Research* (pp. 178-183). London: SAGE.
- García Camarero, E. (1984). La matemática en la España del siglo XIX. En M. Hormigón (coord.), *La ciencia y la técnica en España entre 1850 y 1936* (pp. 115-130). Jaca: SEHCYT.
- Garma Pons, S. (1980). Los Matemáticos Españoles y la Historia de las Matemáticas del siglo XVII al siglo XIX. En S. Garma (Coord.), *El científico español ante su historia: la ciencia en España entre 1750-1850: I Congreso de la Sociedad Española de Historia de las Ciencias* (pp. 59-72). Madrid: SEHCYT.
- Genette, G. (2001). *Umbrales*. México: Siglo XXI.
- Gómez, B. (2011). Marco preliminar para contextualizar la investigación en historia y educación matemática. *Epsilon*, 28(1), 9-22.
- Gómez, B. (2018). El uso de la historia en la educación matemática: El caso de los gemelos póstumos. *Matemáticas, Educación y Sociedad*, 1(1), 11-21.
- González Astudillo, M.T. (2009). La investigación en historia de la educación matemática. *Educación y Ciencia*, 1(36), 37-58.
- González Astudillo, M.T., & Sierra Vázquez, M. (2004). Metodología de análisis de libros de texto de matemáticas: los puntos críticos en la enseñanza secundaria en España durante el siglo XX. *Enseñanza de las Ciencias*, 22(3), 389-408.
- León-Mantero, C. (2017). *Juan Cortázar y su contribución a la formación matemática española en el siglo XIX*. Tesis doctoral inédita. Córdoba: Universidad de Córdoba.
- López-Esteban, C. (2019). La institucionalización del análisis matemático en el siglo XVIII a través de libros históricos y su reflejo en la enseñanza para Educación Secundaria en España a través del análisis de manuales. En J. M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J. M. Muñoz-Escolano y Á. Alsina (Eds.). *Investigación en Educación Matemática XXIII* (pp. 95-116). Valladolid: SEIEM.
- Lune, H., & Berg, B. L. (2017). *Qualitative Research Methods for the Social Sciences*. Essex: Pearson.
- Madrid, M. J., Maz-Machado, A., León-Mantero, C., & López-Esteban, C. (2018). La historia de las matemáticas en libros de texto de matemáticas de los primeros cursos de la ESO. En L. J. Rodríguez-Muñiz, L. Muñiz-Rodríguez, A. Aguilar-González, P. Alonso, F. J. García García y A. Bruno (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXII* (pp. 310-319). Gijón: SEIEM.
- Maraví Zabaleta, L. (2019). Los números complejos en el texto sobre aritmética de G.M. Bruño. *Matemáticas, Educación y Sociedad*, 2(1), 1-11.
- Maz, A. (2005). *Los Números Negativos en España en los siglos XVIII y XIX*. Tesis

- doctoral inédita. Granada: Universidad de Granada.
- Maz-Machado, A., & Rico, L. (2015). Principios didácticos en textos españoles de matemáticas en los siglos XVIII y XIX. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 18(1), 49-76.
- McCulloch, G. (2004). *Documentary research in education, history, and the social sciences*. New York: Routledge/Falmer.
- Muñoz-Escolano, J.M., & Oller-Marcén, A.M. (2020a). Análisis de los prólogos de los textos algebraicos publicados en España durante el siglo XVI. *Historia y Memoria de la Educación*, 11, 51-85.
- Muñoz-Escolano, J.M., & Oller-Marcén, A.M. (2020b). Paratextos de libros españoles de matemáticas del siglo XVIII. El caso de los prólogos. En C. López-Esteban & A. Maz-Machado (eds.) *Las Matemáticas en España durante el siglo XVIII a través de los libros y sus autores* (pp. 63-92). Salamanca: Ediciones Universidad de Salamanca.
- Muñoz-Escolano, J.M., & Oller-Marcén, A.M. (En prensa). Notas al pie en libros de texto españoles del siglo XIX. El caso de Juan Cortázar. En *Investigación en Educación Matemática XXIV* (pp. 1-8). Valencia: SEIEM.
- Octavio de Toledo, L. (1912). Sección Biográfica [Biographical section]. *Revista de la Sociedad Matemática Española*, 6, 193-196.
- Oller-Marcén, A.M., & Meavilla Seguí, V. (2018) Arithmetic in the Spanish Army at the end of the 19th century: The textbooks by Salinas and Benítez. En Furinghetti, F. & Karp, A. (Eds.) *Researching the History of Mathematics Education. An International Overview* (pp. 167-187). New York: Springer.
- Oller-Marcén, A.M., & Muñoz-Escolano, J.M. (2019). Conceptions about mathematics, its teaching and its learning in the Compendio Mathematico (1707) written by the Spanish Thomas Vicente Tosca (1651-1723). *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, 33(64), 635-648.
- Onwuegbuzie, A.J., & Leech, N. L. (2007). Validity and qualitative research: An oxymoron? *Quality & Quantity*, 41(2), 233-249.
- Picado, M. (2012). *El sistema Métrico Decimal en libros de texto de matemáticas en España durante la segunda mitad del siglo XIX (1849-1892)*. Tesis doctoral inédita. Granada: Universidad de Granada.
- Puig, L. (2006). Vallejo perplejo. En A. Maz, M. Torralbo, & L. Rico (Eds.). *José Mariano Vallejo, el matemático ilustrado. Una mirada desde la educación matemática* (pp. 113-138). Córdoba: Servicio de Publicaciones de la Universidad de Córdoba.
- Ruiz, J.M. (2004). La enseñanza militar en el alto mando: Historia, organización y metodología. *Educación XXI*, 9, 199-220.
- Ruiz-Berrio, J. (1976). El método histórico en la investigación histórica de la Educación. *Revista Española de Pedagogía*, 134, 449-475.
- Salinas y Angulo, I., & Benítez y Parodi, M. (1884). *Aritmética*. Madrid: Imprenta y fundición de Manuel Tello.
- Salinas y Angulo, I., & Benítez y Parodi, M. (1890). *Aritmética*. Segunda edición. Madrid: Establecimiento Tipográfico de "La Justicia".
- Sánchez Ron, J.M. (1992). Las ciencias Físico-Matemáticas en la España del siglo XIX.

Ayer, 7, 51-84.

Scott J. (1990). *A matter of record, documentary sources in social research*. Cambridge: Polity Press.

Velamazán, M.A. (1994). *La enseñanza de las Matemáticas en las Academias Militares en España en el siglo XIX*. Cuadernos de Historia de la Ciencia, 7. Zaragoza: SEHCTAR.

Vitrac, B. (2008). Promenade dans les préfaces des textes mathématiques grecs anciens. En: P. Radelet-de-Grave (Ed.). *Liber amicorum Jean Dhombres* (pp. 519-556). Turnhout: Brepols.

José M. Muñoz-Escolano
Universidad de Zaragoza
jmescola@unizar.es

Antonio M. Oller-Marcén
Centro Universitario de la Defensa de Zaragoza
oller@unizar.es