



RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE PROPORCIONALIDADE POR MEIO DA REDUÇÃO À UNIDADE

SOLVING PROBLEMS OF PROPORTIONALITY BY REDUCTION TO UNITY

Emanuel Arcanjo Jaconiano¹
Augusto Cesar de Castro Barbosa²
Cláudia Ferreira Reis Concordido³
Marcus Vinicius Tovar Costa⁴

Resumo

Este trabalho é uma proposta de uma forma didática alternativa para o ensino de proporcionalidade, usando como metodologia a resolução de problemas baseada em Polya, com foco no método de redução à unidade. Ao analisar alguns livros didáticos, entendeu-se que a abordagem atual sobre esse conceito, em muitos casos, pode não ser a mais adequada, dificultando, assim, o aprendizado por parte dos alunos. Por meio de um trabalho realizado na rede particular, verificou-se em turmas do primeiro ano do Ensino Médio que o conhecimento prévio acerca de proporcionalidade estava abaixo do que se esperava e que a proposta de ensino por meio da metodologia resolução de problemas, assim como o emprego da redução à unidade, se mostrou bastante satisfatória.

Palavras-chave: Proporcionalidade. Redução à unidade. Resolução de problemas.

Abstract

This work is a proposal of an alternative didactic approach to teach proportionality, based on Polya problem solving methodology, focusing on the method of reduction to unity. By analysing some textbooks we realized that the current approach to this concept in many cases may be not the most appropriate, difficulting the students learning. We have verified in a work developed in a private High School (1st grade) that the primary knowledge about proportionality was not as good as expected. The teaching proposal here, by solving problems, as well as the use of reduction to unity, was show to be quite satisfactory.

Keywords: Proportionality. Reduction to unity. Problems Solving.

¹ Mestre em Matemática; PROFMAT – Polo IME/UERJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil. E-mail: jacozinho2@yahoo.com.br.

² Doutor em Física; Professor Associado da Universidade do Estado do Rio de Janeiro/UERJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil. E-mail: accb@ime.uerj.br.

³ Doutora em Matemática; Professora Associada da Universidade do Estado do Rio de Janeiro/UERJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil. E-mail: concordido@ime.uerj.br.

⁴ Doutor em Física; Professor Associado da Universidade do Estado do Rio de Janeiro/UERJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil. E-mail: mvtc@uerj.br.

Introdução

Grande parte do que se aborda de Matemática na vida escolar do aluno depende de um bom entendimento do assunto grandezas proporcionais. Apesar disso, a maioria dos alunos, ao final do Ensino Fundamental e início do Ensino Médio, não tem noção do que significa uma grandeza, muito menos do que significam grandezas diretamente e inversamente proporcionais. Isso acaba deixando lacunas na compreensão de conteúdos que estão relacionados a esse tópico.

O principal objetivo deste trabalho é analisar a experiência de apresentar o tema grandezas proporcionais, usando o método de redução à unidade, por meio da metodologia resolução de problemas. Outro objetivo é oferecer um caminho que contribua para transformar a aprendizagem de Matemática em algo mais leve e prazeroso.

Com essa proposta, queremos ensinar os alunos a pensar e não a realizar suas tarefas de forma automatizada. A ideia central é substituir, sempre que possível, as fórmulas pela redução à unidade. Nesse sentido, a resolução de problemas surge como uma alternativa adequada para despertar a curiosidade do aluno em relação aos diversos tópicos de Matemática a serem estudados e desenvolver, de forma eficiente, a capacidade de utilizá-los sempre que necessário.

Resolução de Problemas como Metodologia de Ensino

É bastante comum professores de Matemática e livros didáticos usarem as expressões “resolver problemas” ou “resolver exercícios” como se fossem sinônimas. Certo cuidado com essas expressões é necessário, pois muitos dos que trabalham em Educação Matemática salientam a importância dessa distinção.

Silveira (2001 apud SOUSA, 2005, p. 4) afirma que um problema em Matemática é uma situação que exige “a descoberta de informações matemáticas desconhecidas para a pessoa que tenta resolvê-lo”. Em contrapartida, um exercício pode ser visto como uma atividade mais imediata. Ainda de acordo com Silveira (2001 apud SOUSA, 2005, p. 4), exercício “é uma atividade de treinamento no uso de alguma habilidade/conhecimento matemático já conhecido pelo resolvidor, como a aplicação de um algoritmo conhecido”.

Segundo Dante (1991, p. 25), “é possível por meio da resolução de problemas desenvolver no aluno iniciativa, espírito explorador, criatividade, independência e a

habilidade de elaborar um raciocínio lógico e fazer uso inteligente e eficaz dos recursos disponíveis”. Vale ressaltar que a ideia que acompanha o discurso desses autores é que os problemas não devem ser só resolvidos, mas também investigados e explorados.

Nessa abordagem, é apontada ainda a necessidade imperativa de que o professor amplie seus horizontes e de seus alunos, buscando estratégias diferentes para atacar os problemas, não engessando sua maneira de pensar. Com esse procedimento, torna-se possível para os estudantes aprender novos conceitos de forma motivadora e reflexiva. O mais importante é, partindo de uma determinada estratégia, resolver problemas diferentes e resolver um determinado problema com estratégias distintas (DANTE, 1991).

Infelizmente, o modelo adotado por muitas escolas é exatamente o oposto, usando materiais apostilados, o que faz com que o professor contribua muito pouco para o aprofundamento dos conceitos que se pretende ensinar. Além disso, o tempo dispensado aos conteúdos é mínimo. Dessa forma, o que prevalece são estudantes que agem de forma pragmática, decorando fórmulas e modelos de resolução de questões, com pouca autonomia de raciocínio.

Heurística de George Polya

Polya⁵ foi o primeiro a apresentar uma heurística na resolução de problemas de Matemática. Suas ideias foram influenciadas por Descartes, Skinner e Wallas e seu trabalho influenciou grandes pesquisadores nessa área.

René Descartes teve as primeiras ideias relevantes no sentido da heurística para resolução de problemas. Sua ambição era reduzir todo problema a um raciocínio de ordem matemática. Em sua obra *Discurso do Método*, de 1637, ele tinha a pretensão de conduzir a própria razão por meio da lógica e encontrar a verdade nas ciências (FROST, 1986, apud BALIEIRO FILHO, 2004). Para isso, ele criou uma estratégia dividida em quatro etapas para o julgamento de um determinado fato. A primeira propõe jamais aceitar algum fato como verdadeiro, se ainda restar alguma possibilidade de pô-lo em dúvida. A segunda consiste em dividir cada uma das dificuldades que se deve examinar em tantas parcelas quantas possíveis e necessárias para melhor resolvê-las. A terceira coloca como o caminho lógico ordenar o raciocínio iniciando um estudo a partir dos objetos mais simples para, gradativamente, atingir

⁵ George Polya (Hungria, 1887- EUA, 1985), matemático e professor que se dedicou especialmente ao estudo da resolução de problemas de Matemática. Trabalhou ainda numa grande variedade de tópicos, que incluíam teoria dos números, combinatória e teoria das probabilidades.

o mais complexo. Na última etapa, deve-se rever todo o processo de forma a se certificar de que nada foi omitido.

Encontramos também ideias originais em relação à heurística da resolução de problemas, nos trabalhos do psicólogo social Graham Wallas e nos de Burrhus Frederic Skinner. Em 1926, no livro *The Art of Thought*, Wallas (2014) defendeu, assim como Descartes, quatro fases para a resolução de problemas: a saturação, que significa trabalhar no problema até esgotar todas as possibilidades de sua compreensão; incubação, quando o problema sai do consciente e deixa o subconsciente tomar conta dele; inspiração, quando a solução do problema chega subitamente, sem que se esteja pensando nele; por fim, a verificação, em que se deve conferir a solução para se ter certeza de sua correção.

Para Skinner (1972), resolver um problema é mais do que apresentar sua solução, envolve principalmente dar os passos necessários para tornar a solução mais provável. A resolução de um dado problema necessita algumas vezes de um conjunto de respostas de manipulação do ambiente, como a classificação e reclassificação dos dados a partir de variados critérios, a comparação entre os resultados obtidos, a separação em classes diferentes. Sob o ponto de vista da teoria comportamental de Skinner, outro aspecto relevante na resolução de problemas é a forma de controle da resposta. A resolução de problemas pode envolver comportamentos governados por regras, no entanto, “é mais provável que um comportamento criativo ocorra sob o controle das contingências, pois regras costumam especificar respostas já conhecidas e ocorridas que foram anteriormente reforçadas” (BARBOSA, 2003, p. 187).

A heurística de Polya para a resolução de problemas envolve quatro etapas: compreender o problema; estabelecer um plano; executar o plano; fazer um retrospecto. O primeiro passo na resolução de problemas é entender o que está sendo pedido, ou seja, compreender bem as suas regras, separar as hipóteses, definir bem as variáveis para sabermos onde queremos chegar. Já para o estabelecimento de um plano, é possível envolver diversas estratégias. Pode ser de grande ajuda escrever as ideias que surgirem e selecionar o que é relevante. Em seguida, precisa-se adaptar e combinar essas ideias no problema. Então, procura-se as semelhanças com outros problemas conhecidos. Pode-se ainda tentar resolver o problema por partes ou representar as informações disponíveis em tabelas, gráficos ou diagramas.

Depois de compreender e planejar, é chegado o momento de executar o plano. Se as etapas anteriores foram bem desenvolvidas, esta, provavelmente, se tornará a etapa mais fácil

do processo. A última etapa talvez seja a mais importante e, com certeza, a que menos realizamos em sala de aula. Depois de resolver um problema, é muito importante checar o resultado e ver se ele está de acordo com os dados, se faz sentido. Deve ser verificado, então, se é possível encontrar novas rotas para solucionar o problema. Novos caminhos que levam ao mesmo destino nos dão conforto e confiança na hora de ensinar.

Apesar de sua heurística ser referência até os dias atuais, o trabalho de Polya não ficou isento de críticas. Alan Schoenfeld, matemático e pesquisador do desenvolvimento cognitivo, do Departamento de Matemática de Berkeley, concorda que o processo de ensino e aprendizagem da Matemática deve estar ligado diretamente ao domínio de resolução de problemas. Porém, Schoenfeld verificou que as tentativas de ensinar os estudantes a usarem os métodos de Polya não haviam sido implantadas com êxito e que a razão para isso é que as etapas sugeridas são descritas, mas não prescritas, isto é, provavelmente, falta em seu trabalho uma especificação maior de como fazer (MENINO, 2013). Segundo Schoenfeld, a resolução de problemas deveria:

(a) Ajudar os estudantes a desenvolver um maior número de estratégias de resolução de problemas mais específicas que se ligam, mais claramente, a classes específicas de problemas; (b) Ensinar estratégias metacognitivas, de modo que os estudantes aprendam quando usar suas estratégias e conhecimento do conteúdo em resolução de problemas; (c) Desenvolver formas de melhorar as crenças dos estudantes sobre a natureza da matemática, a resolução de problemas e suas próprias competências pessoais. (ENGLISH; LESH; FENNEWALD, 2008, apud MENINO, 2013, p. 107)

Uma década após as propostas de Schoenfeld terem sido feitas, vários teóricos apontaram pouca praticidade sobre as técnicas apresentadas para resolução de problemas no âmbito escolar. Há ainda muito a evoluir e uma possível explicação para isso se deve às ideias de Schoenfeld terem potencializado as falhas da heurística de Polya para um estágio mais elevado. Seus críticos ressaltam que:

A pesquisa sobre resolução de problemas matemáticos estagnou durante grande parte da década de 1990 e início deste século. Além disso, a pesquisa que foi realizada não parece ter acumulado um conhecimento substantivo orientado para o futuro, sobre como se pode efetivamente promover a Resolução de Problemas dentro e fora da sala de aula. Esta falta de progresso é devida principalmente aos muitos anos de elaborações repetidas de concepções governadas por regras de competência em resolução de problemas. Chegou a hora de considerar outras opções para avançar na pesquisa em resolução de problemas e desenvolvimento curricular – “nós temos destacado a necessidade de reexaminar as hipóteses de nível fundamental sobre o que significa compreender conceitos e processos de resolução de problemas matemáticos [...]”. (ENGLISH; LESH; FENNEWALD, 2008, apud ONUCHIC, 2013, p. 99)

Segundo Lester e Koehle (2003, apud ONUCHIC, 2013, p. 98), há, contudo, nítidos sinais de melhora, “o pêndulo está começando a balançar de volta para a resolução de problemas em nível internacional, dando ímpetus a novas perspectivas sobre a natureza da resolução de problemas e seu papel na matemática escolar”.

No Brasil, foram criados os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) que entraram em vigor em 1998. Os PCN (BRASIL, 1997, p. 30), na área de Matemática, destacam a importância da resolução de problemas, colocando o aluno como “agente da construção do seu conhecimento”, e defendem que “a situação-problema é o ponto de partida da atividade matemática e não a definição” (BRASIL, 1998, p. 40).

Já no Ensino Médio, os PCN sugerem que este seja desenvolvido não mais por disciplina, mas por áreas do conhecimento. Neste sentido, agrupam Ciências da Natureza, Matemática e suas tecnologias. Entretanto, no que se refere exclusivamente à Matemática, a orientação sugere que essa disciplina contribua “para o desenvolvimento de processos de pensamento e a aquisição de atitudes, cuja utilidade e alcance transcendem o âmbito da própria Matemática, podendo formar no aluno a capacidade de resolver problemas genuínos” (BRASIL, 2000, p. 40).

Acredita-se que resolver problemas de Matemática constitui a espinha dorsal da forma de estruturar nossas aulas para que o aprendizado ocorra de forma efetiva. No entanto, alguns questionamentos ainda se impõem, como, por exemplo, quanto à adequação da preparação da maioria dos professores para o desenvolvimento desse tipo de metodologia em sala de aula e se existe lugar para essa metodologia em um sistema de ensino, como o nosso, que é voltado principalmente para a aprovação no ENEM (ONUCHIC; ALLEVATO, 2005).

Grandezas Proporcionais – Um breve histórico

Historicamente, se atribuem aos gregos os primeiros trabalhos sobre razões e proporções. No livro V dos Elementos de Euclides pode-se encontrar a definição de Eudoxo sobre razão entre grandezas proporcionais (ROQUE; PITOMBEIRA, 2012). Esse conceito de proporção, estabelecido por Eudoxo, contribuiu para que fossem enfrentados os problemas decorrentes do surgimento dos incomensuráveis, que havia colocado em dúvida as demonstrações que faziam o uso da proporcionalidade como estabelecida até aquele momento.

Vale mencionar que o conceito de razão na matemática grega envolvia uma relação de tamanho entre duas grandezas, que não era adequada. O conceito introduzido por Eudoxo estabelecia que “grandezas têm uma razão de uma para a outra se são capazes, quando multiplicadas, de excederem uma à outra” (BOYER; MERZBACH, 1991, p. 113). Roque e Pitombeira salientam que

Como a razão entre duas grandezas incomensuráveis não podia ser associada à razão de suas medidas, Eudoxo introduziu a noção de razão de grandezas, na qual o conceito de razão tem uma natureza puramente geométrica. Uma razão entre grandezas não é idêntica a uma razão entre números, ainda que a primeira inclua a segunda como caso particular (quando as grandezas forem comensuráveis). (ROQUE; PITOMBEIRA, 2012, p. 104)

Até a construção rigorosa dos números reais por Dedekind, em meados do século XIX, a geometria continuava a ser a base da representação das proporções. A partir daí, a ideia de razão e proporção pôde ser abordada no contexto algébrico e, dessa forma, se tornou mais adequado falar em variáveis proporcionais em vez de grandezas proporcionais (ÁVILA, 1983).

Apresentação do Tema Proporcionalidade no Ensino Fundamental

O tópico razão e proporção é usualmente introduzido no sétimo ano utilizando-se de definições nos moldes das que seguem (ÁVILA, 1983).

Definição Duas variáveis x e y são *diretamente proporcionais* se existe uma constante positiva k tal que $y = kx$. As variáveis x e y são *inversamente proporcionais* se $y = k/x$. Em ambos os casos, k é chamada *constante de proporcionalidade*.

Definição Se várias variáveis x, y, z, w e p estão relacionadas por uma equação do tipo

$$p = k \frac{x \cdot y}{z \cdot w}, \quad (1)$$

onde k é uma constante positiva, então dizemos que p é diretamente proporcional a x e a y , e inversamente proporcional a z e a w .

O professor Elon Lages Lima (LIMA, 1986) argumenta que, apesar de correta do ponto de vista da Matemática, essa definição é insuficiente quanto à sua aplicabilidade. Ele

aponta que para saber, por exemplo, se p é diretamente proporcional a x e a y , e inversamente proporcional a z e a w , é necessário, em primeiro lugar, conhecer a fórmula (1), que não é dada no enunciado da questão. Para obtê-la, é necessário conhecer essas grandezas e suas propriedades, para daí deduzir a proporcionalidade. Concordamos com essa crítica do Prof. Elon e ainda quando ele afirma que “A fórmula é o resultado final. Não começa aí a solução do problema. Ela não aparece no enunciado. No começo da resolução é preciso identificar, por um critério simples, a proporcionalidade” (LIMA, 1986, p. 22).

Lima (1986) propõe uma definição alicerçada no conceito de função de várias variáveis. A proposta está correta matematicamente, mas, em nossa opinião, ela traz para os problemas que envolvem proporcionalidade uma dificuldade adicional, qual seja, o conceito de função de várias variáveis. Essa dificuldade se torna mais pronunciada quando o conceito de razão e proporção é visto no sétimo ano pela primeira vez. Mesmo quando esse assunto é reapresentado no Ensino Médio, com os alunos já conhecendo o conceito de função, essa abordagem ainda não nos parece a mais recomendada, uma vez que os alunos não tiveram contato com funções de várias variáveis.

Uma forma que nos parece, pela sua simplicidade, mais adequada para introduzir o conceito de razão e proporção é aquela que se baseia na noção de redução à unidade, apresentada a seguir.

Redução à Unidade

A redução à unidade é um método poderoso para resolver problemas de grandezas proporcionais, porém pouquíssimo divulgado e utilizado no ensino. O ganho que se tem em pensar dessa forma é o seu poder de síntese, pois tudo o que se tem a fazer é reduzir as informações à unidade e depois compará-la com o que se quer, como veremos em detalhes nos exemplos. Ao examinar vários livros didáticos presentes no mercado, como, por exemplo, Bianchini (2011), Dolce e Pompeo (2013), Silveira e Marques (2013), percebe-se a omissão a esse método em prol de um conjunto de fórmulas para a resolução de problemas. Para cada situação é como se o aluno encontrasse uma fórmula diferente, apesar de muitas vezes envolverem problemas de mesma natureza.

A redução à unidade proporciona um novo olhar sobre a busca da solução de problemas que envolvem proporcionalidade, uma vez que, com uma simples maneira de pensar, o aluno se torna capaz de resolver uma infinidade de problemas de Matemática. O

método consiste em reduzir à unidade todas as variáveis envolvidas em uma dada condição, por meio do uso de proporções. Depois de estabelecida tal condição, o passo seguinte é a transformação da sentença unitária na condição válida para a variável que se deve determinar por meio de multiplicação. Os exemplos que seguem ilustram esse método.

Exemplo 1 – Em uma usina de reciclagem de latas de alumínio, são necessárias 450 latas para obter 6 kg de alumínio. Quantas latas serão necessárias para obter 100 kg de alumínio?

Solução: Se dividirmos o número de latas pela massa de alumínio, descobriremos o número de latas por quilo. Assim, $450/6 = 75$, ou seja, com 75 latas obtemos 1kg de alumínio. Portanto, para obtermos 100 kg de alumínio, serão necessárias $75 \times 100 = 7.500$ latas.

No exemplo 1 utilizou-se o método de redução à unidade, envolvendo grandezas proporcionais, ao calcular o número de latas por quilo de alumínio. Com esse procedimento, é possível determinar o número de latas para qualquer quantidade de alumínio dada.

No exemplo 2, o método de redução à unidade será aplicado a uma situação que envolve três grandezas.

Exemplo 2 – Três agricultores colhem 1.800 pés de alface em 5 horas. Se todos trabalham da mesma forma, quantos pés de alface serão colhidos em 6 horas por 2 agricultores?

Solução: Observe que a quantidade de pés de alface é diretamente proporcional ao número de agricultores e também ao número de horas trabalhadas. Portanto,

3 agricultores __5h__ 1.800 pés de alface

Se dividimos o número de agricultores por 3, a quantidade de pés de alface também fica dividida por 3.

1 agricultor __5h__ $1800/3 = 600$ pés de alface

Se dividimos o número de horas trabalhadas por 5, a quantidade de pés de alface também fica dividida por 5.

1 agricultor __1h__ $600/5 = 120$ pés de alface

Com a redução à unidade, sabe-se agora quanto um agricultor colhe em uma hora, e daí deduz-se que

2 agricultores __1h__ $120 \times 2 = 240$ pés de alface

Se multiplicamos o número de agricultores por 2, a quantidade colhida também fica multiplicada por 2.

Finalmente,

2 agricultores __6h__ $240 \times 6 = 1440$ pés de alface

Se multiplicamos o número de horas por 6 a quantidade de pés de alface também fica multiplicada por 6.

Portanto, 2 agricultores colherão 1440 pés de alface em 6 h.

O exemplo que segue trata de um problema também com três grandezas, o qual será resolvido pelo método de redução à unidade e usando a definição de proporcionalidade.

Exemplo 3 – Cinco pessoas bebem 40 litros de água em 4 dias. Supondo que o consumo de cada uma delas é o mesmo, em quantos dias 3 pessoas beberão 24 litros de água?

Solução por redução à unidade: Organizando os dados do problema temos

5 pessoas __ 40 litros __ 4 dias

Uma pessoa levará 5 vezes o tempo que as 5 levariam para beber toda a água, ou seja, $5 \times 4 = 20$ dias.

1 pessoa __ 40 litros __ 20 dias

Esta pessoa bebe 1 litro em $1/40$ do tempo, isto é, $(1/40) \times 20 = 1/2$ dia.

1 pessoa __ 1 litro __ $1/2$ dia

Para beber 24 litros, ela levará $24 \times (1/2) = 12$ dias.

1 pessoa __ 24 litros __ 12 dias

3 pessoas __ 24 litros __ 4 dias

3 pessoas beberão esta quantidade em $1/3$ do tempo, que é $(1/3) \times 12 = 4$ dias.

Assim, 3 pessoas beberão 24 litros de água em 4 dias.

Uma forma alternativa para a resolução deste problema por meio do método de redução à unidade pode ser: 1 pessoa bebe 8 litros em 4 dias; em 1 dia, 1 pessoa bebe 2 litros. Assim, 3 pessoas bebem 6 litros em 1 dia. Logo, 3 pessoas bebem 24 litros de água em 4 dias.

Solução usando a definição de proporcionalidade: A primeira coisa a se fazer é verificar a proporcionalidade entre as grandezas. O número de dias (o que está sendo solicitado) é diretamente proporcional à quantidade de água consumida, pois ambas aumentam ou diminuem na mesma razão, mas é inversamente proporcional ao número de pessoas, uma vez que, quando uma delas aumenta, a outra diminui pelo mesmo fator. Assim, de acordo com a fórmula (1), podemos escrever

$$d = k \frac{v}{p}, \quad (2)$$

onde d é o número de dias, v é o volume de água, p é o número de pessoas e k é a constante de proporcionalidade. Daí, podemos usar as informações fornecidas para descobrir

o valor da constante k : $4 = k \frac{40}{5}$, isto é, $k = 1/2$. Com isso, da relação (2), podemos

determinar o tempo necessário para as 3 pessoas consumirem 24 litros: $d = \frac{1}{2} \cdot \frac{24}{3} = 4$.

Vale salientar que, na segunda solução do exemplo 3, é necessário determinar previamente se as grandezas são direta ou inversamente proporcionais, para a utilização da fórmula (1). Na solução em que se utiliza a redução à unidade, o processo irá indicar naturalmente o tipo da relação entre as grandezas.

No exemplo a seguir, apresentamos um tipo de problema comumente utilizado em sala de aula e presente em diversos concursos. Mostraremos como a solução se torna simples com a redução à unidade.

Exemplo 4 – Suponhamos que uma torneira encha um tanque em 2 horas e outra em 3 horas, enquanto um ralo esvazia esse mesmo tanque em 6 horas. Estando o tanque preenchido em $2/3$ de sua capacidade, abrindo-se simultaneamente as duas torneiras e o ralo, em quanto tempo esse tanque ficará completamente cheio?

Solução: Temos que

- Em 1 hora, a torneira 1 fornece $1/2$ da capacidade do tanque.
- Em 1 hora, a torneira 2 fornece $1/3$ da capacidade do tanque.
- Em 1 hora, o ralo esvazia $1/6$ da capacidade do tanque.

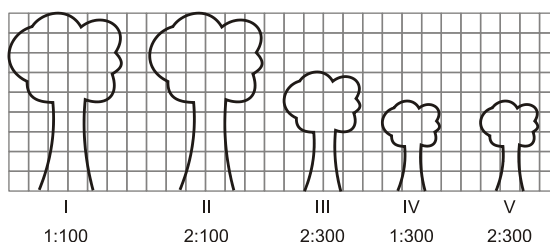
Assim, em 1 hora, todos agindo simultaneamente, temos $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ da capacidade do tanque. O tanque já estava com $2/3$ da sua capacidade, faltando completar $1/3$. Como vimos, em 1 hora o tanque alcança $2/3$ de sua capacidade. Logo, para encher o tanque será necessário $\frac{1}{2}$ h = 30 minutos.

A proporcionalidade está presente em grande parte do que fazemos também em geometria, principalmente no que se refere a figuras semelhantes e às proporções que existem entre elas. No entanto, frequentemente, somente a semelhança de triângulos é ensinada na maioria das escolas, descartando, sem justificativa, diversos tópicos relevantes (LIMA, 2006). Essa omissão acaba por trazer prejuízos à aprendizagem de outros conteúdos, tais como ampliação, redução, escala, projeção, variações de áreas e volumes, necessárias em diversas áreas do conhecimento.

Apresenta-se, a seguir, um exemplo em geometria, ressaltando a importância da redução à unidade no processo.

Exemplo 5 – (Enem 2012) Um biólogo mediu a altura de cinco árvores distintas e representou-as em uma mesma malha quadriculada, utilizando escalas diferentes, conforme indicações na figura a seguir.

Figura1 – Representações de árvores em diferentes escalas



Fonte: <http://vestibular.brasilecola.uol.com.br/enem/gabarito-oficial-enem-2012.htm>

Qual é a árvore que apresenta a maior altura real? a) I b) II c) III d) IV e) V

Solução: Sejam h_i e r_i a altura no desenho e a altura real da árvore i , respectivamente.

A razão entre as duas alturas, para cada i , é dada por $\frac{h_i}{r_i} = k_i$, em que k_i é a escala adotada.

Logo,

$$\frac{9}{r_I} = \frac{1}{100} \Leftrightarrow r_I = 900 \text{ u.c.}, \quad \frac{9}{r_{II}} = \frac{2}{100} = \frac{1}{50} \Leftrightarrow r_{II} = 450 \text{ u.c.},$$

$$\frac{6}{r_{III}} = \frac{2}{300} = \frac{1}{150} \Leftrightarrow r_{III} = 900 \text{ u.c.}, \quad \frac{4,5}{r_{IV}} = \frac{1}{300} \Leftrightarrow r_{IV} = 1350 \text{ u.c.}$$

$$\text{e } \frac{4,5}{r_V} = \frac{2}{300} = \frac{1}{150} \Leftrightarrow r_V = 675 \text{ u.c.}$$

Portanto, a árvore IV tem a maior altura real.

No exemplo 5, ao determinarmos a constante k_i , para cada árvore, fizemos uso da redução à unidade, o que nos permitiu facilmente calcular a altura real r_i .

Resultados da experiência

Com o intuito de investigar o processo de ensino/aprendizagem sobre o assunto proporcionalidade, foi realizada uma experiência em duas escolas da rede particular da cidade do Rio de Janeiro, uma, que será nominada de escola A, localizada na Zona Norte, envolvendo três turmas (A1, A2, A3), e outra, que será nominada de escola B, na Zona Sul, com duas turmas (B1, B2). Em ambas as instituições, a experiência foi realizada com turmas do primeiro ano do Ensino Médio.

Inicialmente, aplicou-se nas cinco turmas um teste com 12 questões, envolvendo o tema proporcionalidade, para avaliar o conhecimento dos alunos sobre esse tópico. A tabela 1 mostra o seu resultado, apresentando o percentual de acertos.

Tabela 1 – Resultados do teste preliminar sobre proporcionalidade

	Turma A1 (16 alunos)	Turma A2 (19 alunos)	Turma A3 (17 alunos)	Turma B1 (20 alunos)	Turma B2 (23 alunos)
Acertos	24,0%	24,6%	25,0%	30,4%	29,4%

Fonte: Os autores, 2017.

Como pode-se perceber da Tabela 1, o resultado foi pouco satisfatório, principalmente por se tratar de um assunto já visto no 7º ano do Ensino Fundamental e pelo fato de a experiência ter sido implementada em duas escolas consideradas de muito bom padrão de ensino.

O próximo passo foi abordar o assunto de duas formas diferentes: a tradicional, nas turmas A1 e B1, e o método de redução à unidade nas demais. Vale mencionar que a escolha das turmas em que se aplicaria um método ou outro foi aleatória e se deu antes do teste preliminar. Além disso, em todas as turmas utilizou-se a metodologia de resolução de problemas.

Após três aulas de 50 minutos, foi aplicado um novo teste com o mesmo nível de dificuldade do teste preliminar, a fim de avaliar o desempenho em função das duas abordagens mencionadas. A tabela 2 traz a percentagem de acertos por turma do segundo teste.

Tabela 2 – Resultados do segundo teste sobre proporcionalidade

	Turma A1 (16 alunos)	Turma A2 (19 alunos)	Turma A3 (17 alunos)	Turma B1 (20 alunos)	Turma B2 (23 alunos)
Acertos	43,2%	41,2%	52,9%	49,2%	42,0%

Fonte: Os autores, 2017.

A tabela 3 mostra a melhora em termos percentuais do desempenho das turmas em relação ao teste preliminar.

Tabela 3 – Aumento no percentual de acertos na comparação dos dois testes

	Turma A1 (16 alunos)	Turma A2 (19 alunos)	Turma A3 (17 alunos)	Turma B1 (20 alunos)	Turma B2 (23 alunos)
Aumento	80,0%	67,5%	111,6%	61,8%	42,8%

Fonte: Os autores, 2017.

Constata-se, dessa forma, que a melhora no desempenho dos alunos das turmas A1 e B1 foi de 69,9% e nas outras três turmas, em que foi usada a redução à unidade, 70,6%.

Considerações finais

Neste trabalho, procuramos mostrar a possibilidade de se estudar o tema proporcionalidade por meio da redução à unidade, através da resolução de diversos problemas com variados níveis de dificuldade. A metodologia baseada na resolução de problemas serviu como suporte didático e motivacional para as atividades em sala de aula. A baixa compreensão do conceito de grandezas proporcionais tem como consequência o fraco entendimento de diversos conceitos a ele relacionados, como, por exemplo, a relação entre as variáveis de uma função afim, problemas envolvendo escalas e comparação entre áreas ou volumes de figuras geométricas.

Como a maioria dos alunos que cursa a primeira série do Ensino Médio apresenta, em geral, grandes dificuldades no entendimento do conceito de proporcionalidade, este estudo traz uma proposta alternativa para se trabalhar esse conceito de uma forma mais natural e intuitiva. A ideia é levar o aluno a resolver problemas que envolvem grandezas proporcionais sem fazer uso de fórmulas, ou até mesmo sem precisar de um grande conhecimento acerca da natureza dessas grandezas.

Os resultados obtidos no segundo teste, após as aulas sobre proporcionalidade, mostraram que a redução à unidade é uma forma viável e bastante interessante de se abordar esse tema. Acreditamos também que trabalhar com resolução de problemas foi um elemento

importante em ambas as abordagens, se mostrando um excelente instrumento no sentido de despertar o interesse dos alunos e aguçar sua curiosidade. A capacidade de refletir e de criar é um importante pré-requisito para se inserir dentro de uma sociedade tão competitiva quanto a nossa. A combinação da metodologia de resolução de problemas com a redução à unidade permite, a nosso ver, desenvolver tais qualidades.

Referências

- ÁVILA, G. Razões, proporções e regra de três. **Revista do Professor de Matemática**. São Paulo: SBM, v. 8, 1983.
- BALIEIRO FILHO, I. F. **Arquimedes, Pappus, Descartes e Polya**: quatro episódios da história da heurística. 2004. Tese (Doutorado)- Rio Claro: UNESP, 2004.
- BARBOSA, J. I. C. A criatividade sob o enfoque da análise do comportamento. **Rev. Bras. Ter. Comport. Cogn.** v.5, n. 2. São Paulo, 2003.
- BIANCHINI, E. **Matemática Bianchini**. v.9. 7a ed. São Paulo: Moderna, 2011.
- BOYER, C. B.; MERZBACH, U. C. **A History of Mathematics**. 2a ed. New York: John Wiley & Sons, 1991.
- BRASIL. Ministério da Educação e do Desporto e Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais** (1ª a 4ª série). Matemática. Brasília: MEC/SEF, 1997.
- _____. Ministério da Educação e do Desporto e Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais**. Matemática: Ensino Fundamental. Brasília: MEC/SEF, 1998.
- _____. Ministério da Educação e da Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros Curriculares Nacionais** (Ensino Médio). Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília: MEC/SEMT, 2000.
- DANTE, L. R. **Didática da Resolução de Problemas de Matemática**. 2a ed. São Paulo: Ática, 1991.
- DOLCE, O.; POMPEO, J. **Fundamentos de Matemática Elementar**. v. 9. 9a ed. São Paulo: Saraiva, 2013.
- LIMA, E. L. Que são grandezas proporcionais? **Revista do Professor de Matemática**. São Paulo: SBM, 1986. v. 9.
- _____. **Medida e Forma em Geometria**. 4a ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006.
- MENINO, F. S. **Resolução de Problemas no Cenário da Matemática Discreta**. Tese de doutorado. Rio Claro: UNESP, 2013.
- ONUCHIC, L. de la R. A resolução de problemas na educação matemática: onde estamos? E para onde iremos? **Espaço Pedagógico**. v. 20, n. 1, Passo Fundo, p. 88-104, jan./jun. 2013.

ONUICHIC, L. de la R.; ALLEVATO, N.S.G. Novas reflexões sobre o ensino aprendizagem de matemática através da resolução de problemas. *In*: BICUDO, M.A.V.; BORBA, M.C. **Educação Matemática**: pesquisa em movimento. 2a ed. rev. São Paulo: Cortez, 2005. p. 213-231.

ROQUE, T.; PITOMBEIRA, J. B. **Tópicos de História da Matemática**. Rio de Janeiro: Coleção PROFMAT, SBM, 2012.

SILVEIRA, E.; MARQUES, C. **Matemática**: compreensão e prática. v. 9. 2ª ed. São Paulo: Moderna, 2013.

SKINNER, B. F. **Tecnologia do Ensino**. São Paulo: Pedagógica, 1972.

SOUSA, A. B. **A resolução de problemas como estratégia didática para o ensino da matemática**. Universidade Católica de Brasília, 2005.

WALLAS, G. **The Art of Thought**. Tunbridge Wells: Solis Press, 2014.

Recebido em: 09 de outubro de 2017

Aprovado em: 03 de março de 2018