Interactions "angle ~ rotation". Pertinence et limite dans l'enseignement au Mali

MAMADOU SOULEYMANE SANGARÉ*

Resumo

A relação entre ângulo e a rotação é muito forte, tanto no plano teórico quanto didático. Este artigo propõe essencialmente um estudo sobre as características ligadas às interações entre o ângulo e a rotação no segundo ciclo de Ensino Fundamental e no Ensino Médio de Mali. Na primeira parte, propomos uma análise sincrônica dos dois conceitos matemáticos, indo do saber a ensinar às práticas de sala de aula. Os resultados dessa análise permitiram evidenciar cinco níveis conceituais relacionados com um ensino fundado em uma abordagem interativa de ângulo e da rotação. Esses níveis conceituais abrangem três níveis de ensino: o segundo ciclo de Ensino Fundamental, Ensino Médio e a Universidade. A segunda parte discute a realização de um teste que deve dar informações sobre a presença, entre os alunos, de concepções "ângulo-medida" ou de concepção ligadas à representações figurativas de ângulos.

Palavras-chave: didática da matemática; ângulo; rotação; figura geométrica; transformação geométrica; interação; transposição didática; ensino; aprendizagem; concepção; nível conceitual.

Résumé

Le lien entre l'angle et la rotation est très forte, à la fois sur le plan théorique et sur le plan didactique. Cet article propose pour l'essentiel, une étude axée sur les caractéristiques liées aux interactions entre l'angle et la rotation, au second cycle fondamental et au lycée au Mali. La première partie est consacrée à une analyse synchronique des deux concepts mathématiques, qui va du savoir à enseigner aux pratiques de classes. Les résultats issus de cette analyse ont permis de mettre en évidence cinq niveaux conceptuels relatifs à un enseignement fondé sur une approche interactive de l'angle et de la rotation. Ces niveaux conceptuels recouvrent trois ordres d'enseignement, du second cycle fondamental à l'université en passant par le lycée. La seconde partie porte sur la réalisation d'un testqui doit nous fixer sur la prégnance chez des élèves à leur sortie du lycée, de conceptions «angle-mesure» ou de conceptions liées aux représentations figuratives des angles.

Mots clés: *Didactique des mathématiques; angle; rotation; figure géométrique; transformation géométrique; interaction; transposition didactique; enseignement; apprentissage; conception; niveau conceptuel.*

* Equipe de Didactique des Mathématiques (EDiMath); D.E.R. de Mathématiques; École Normale Supérieure de Bamako. E-mail: mamadoussangare@yahoo.fr

Abstract
The relationship between angle and rotation is very strong, both theoretically and didactically. The main purpose hereof is to do a study focused on the interaction-related features between angle and rotation in both Middle and High School in Mali. The first part hereof addresses a synchronic analysis of the two mathematical concepts, which involve the knowledge to be taught and practices in a classroom environment. The analysis results helped identify five conceptual levels related to a teaching based on an interactive approach to angle and rotation. These conceptual levels comprise three teaching levels: from Middle School to High School to the University. The second part deals with the application of a test indicating assimilation of "angle-measure" conceptions or conceptions related to figurative representations of angles among high school students.
Keywords: *mathematics education; angle; rotation; geometric figure; geometric transformation; interaction; teaching transposition; teaching; learning; conception; conceptual level.*

Introduction

La construction théorique de la notion d'angle fait appel à plusieurs concepts mathématiques, surtout au groupe des rotations vectorielles du plan euclidien. De même, l'imbrication de l'angle et de la rotation est si forte sur le plan didactique que l'angle a été défini comme «une rotation qui a perdu son centre, Papy, (*1967*)». L'angle a été l'objet de plusieurs travaux de recherche en particulier, ceux de Balacheff (1988), de Berthelot et Salin (*1992*), et de Vadcard (*2000*). Par ailleurs, des travaux de recherche sur la rotation, tels que ceux d'Edwards (*1989*) et de Sangaré (*2000* et *2006*) abordent certains aspects liés à la complexité d'un apprentissage de la rotation.

Il s'agit dans cette recherche d'étudier comment l'enseignement de la géométrie prend en compte les relations entre l'angle et la rotation, dans la perspective d'une double transition: second cycle fondamental – lycée et lycée – université au Mali. Quelles sont les traits caractéristiques de ces relations par rapport à la transposition didactique? Quel est l'état de connaissances des élèves en fin lycée, à propos de l'angle orienté de couple de demi-droites et à propos de relations entre l'angle et la rotation ? Ces questions seront abordées par rapport à un cadre théorique organisé autour de certains de concepts de didactique des mathématiques: la transposition didactique (Chevallard, *1985*), la théorie des situations didactiques (Brousseau, *1998*), les différents fonctionnements des figures dans l'apprentissage de la géométrie (Duval, *1995*) et le point de vue des conceptions (Balacheff, *1995*).

I. Angle et Rotation: du savoir à enseigner aux pratiques de classes

I. 1. Le couple (angle, rotation) et la transposition didactique

Nous présentons ici certains aspects du rapport qu'entretiennent l'angle et la rotation du point de vue de leur transposition dans l'enseignement. L'une des caractéristiques essentielles qui se dégage d'un examen interactif, réside dans l'inversion du processus de passage de l'un des concepts à l'autre, lorsqu'on passe du domaine théorique au domaine des objets d'enseigner. Cette inversion peut être décrite comme ci-dessous.

I.1.1. Angle et rotation dans le savoir mathématique

La construction et l'étude théoriques des angles s'appuient essentiellement sur les isomorphismes entre groupes abéliens: le groupe $\{O^+(E_2),\circ\}$ des rotations du plan vectoriel euclidienE_2, le groupe quotient $(\mathbb{R}/2\pi_{\mathbb{Z}}, +)$ et le groupe $(\Phi, +)$ des angles orientés. Cette approche permet,

- d'intégrer les aspects géométriques du couple (angle, rotation) à une vision algébrique plus générale, mieux structurée mais très éloignée du registre des figures;
- de «mesurer» les angles;
- d'établir les principales formules de trigonométrie.

I.1.2. Angle et rotation dans le savoir à enseigner

A l'inverse de l'approche précédente, le choix de transposition qui prévaut généralement dans l'enseignement repose sur la construction de la rotation plane à partir des angles. Ce choix n'est qu'un cas particulier d'un choix plus général, qui considère que l'enseignement des figures géométriques planes doit précéder celui des transformations géométriques planes. Mais dans le cas du couple (angle, rotation), l'angle est une figure très complexe à appréhender. Aussi, nous proposons quelques aspects de cette complexité de l'angle en tant qu'objet d'enseignement.

I. 2. Angle: une grandeur géométrique pas comme les autres

I.2.1 Polysémie de l'angle comme grandeur géométrique

Donner du sens à une grandeur (en particulier à une grandeur géométrique) exige que celle-ci soit appréhendée à la fois en interaction avec le domaine numérique, mais aussi de façon autonome dans d'autres domaines. C'est ce qui semble être le point de vue de Perrin-Glorian (2002):

> Cependant, pour l'apprentissage, il est important de considérer les grandeurs du point de vue non numérique. (…) Mais pour qu'on puisse établir un rapport dialectique entre nombres et grandeurs, chacun donnant sens à l'autre, il est nécessaire que les grandeurs sur lesquelles on va s'appuyer pour le développement du domaine numérique, existent par elles-mêmes, en dehors de la mesure. Perrin-Glorian M.J. (2002, p. 303)

Ce rapport dialectique n'est pas aisé à établir dans le cas de l'angle car ce concept recouvre plusieurs significations:[1] angle orienté, angle non orienté, secteur angulaire, angle d'un couple de demi-droites (ou de droites), affines ou vectorielles, angle de deux courbes planes en un point d'intersection donné, angle d'une droite et d'un plan, angle de deux plans, etc. De plus, ce domaine de significations s'élargit et devient encore plus complexe, lorsque l'on considère l'angle[2] dans d'autres disciplines comme en physique par exemple. Ce caractère polysémique rend assez complexe son appréhension en tant que grandeur géométrique en dehors de ses invariants d'ordre numérique.

I.2.2 Des «mesures d'angles» pas comme les autres mesures de grandeurs

La définition sur le plan théorique d'unemesuresur les angles n'est pas aisée. De façon récurrente les questions liées à sa transposition en tant qu'objet d'enseignement ont été l'objet de vives controverses comme le montre par exemple le point de vue de Dieudonné J. (1968):

---

1 Cf. Choquet, 1971, pp. 96 –126.

2 Il en est de même pour la rotation.

> Quant à la soi-disant «mesure» des angles, elle s'inscrit dignement dans la confusion générale qui règne à ce propos; pour le mathématicien professionnel, alors que la nature nous offre gratuitement, avec le groupe des rotations planes, un admirable exemple de groupe infini possédant des éléments d'ordre fini quelconque, c'est une insondable sottise que de chercher à tout prix à masquer ce fait essentiel en prétendant «mesurer» ce qui n'est pas mesurable, introduire un «ordre» là où il n'y en a pas, et feindre de croire qu'une droite se souvient d'avoir tourné de 26π lorsqu'elle est revenue à la même position! (Dieudonné J. 1968, p. 19)

De façon plus explicite dans l'enseignement, la complexité liée à la mesure de l'angle orienté considéré comme grandeur géométrique, se traduit par des ruptures par rapport aux autres grandeurs géométriques qui sont objet d'enseignement au Fondamental et au lycéetelles que, la longueur d'un segment de droite et l'aire d'une surface plane. Voici deux exemples pour étayer cette rupture.

- Dans le groupe additif des angles orientés du plan euclidien $(\Phi, +)$ l'équation:

$2x = \alpha$ *(où* $2x = x + x$ *et* $(x,\alpha) \in \Phi^2$*)* n'a pas une solution unique. Il en est de même de la traduction de cette équation pour les «mesures» d'angles orientés. Ce problème ne se pose pas pour le cas pour la longueur d'un segment de droite ou encore pour l'aire d'une surface plane.

- En désignant par ϖ l'angle plat dans $(\Phi, +)$, on a: $-\varpi = \varpi$ *et* $\varpi + \varpi = \hat{O}$ *avec* $\varpi \neq \hat{O}$, où $\hat{O}$ désigne l'angle nul. En termes de «mesures», cette propriété des angles orientés constitue a priori une rupture avec les objets d'enseignement relatifs à l'addition, des longueurs de deux segments de droites ou encore l'addition des aires de deux surfaces planes.

I.3. Le couple (angle, rotation) dans les programmes et les manuels

Comment et avec quels moyens, les difficultés liées aux choix effectués sur le savoir à enseigner sont-elles gérées au niveau, des textes de programmes, des manuels et des pratiques de classe au Mali? Quelles sont les connaissances qui peuvent être construites par les élèves? Autant de questions qui nous aborderons dans ce paragraphe. Notons que le second cycle fondamental au Mali[3] correspond à peu près au collège dans le système français.

I.3.1. Au niveau des textes de programmes

D'une manière générale, on remarque que l'angle a toujours précédé la rotation dans les textes de programmes de mathématiques couvrant le second cycle fondamental et le lycée. De plus, la rotation en tant qu'objet d'enseignement a toujours été située au niveau du lycée.[4]

Au Second Cycle Fondamental: Au second cycle fondamental, après l'introduction des secteurs angulaires en *7e*, la notion d'angle apparaît en *8e* en tant que classe d'équivalence:

> *II. Angles[5]:*
> *Définition comme classe d'équivalence de secteurs angulaires ayant la même mesure en degrés.*
> *Mesure d'un angle…*

Il s'agit évidemment, d'angle géométrique considéré comme une «grandeur géométrique mesurable». Les techniques mises en œuvre pour construire un représentant d'un angle sont le plus souvent liées au sens près, aux techniques relatives à la construction de l'image d'un point ou d'une demi-droite par une rotation.

Au lycée: L'angle orienté apparaît en *10e* sciences à partir de couples de vecteurs unitaires[6]. Le sous-chapitre «Orientation du plan, Angles orientés» est immédiatement suivi du chapitre «Transformations: Homothétie – Isométries du Plan» dans lequel se situe la rotation. Les

---

3 L'enseignement fondamental au Mali est constitué de deux cycles :

– le premier cycle comprend 6 niveaux scolaires de la 1ère année à 6ème année (l'accès à la 1ère année s'effectue pour des enfants ayant au moins 6 ans);

– le second cycle comprend 3 niveaux de la 7ème à la 9ème ; la fin de ce cycle est sanctionnée par l'épreuve du Diplôme d'Etudes Fondamentales (D.E.F.).

4 Il s'agit de textes de programmes en vigueur au Mali depuis 1960.

5 Cf. Institut Pédagogique National (1995), savoir-faire, 7e , 8e , 9e , années, Programmes et Commentaires, p. 21.

6 D'après les textes officiels des programmes de mathématiques (1992), 10e sciences, p. 23-25.

programmes de 1990[7] sont marqués par un retour significatif de la *géométrie des figures* au second cycle fondamental et au lycée. Cependant, certains choix liés à l'enseignement des angles, permettent d'avancer que «…le risque est grand de retomber «dans la confusion qui n'a que trop régné dans la question des angles», en particulier dans la non-distinction entre un angle et sa mesure. (Berthelot et Salin, *1992*, p. *248*)». L'extrait ci-dessous du texte de programme de *10^e^* sciences (*2^e^ S* dans le système français) nous éclaire sur ce risque:

> Orientation du plan, angles orientés[8]:
>
> L'introduction de ces notions constitue une simple prise de contact de caractère expérimental. On s'appuiera sur des observations concernant la mesure des arcs ou des angles orientés (au moyen du rapporteur) et le mouvement circulaire. Pour ce qui est de l'angle orienté de deux vecteurs unitaires, l'objectif est que les élèves connaissent et sachent utiliser les résultats suivants (admis):
>
> • *Un angle orienté possède une mesure principale appartenant*$]-\pi, +\pi]$, *les autres mesures s'en déduisent par addition de* $2k\pi$.
>
> • *Inversement, tout nombre réel définit un angle orienté et un seul admettant ce nombre pour mesure.*

Ces deux résultats semblent constituer pour l'essentiel, les connaissances exigibles d'un élève de lycée sur l'angle orienté. Ce choix nous conduit en conséquence à la question suivante: «l'utilisation prolongée de ces résultats dans nos pratiques de classes sans pouvoir les justifier sur le plan théorique ne renforce-t-elle pas l'aspect «mesure» au détriment d'une présentation de l'angle comme figure géométrique ?».

Quelques points de repère sur la transition 9^e^ / 10^e^: Pour l'objet d'enseignement «angle», la transition 9^e^ –10^e^ est marquée par la construction de la notion d'angle orienté de couple de vecteurs unitaires à partir de la notion d'angle non orienté conçue comme classe d'équivalence de secteurs angulaires. Cette construction est le plus souvent présentée dans le registre des figures suivant le schéma suivant:

---

7 Programmes actuellement en vigueur au Mali.

8 Cf. Programmes de Mathématiques de l'Enseignement Secondaire Général, Technique et Professionnel, (1991), pp. 23-24.

> Choix d'une orientation du plan à partir d'un triplet de points non alignés → angle orienté de couple de vecteurs unitaires → angle de couples de vecteurs non nuls → angles de couples de demi-droites

Dans le registre des nombres, la transition *9^e^–10^e^* est marquée aussi par le passage des «rapports trigonométriques» liés au triangle rectangle aux *lignes trigonométriques* liées au cercle trigonométriques.

Par ailleurs, les interactions au sein du couple (*angle, rotation*) se traduisent dans cette transition, par le passage de certaines techniques liées au report d'angles géométriques à l'aide d'instruments de géométrie, à la prise en compte de la rotation considérée comme objet d'enseignement et qui s'appuie essentiellement sur la notion d'angle orienté de demi-droites. Ainsi en *10^e^*, l'angle orienté apparaît comme un outil définitoire de la rotation plane, le rapport entre les deux notions semble être considéré à sens unique. De plus, en 9^e^ comme en *10^e^*, la «mesure» semble être privilégiée comme technique de détermination ou de comparaison des angles.

I.3.2. Manuels scolaires: deux cas d'étude

L'étude menée ici, se réfère principalement à deux collections de manuels qui sont utilisées par les enseignants de mathématiques au Mali: les collections I.R.M.A. et C.I.A.M.[9] Nous nous intéressons surtout aux choix faits pour concilier le décalage entre les fondements mathématiques et les contraintes d'ordre didactique.

Collection Inter-Africaine de Mathématiques (1996) – 3^e:^ Dans la Collection Inter-Africaine de Mathématiques – C.I.A.M., (1996, 3^e^, p. 95), la leçon sur les angles précède d'une leçon, celle qui concerne la rotation.[10] La rotation est introduite de la manière ci-dessous:

9 I.R.M.A. : Institut de Recherche pour l'Enseignement des mathématiques d'Abidjan, (1992), Géométrie 2e C.T., N.E.A. ; C.I.A.M. : Collection Inter-Africaine de Mathématiques (1996), 3e , Mathématiques, EDICEF.

10 Dans le sommaire de l'ouvrage on peut lire : "Angles Inscrits", p. 73 – " Symétries et Translation", p. 81 – "Rotation et Homothétie", p. 93.

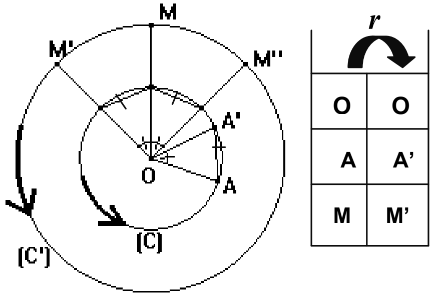

Figure 1

On donne un triangle *OAA'*, isocèle en *O*. (∈) est un cercle de centre *O* et de rayon *OA*. On considère un point *M*, distinct de *O*. (∈') est le cercle de centre *O* et de rayon *OM*. On sait qu'il existe deux points M' et M'' de (∈') tels que:
$mes\widehat{MOM'} = mes\widehat{MOM''} = mes\widehat{AOA'}$.
On désigne par *M'* celui pour lequel le sens de déplacement sur (*C'*) de *M* vers *M'* est celui du déplacement sur (*C*) de *A* vers *A'*.
Par cette construction, à chaque point M distinct de O, on associe le point *M'*; au point *O*, on convient d'associer le point *O* lui-même.
<u>On définit ainsi une application du plan dans le plan qui est déterminée par le triangle isocèle</u>[11]: c'est la **rotation *r* de centre *O* qui applique** *A* **sur** *A'*. *M'* est l'image de *M* par cette rotation.

La rotation est ainsi*contextualisée* dans le triangle isocèle et le cercle, qui jouent le rôle de «configurations de référence liées à cette transformation (Sangaré M., 2000, p. 86-87)». La figure (***fig. 1***) semble être tout au plus une indication pour appréhender la rotation en jeu à travers une famille de triangles isocèles (de même sommet *O*) et (ou) une famille de cercles (de même centre *O*). Il est certes possible de construire certaines connaissances liées à la rotation telles que, l'invariance du centre et celle de l'angle, mais cette présentation ne garantit pas une appréhension de cette transformation en tant qu'application du plan dans le plan comme l'indique le texte accompagnant la figure (***fig. 1***). En *10^e^*, les élèves sont encore à des niveaux conceptuels de type «transformation de figures du plan».

Dans cette présentation, le rapport qu'entretient l'angle et la rotation est implicite, l'angle n'y apparaît pas a priori comme invariant

11 C'est nous qui le soulignons.

fondamental de cette transformation. La question didactique qui se pose alors est la suivante: «Comment introduire la rotation chez des élèves qui ne connaissent que l'angle géométrique?». C'est ainsi que les auteurs ont défini la rotation par la donnée du triplet, (*centre, angle géométrique, sens de rotation*), en choisissant un*substitut figuratif* lié à un couple de points homologues sur un cercle, pour introduire l'orientation du plan.

Collection I.R.M.A. Géométrie (1992), 2e: Le manuel «Collection I.R.M.A., Géométrie (1992), 2e CT, (p. 213)»[12] introduit l'angle orienté de la manière suivante: après avoir orienté le plan (***Schéma 1; fig. 2***), les auteurs définissent l'application σ de l'ensemble des triplets de points non alignés *(X, Y, Z)* du plan dans {*-1, 1*} telle que:

> σ*(X, Y, Z) = 1 si (X, Y, Z) est de sens direct;* σ*(X, Y, Z) = –1 si (X, Y, Z) est de sens indirect*.

Cette codification permet de calculer la détermination principale d'un angle orienté selon l'algorithme ci-dessous[13] dans lequel «*mes*» désigne la mesure en degrés de tout angle géométrique sur l'intervalle *{0°, 180°}* :

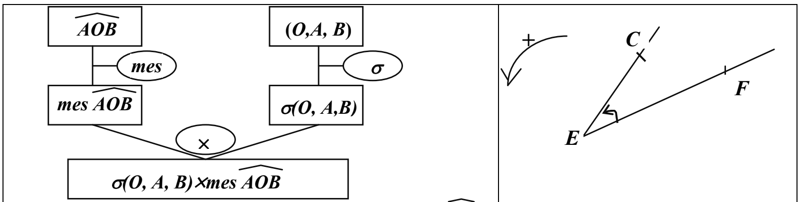

Schéma de calcul de la détermination de l'angle orienté $\widehat{AOB}$.

Schéma 1

(*fig. 2*)

Figure 2

La *mesure* de l'angle orienté *AOB* apparaît dans cet algorithme de calcul, comme une sorte de «mesure-produit» (Brousseau G., 1998, p. 232) sur l'ensemble des sens du plan (sens direct et sens indirect) codifié par la paire {*-1, +1*} et l'ensemble des angles géométriques du plan dont les mesures sont dans l'intervalle *{0,* π*}* à *2k*π près. De notre point de vue, cette présentation n'assure pas encore chez les élèves, un fonctionnement

12 La 2e correspond pour l'essentiel à la 10e Sciences au Mali.

13 Cf. Collection I.R.M.A. Géométrie (1992), 2e, pp. 213-214.

autonome de l’angle orienté du plan par rapport à l’angle géométrique. Ce choix engendre a priori une difficulté majeure; elle est liée à une éventuelle construction par les élèves d’un *modèle non unifié* de l’ensemble des angles orientés du plan en raison d’une possible classification en deux sous-ensembles (*angles positifs* et *angles négatifs*). Une des conséquences significatives de cette difficulté pourrait être une appréhension erronée des relations géométriques entre l’angle et la rotation.

I. 4. Les registres de représentation et de traitement

L’apprentissage de la notion d’angle par rapport à une perspective de transition second cycle fondamental – lycée, ne peut se faire sans l’emploi de différents registres de représentation et de traitement de la géométrie (Duval R., 1995). Pour le cas spécifique de l’angle et de la rotation,[14] on utilise au moins de la figure, du texte, du numérique (calcul sur lesmesures d’angles). De plus, il faut une coordination entre ces différents registres pour une appréhension significative de l’angle. La construction et l’évolution des connaissances sur l’angle en milieu scolaire s’effectuent à la fois, avec et contre les significations que les élèves ont déjà attribuées à cette notion. Explicitons ce point de vue par les deux exemples ci-dessous.

- Dans le registre des figures (***fig.** 3*), amener un élève en début de lycée, à accepter que la somme des angles orientés de demi-droites représentés par $((O_1X_1),(O_1Y_1))$ et $((O_2X_2),(O_2Y_2))$ équivaut à l’angle orienté représenté par $((O_3X_3),(O_3Y_3))$, n’est pas immédiat. L’appropriation d’une telle connaissance doit s’effectuer a priori contre la règle d’action suivante: «*La somme est plus grande que chacun des termes qui la compose*».

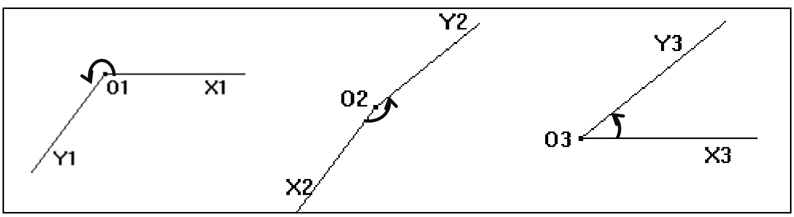

Figure 3

14 Rotation considérée en tant que transformation de figures du plan.

- Dans le registre numérique, se convaincre que $\frac{-\pi}{6}$ *et* $\frac{11\pi}{6}$ mesurent le même angle orienté du plan n'est pas aisée pour des élèves en début de lycée. Cette connaissance est en rupture avec la plupart de leurs conceptions construites sur les mesures de grandeurs au second cycle fondamental.

II. Niveaux Conceptuels attachés au Couple (Angle, Rotation)

II.1. Le Fondement des Niveaux Conceptuels

L'analyse didactique des deux manuels cités ci-dessus, a permis de mettre en évidence différents niveaux conceptuels relatifs à l'enseignement du couple (angle , rotation). Nous les situons par rapport:

– aux connaissances qui leur sont associées;
– aux classes de problèmes qu'ils permettent de résoudre;
– au(x) type(s) de contrôle exercé sur ces classes de problèmes;
– aux registres utilisés;
– aux interactions entre angle et rotation.

De plus, cette typologie est conçue dans une perspective double, celle relative au passage «des transformations de figures du plan aux transformations ponctuelles, Jahn (1998)» et celle liée au passage de l'angle en tant que «dessin géométrique, (Balacheff, 1999, p. 216)» à l'angle considéré comme «figure géométrique (ibid. 1999, p. 218)».

II. 2. Modélisation des Niveaux Conceptuels

***Niveau 1*: $r = (O, \alpha, \curvearrowleft)$**

- Les connaissances à faire construire au *niveau 1* sont les propriétés métriques (surtout angulaires) des configurations familières: le triangle isocèle, le triangle équilatéral, le carré, le losange, le cercle, etc. D'une manière générale, les propriétés géométriques des polygones convexes réguliers sont objet de connaissances. Nous situons ce niveau en classe de 3^e dans le système français.[15]

15 Rappelons que, dans le système malien la rotation est enseignée à partir de 10^e science-saprès un enseignement sur les angles orientés. Dans la plupart des pays africains francophones, membres du programme HPM (Harmonisation des Programmes de Mathématiques), la rotation est introduite en 3^e (9^e au Mali).

Le plan n'est pas orienté de façon explicite, l'orientation est indiquée au cas par cas et de façon ostensive.

- Les problèmes proposés à ce niveau sont le plus souvent relatifs à la reproduction de figures qui admettent des caractérisations angulaires. En particulier, les polygones convexes réguliers et le cercle constituent des «configurations de référence» pour ces problèmes, comme le montre l'exercice n°5 de la Collection Inter-Africaine de Mathématiques – C.I.A.M. (1996, 3e, p. 100).

ABCD est un carré inscrit dans un cercle ($\in$) de centre O. La droite (L) est la médiatrice de [AB] qui coupe $\overset{\frown}{AB}$ au point E.
a) *Construis l'image EFGH du carré ABCD par la rotation de centre O qui applique A sur E.*
b) *Donne la nature du polygone AEBFCGDH.*

- Pour cet exercice, le contrôle s'appuie sur les propriétés géométriques liées à des configurations de références communes à l'angle et à la rotation (carré, cercle, octogone convexe régulier)
- Les registres de représentation et de traitement des angles et des rotations sont le plus souvent le registre des figures et celui de la langue naturelle. Le registre numérique est sollicité pour les mesures d'angles qui se font en général en degrés dans l'intervalle *{0°, 180°}* ou encore en grades.
- Les interactions entre angle et rotation peuvent être placées sous deux aspects. La notion d'angle sollicitée à ce niveau est l'angle géométrique (angle non orienté). Le sens est introduit *au cas par cas*, il permet d'assurer l'unicité de la transformée d'une figure donnée par la rotation en jeu. Dans ces conditions, l'angle géométrique constitue un élément définitoire de la rotation au même titre que le centre et le sens. Réciproquement, la rotation est introduite ici comme un procédé de construction permettant de reproduire des figures familières.
- Au *niveau 1*, la rotation est considérée comme «relation entre deux parties d'une même configuration, Grenier et Laborde, (*1987*)», l'exercice ci-dessus s'adapte à ce point de vue. Le plan est appréhendé comme support ou contenant des figures, avec des points et des directions privilégiés (centre de rotation, directions horizontale et verticale, droites supports de diagonales

de quadrilatères convexes réguliers, sommets de polygones réguliers etc.). En particulier, l'angle est considéré comme «dessin géométrique, Balacheff (1999)» dont la représentation dans le registre figuratif est fortement liée à celles de son sommet et de ses côtés. Ce niveau pourrait être caractérisé par une « conception hétérogène du plan, Bautier (1988)».

***Niveau 2*: $r = \{ O, (\alpha, \curvearrowleft) \}$**

- Les connaissances à faire construire ici, sont globalement les mêmes que celles qui sont supposées construites au *niveau 1*, à la différence près qu'on commence à découvrir certains invariants de la rotation tels que les propriétés de conservation. Le plan est orienté de façon formelle et un sens positif[16] est fixé au préalable. L'angle orienté est considéré comme la donnée d'un couple $(\alpha, \curvearrowleft)$ dont la première composante est un angle géométrique et la seconde est le sens fixé du plan comme le montre la figure (***fig.*** *2*). L'ensemble des angles orientés du plan orienté muni de l'addition n'est pas encore unifié. L'unité de mesure d'angle, le radian, est introduite à ce niveau conceptuel que nous situons en classe de *10^{e}* (ou *2^{e}* dans les autres pays africains francophones voisins du Mali).
- Les problèmes proposés au *niveau 2* sont relatifs à des constructions de figures familières ou encore à des problèmes de construction avec contraintes (surtout d'ordre angulaire). Les exercices proposés sont relatifs à la détermination des éléments caractéristiques d'une rotation (centre et angle) dans une configuration familière donnée. De même, les connaissances à faire acquérir doivent apparaître comme des outils de résolution de problèmes relatifs à l'établissement de propriétés géométriques liées à des configurations familières. Nous donnons ci-dessous un exemple de problème relatif à ce niveau tiré de la Collection IRMA, Géométrie *2^{e}* CT (1992), pp. 246, exercice n° 17 (3).

16 Celui du cercle trigonométrique.

Dans le plan orienté, on donne trois points A, B et C distincts tels que:

- *(A, B, C) est de sens direct;*
- *AB = AC;*
- *(AB) ⊥ (AC).*

Quel est le centre O de la rotation r qui applique A sur B et C sur A? Donner la détermination principale de la mesure de l'angle orienté de la rotation r.

- Les registres de représentation et de traitement sont le plus souvent le figuratif et la langue naturelle. En rapport avec la non-unification des angles orientés comme un ensemble, les mesures d'angles en radians sont introduites au *niveau 2*. Elle se traduit par la construction d'une sorte de «mesure-produit» sur les angles orientés du plan dont les valeurs sont prises dans $\{-1, 1\} x \boldsymbol{G}$ où: $\boldsymbol{G} = \{x + 2k\pi / x \in \{0, \pi\}, k \in \mathbb{N} \}$. La détermination principale d'un angle orienté est dans l'intervalle,$\}- \pi, + \pi\}$.
- Au plan des interactions entre les deux notions au *niveau 2*, l'angle orienté est présenté sous forme de couple (α , $\curvearrowleft$), il reste encore comme un élément définitoire de la rotation. Ce couplage permet également de faire découvrir (le plus souvent par ostension) la relation réciproque de la rotation comme une transformation de même nature que la transformation directe. Réciproquement, la rotation est un outil de construction de représentants d'un angle orienté donné; il peut être sollicité également dans la construction de *figures régulières*. De plus, la rotation est toujours considérée à ce niveau comme «relation entre deux parties d'une même configuration». Les *règles de l'art* supposées acquises au *niveau 1*, sont enrichies avec l'apport d'autres règles issues de pratiques d'algorithmes de construction telles que celles relatives à la construction de l'antécédent d'une figure donnée par une rotation donnée. Cet enrichissement dans une même configuration, à travers les interactions au sein du couple (*angle, rotation*), permet de faire découvrir par les élèves, que la réciproque d'une rotation est une rotation et que l'angle orienté associé à celle-ci, est l'opposé de l'angle de la rotation directe.

***Niveau 3**: $r = (O, \hat{\alpha})$*

- L'ensemble des angles orientés du plan est considéré comme *unifié* au *niveau 3*. Ceci permet d'introduire une addition construite, soit par la recherche d'un représentant de la somme de deux angles dans le registre des figures, soit par la détermination d'une mesure de la somme *à* $2k\pi$ *près* dans le registre numérique; l'angle est déterminé par sa mesure principale. Par ailleurs, la rotation apparaît ici comme «relation entre deux configurations distinctes, Denise et Laborde (1988)» puis, comme application ponctuelle dans le cadre analytique par rapport à un repère judicieusement choisi. C'est à ce niveau également que la rotation est découverte comme bijection du plan dans lui-même. Le *niveau 3* chevauche les classes de *10*^{e} et de *11*^{e} (*2*^{e} et *1*^{ère} dans le système français).
- Les problèmes sont relatifs à la reconnaissance et à la caractérisation d'une rotation; celle-ci doit être reconnue à travers la mise en relation de deux configurations, ou encore à travers la donnée d'une expression analytique. Au *niveau 3*, la résolution d'équations simples dans l'ensemble des angles orientés muni de l'addition est proposée en relation avec son versant relatif à l'ensemble des rotations planes de même centre muni de la composition des applications. C'est le cas par exemple dans le manuel IRMA, *1*^{ère} CE (1991, p. 192) :

O étant un point fixé du plan, on considère l'ensemble υ des rotations de centre O. Soient r_1, r_2 et r_3 les rotations de centre O et respectivement d'angles $\frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}$. Résoudre les équations suivantes:

a) $f \in \upsilon,\ f o r_1 = r_2$;

b) $g \in \upsilon,\ r_1 o g o r_3 = r_2$.

On traite également à ce niveau des problèmes de lieux géométriques qui sollicitent le plus souvent les propriétés de conservation des rotations dans des configurations familières.

- En plus du cadre géométrique, les connaissances doivent être construites dans le cadre analytique. Les figures et la langue naturelle constituent encore des registres privilégiés de représentation et de traitement des problèmes.

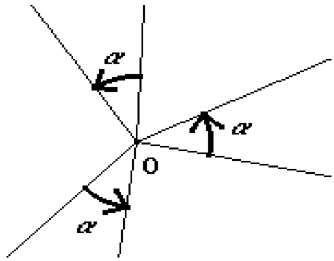

Figure 4

- L’intégration du sens et de l’angle géométrique donne un nouvel objet mathématique: l’angle orienté du plan. Au-delà de son rôle définitoire pour la rotation, l’angle orienté est considéré à ce niveau conceptuel comme l’invariant géométrique qui caractérise le mieux cette transformation. De plus, la définition de la somme de deux angles orientés permet de définir la composée de deux rotations de même centre. En retour, la rotation permet de faire découvrir à des élèves de *10^e*, que l’angle orienté est «un invariant de relation, Sangaré (*2000*)». Ce type d’interactions (*angle, rotation*) peut être représenté graphiquement par la figure (***fig.** 4*).
- Le *niveau 3* est celui que nous appellerons aussi *niveau d’articulation*, entre transformation de figures et transformation ponctuelle. Il peut être repéré également par le statut de l’angle et de la rotation:

– celui de l’angle en tant qu’«objet géométrique, Balacheff (1999)»;
– celui de la rotation en tant que relation entre deux configurations géométriquesou dans des cas assez simples, comme transformation ponctuelle.

Dans ce dernier cas, on assiste à une première découverte de la rotation comme application des points du plan dans lui-même, l’angle orienté de couple de demi-droites contribue à cette acquisition en tant qu’invariant géométrique de relation même, s’il reste encore tributaire de son sommet qui est en général, le centre de rotation (***fig.** 4*).

***Niveau 4*: (**$\hat{\alpha}+\hat{\alpha}' \Leftrightarrow r \circ r'$**)**

- L’unification des angles orientés permet d’introduire la propriété géométrique selon laquelle, «*Trouver la somme deux angles orientés*

$\hat{\alpha}$ et $\hat{\alpha}'$, revient à chercher l'angle d'une rotation qui est la composée de deux rotations de même centre ou de centres distincts, et d'angles respectifs $\hat{\alpha}$ et $\hat{\alpha}'$ ». A partir de ceci, on fait consolider la liaison existant entre les propriétés attachées à l'addition des angles orientés du plan, et celles attachées à la composition des rotations planes.

L'unification de **Φ** permet aussi de situer la rotation par rapport aux autres transformations enseignées, en particulier par rapport aux autres isométries planes. Mais cette mise en rapport s'effectue généralement dans les registres des figures et celui des expressions analytiques. C'est ainsi que sont étudiées la nature et les caractéristiques d'une transformation géométrique donnée comme composée, de deux rotations de centres distincts, d'une rotation et d'une symétrie orthogonale, d'une rotation et d'une translation, etc. On aborde ensuite les connaissances liées aux effets respectifs de ces transformations, sur des configurations familières en particulier sur les angles orientés.

Par ailleurs, les similitudes planes (directes ou indirectes) sont également introduites au *niveau 4* qui se situe à cheval entre la *11^e* et la *12^e*. A ces deux niveaux scolaires, les élèves construisent en particulier, les connaissances relatives à leur action sur les distances et l'orientation du plan. Ces connaissances sont le plus souvent utilisées dans des problèmes de construction de transformées de figures avec des contraintes. On assiste également à l'introduction d'une classification des transformations enseignées suivant les propriétés de conservation qui leur sont attachées.

- Les problèmes sont divers au *niveau 4*, leur représentation et leur traitement se font surtout à travers de fréquents allers et retours entre le cadre géométrique et le cadre de l'analytique. On y rencontre des exercices de construction, de recherche d'ensembles de points du plan, avec comme outils, ceux liés aux propriétés de conservation. Ils sont souvent relatifs à la détermination de la somme de deux angles de sommets distincts en relation avec la caractérisation géométrique de la composée de deux rotations de centres distincts. C'est le cas par exemple dans l'exercice de la Collection IRMA (*1991*), Terminale CE, pp. *434-435, n° 8*.

Le plan $\mathcal{P}$ est supposé orienté. Soit A, B, C, et D quatre points non alignés tels que: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\vec{0}$.

Soit R_1 la rotation de centre A et d'angle orienté $(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB})$. *Soit R_2 la rotation de centre B et d'angle orienté* $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC})$.
a) Construire l'image de A par $R_2 \circ R_1$.
b) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de $R_2 \circ R_1$.

- Les registres des figures et de la langue naturelle sont toujours sollicités. Cependant, on assiste à ce niveau, à un retrait progressif des configurations particulières au profit de traitements sur des figures planes considérées comme ensembles de points. L'une des caractéristiques du *niveau 4* réside également dans l'utilisation permanente des interactions entre le cadre géométrique et le cadre analytique.
- A ce niveau conceptuel, les interactions entre angle orienté et rotation plane commencent à transcender les difficultés d'ordre spatial qui sont liées au centre de rotation. Deux rotations du plan affine euclidien de même angle de centres respectifs $\boldsymbol{O_1}$ et $\boldsymbol{O_2}$, ont à une translation près, les mêmes effets (respectivement $\boldsymbol{F_1}$, et $\boldsymbol{F_2}$) sur une même figure $\boldsymbol{F}$ comme l'indique la figure (***fig.*** 5). Ceci constitue au plan didactique, le fondement sur lequel est construite cette autre propriété suivant laquelle, déterminer un angle orienté de couple de demi-droites équivaut à déterminer une rotation vectorielle.

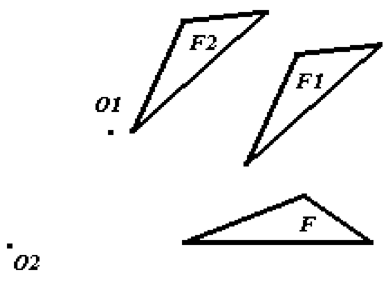

Figure 5

L'angle devient alors la caractéristique essentielle de la rotation et ne dépend plus du centre de rotation. En retour, la rotation va servir progressivement comme outil dans la conceptualisation de l'angle orienté en tant que figure géométrique.

- Au *niveau 4*, l'angle orienté doit être considéré comme invariant géométrique, appréhensible en tout point et suivant toute direction dans le plan. Cependant, il reste à franchir une contrainte majeure, celle liée à la «taille» puisque la rotation est une isométrie. Néanmoins, la rotation doit apparaître alors de façon systématique comme transformation ponctuelle et la figure géométrique doit être vue comme ensemble de points. Ainsi, l'acquisition de ces connaissances doit participer de façon significative à la mise en place d'une conception «homogénéisée du plan au sens de Bautier (1988, pp. 352-354)».

***Niveau 5*: $(\Phi, +) \cong \{O^+(E_2), \circ\}$**

- C'est à ce niveau qu'on introduit l'angle orienté de droites à partir de l'angle orienté de couple de demi-droites. C'est l'occasion de faire établir les propriétés liées à la *cocyclicité* de *4 points du plan*. Par ailleurs, les isomorphismes entre les groupes $(\Phi, +)$, $(O^+(E_2), \circ)$ et $(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}, +)$ s'élargissent au groupe multiplicatif $(U, \times)$ des complexes de module *1* et au groupe multiplicatif $(SO(2), \times)$ des matrices orthogonales d'ordre *2* et de déterminant $(+1)$. Ces connaissances sont à construire en 12e puis à consolider et à approfondir à l'université. Le *niveau 5* consacre de façon systématique le statut d'objet algébrique de la rotation et de l'angle orienté. C'est le niveau où l'enseignement des deux notions doit transcender le contexte des figures. Elles sont alors considérées comme «éléments d'une structure de groupe. (JAHN A.P., *1998*)».
- Dans le cadre géométrique, les problèmes sont relatifs à la recherche d'ensembles de points du plan, ou encore à des exercices de démonstration de propriétés d'incidence telles que l'alignement de trois points ou encore la *cocyclicité* d'un quadruplet de points du plan. On rencontre aussi à ce niveau des problèmes de traduction de propriétés géométriques d'un cadre à un autre; c'est le cas par exemple de l'exercice *n°37* de la collection IRMA (1991, p. 439) , Terminale CE, Algèbre et Géométrie:

Soit A, B et C trois points du plan complexe, d'affixes respectives a, b et c.
1) Déterminer les nombres complexes α et β tels que l'application ψ définie par:
$\psi: \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$
$z \longmapsto \alpha z + \beta$*, soit associée à la rotation r de centre A et d'angle orienté* $\pi/3$.
2) Quelle relation doit-il exister entre a, b et c pour que r(B) = C?

- La représentation et le traitement des deux notions dans le plan, deviennent multiformes; en plus des cadres géométrique et analytique, apparaissent le cadre algébrique en particulier l'utilisation des nombres complexes. Cependant, les registres des figures et de la langue naturelle sont toujours présents à ce niveau, même s'ils sont le plus souvent considérés comme constitutifs d'un milieu stable (ou à stabiliser) dans le processus d'apprentissage de l'angle et de la rotation, afin d'aborder les deux notions dans le cadre algébrique. C'est alors que le domaine de l'algèbre linéaire est sollicité de façon spécifique.
- Les interactions entre les notions d'angle et de rotation dans le plan se résument pour l'essentiel, aux propriétés liées aux isomorphismes de groupes entre $(\Phi, +)$, $\{O^+(E_2), \circ\}$ et $(U, \times)$. Les propriétés liées à cet isomorphisme et exigibles des élèves, tendent à soustraire l'angle et la rotation du cadre géométrique pour les placer progressivement dans le cadre algébrique c'est à dire, d'objets géométriques, ils se *transposent* en objets algébriques. Ceci ouvre la voie à l'identification des deux objets mathématiques.

Remarque: Les niveaux conceptuels ne doivent pas être perçus comme cloisonnés, ils sont plutôt imbriqués les uns aux autres dans la perspective d'un processus évolutif de conceptualisation centré sur des interactions multiformes et permanentes entre angle et rotation.

II. 3. Regroupements des Niveaux Conceptuels

Les niveaux conceptuels peuvent être rassemblés en trois regroupements par rapport au niveau des textes de programmes, des manuels et des pratiques de classes. Chaque regroupement est repérable par un certain nombre de choix de transposition.

II.3.1. Groupement 1

Le *groupement 1* est constitué des *niveaux conceptuels 1 et 2*. Il est caractérisé par des choix qui privilégient des approches «intrafigurales, Piaget et Garcia (*1983*)» c'est à dire, l'enseignement des deux objets, s'appuie essentiellement sur les relations entre parties d'une même configuration géométrique. C'est ainsi que l'angle et la rotation sont le plus souvent présentés respectivement en tant que partie et relation entre deux parties d'une même configuration. Par ailleurs, ce groupement est caractérisé par un choix didactique lié à la «créativité didactique, c'est à dire la création d'objets d'enseignement qui ne figurent pas dans le savoir savant, Arsac (1989)»: l'orientation du plan au cas par cas, de même que la présentation de l'angle orienté sous forme de couple $(\alpha, \curvearrowleft)$ constituent des exemples.

II.3.2. Groupement 2

Le *groupement 2* est constitué des *niveaux conceptuels 3 et 4*. Il est caractérisé par des choix qui privilégient des approches «interfigurales, ibid. (1983)» c'est à dire, l'enseignement des deux objets, s'appuie essentiellement sur les relations entre configurations géométriques distinctes. C'est ainsi que la rotation est le plus souvent présentée en tant que relation entre deux configurations; de même les angles sont mis en rapport comme étant des parties respectives de deux (ou plus de deux) configurations différentes.

II.3.3. Groupement 3

Le groupement 3 comprend un seul niveau, le niveau conceptuel 5. Il est caractérisé par des choix qui privilégient des approches «transfigurales, ibid. (1983)» c'est à dire, l'enseignement deux objets, s'appuie essentiellement sur les relations entre les objets géométriques en dehors de leurs représentations dans le registre figuratif. C'est ainsi que l'angle et la rotation sont le plus souvent présentés comme éléments d'ensembles structurés, $(\Phi, +)$ et $(O^{+}(E_2),\circ)$, indépendamment de toute configuration géométrique; ils prennent alors le statut d'objets algébriques.

II.3.4. Groupements et Ordres d'enseignement

Il ressort de ce qui précède que les *groupements 1*, *2* et *3* sont situés respectivement au collège, au lycée et à l'enseignement supérieur (Second Cycle Fondamental, Lycée, Université pour le Mali). L'écart entre deux ordres d'enseignement consécutifs, est marqué par une rupture de contrat dont le franchissement constitue un nœud de tension pour l'enseignement et l'apprentissage. Par rapport au processus d'apprentissage, une solution pertinente à une telle rupture exige de la part de l'élève (ou de l'étudiant) certaines aptitudes:

Aptitude à adopter un changement de point de vue lors du passage du groupement 1 au groupement 2 caractérisé par la construction de connaissances liées au couple (*angle, rotation*), par une approche «interfigurale» à partir de connaissances acquises par une approche «intrafigurale». Cette étape du processus est marquée également par un changement de statut des objets qui sont l'enjeu de l'apprentissage; on passe d'objets essentiellement issus de créativité didactique à des objets géométriques.

Du *groupement 2* au *groupement 3*, il s'agit d'adopter un changement de point de vue qui permet la construction de connaissances liées au couple (*angle, rotation*), par une approche «transfigurale» à partir de connaissances acquises dans une approche «interfigurale». Ainsi, l'angle et la rotation en tant qu'objets algébriques doivent être conçus à partir de leurs acceptions géométriques respectives.

II.3.5. Le cas spécifique de la transition «9e – 10e» au Mali

Selon les textes de programmes en vigueur, le *groupement 1* n'est pas abordé au Mali.[17] La rotation selon nos programmes est, introduite à partir du *groupement 2* c'est à dire sous sa forme géométrique, par son centre et son angle: ($r = (O, \hat{\alpha})$). Ce choix ne constitue-t-il pas une source de blocage dans l'apprentissage de la rotation? De notre point de vue, l'effort de conceptualisation exigé dans ce cas est énorme. En conséquence, très peu d'élèves sauront a priori construire des connaissances conformes à l'esprit des textes de programmes.

17 Alors que la rotation est objet d'enseignement dès le collège dans la plupart des pays francophones d'Afrique de l'Ouest.

III. Un Test sur l'angle orienté

III.1. Une question – une hypothèse

L'analyse des interactions au sein du couple (*angle, rotation*) en termes de niveaux conceptuels nous a conduit à un questionnement sur quelques points d'ombre relatifs au processus de conceptualisation des notions d'angle et de la rotation par rapport à une perspective de transition lycée – université.

Q *: Les erreurs relatives aux notions d'angle et de rotation sont-elles encore repérables à la sortie du lycée?*

A ce questionnement, nous émettons l'hypothèse formulée ci-dessous:

H *: Les choix didactiques fondés essentiellement sur les aspects numériques de l'angle orienté, constituent au niveau des élèves de lycée, une source de blocage à une appréhension interactive de l'angle et de la rotation en tant qu'objets géométriques.*

Deux observations sur nos pratiques de classes sont à l'origine de l'hypothèse (***H***).

La première réside dans le fait que l'aspect privilégié de l'angle comme outil de résolution de problèmes est celui où il est considéré comme «*grandeur mesurable*». L'angle semble être progressivement assimilé au lycée, à une de ses «mesures».

La seconde observation est que les interactions dans le couple(*angle, rotation*) sont le plus souvent exploitées dans un seul sens, celui de l'angle vers la rotation. La réciproque est très peu sollicitée dans nos pratiques de classes.

III.2. Le test

III.2.1. Enoncé

Solution et Justification

Soient d et d' deux demi-droites de même origine O du plan affine euclidien orienté (voir figure).

Compare les angles orientés α et β . Justifie ta réponse.

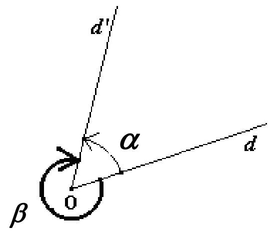

Figure 8

III.2.2. Objectifs – Public cible– Conditions du test

Deux objectifs principaux ont motivé ce test:

a) Tester le degré de prégnance des conceptions «Angle – mesure» chez les élèves à leur sortie du lycée.
b) Tester le degré de prégnance des conceptions liées aux représentations figuratives des angles.

Le public – cible est constitué de *32* nouveaux bacheliers (*2* filles et *30* garçons) de la session de juin *2008* des séries scientifiques, orientés en MPC (*1ère* année Mathématiques-Informatique) de la Faculté des Sciences et Techniques de Bamako (F.A.S.T.). Le test a eu lieu en novembre *2008* avant tout enseignement de la géométrie.

III.2.3. Eléments d'analyse a priori

L'énoncé du problème est composé d'une partie «texte» à mettre en rapport avec une partie «figure». Dans le registre des figures, les angles orientés α *et* β (***fig.*** *8*), sont deux parties d'une même configuration. Cette disposition peut renforcer la prégnance d'une approche «intrafigurale» du problème. La difficulté à trouver une solution correcte réside dans le fait que le même objet géométrique (l'angle α *ou* β) admet dans une même configuration deux représentations figuratives distinctes. Ceci est en rupture sur le plan cognitif avec le cas d'autres objets géométriques connus des élèves qui sont repérés par l'unicité de leur représentation figurative: c'est le cas par exemple d'un segment de droite dans le plan. Cette difficulté relève au plan didactique de la distinction entre «un objet géométrique de position et un objet géométrique de relation Sangaré (2000)».

La prégnance d'une représentation unique d'objet géométrique conduira certains élèves à considérer α et β comme deux angles distincts. Cette conception erronée dans le registre des figures va être renforcée par une autre rupture dans le registre numérique en cas d'utilisation de «mesures». En effet, la «mesure» de la longueur d'un segment de droite donnée est uniquedans une unité fixée; il en est de même pour l'aire d'une surface plane. Cette propriété n'est plus vraie dans le cas d'un angle orienté qui admet pour une même unité de «mesure» fixée, une infinité de «mesures». Par ailleurs, aucune allusion ne serait faite a priori sur un éventuel lien entre les angles et les rotations. Or dans un processus de résolution, la prise en compte de connaissances relatives à un tel lien est un facteur qui peut favoriser l'émergence d'une réponse correcte. En effet, pour un couple de demi-droites (*d, d'*) (de surcroît même origine), il existe une rotation unique qui transforme *d* en *d'*; cette propriété doit permettre a priori à un nouveau bachelier de conclure que: $\beta = \alpha$..

III.3. Les Résultats du test

II.3.1. Modélisation des réponses d'élèves

Le dépouillement suivi de l'analyse des productions a permis de mettre en évidence des modèles de conceptions chez les élèves observés. Ces modèles sont recensés dans le tableau ci-dessous (***Tableau** 1*).

Modèle de conceptions «Angle – Mesure»: Un point fort se dégage du tableau ci-dessus: il s'agit de la stabilité des conceptions «*angle mesure*». Les réponses de types C_1 et C_2 (*15* élèves sur *32*), ont été produites par l'emploi du registre numérique soit seul, soit en association avec d'autres registres. Aucune différence n'est faite entre l'objet géométrique «angle» et sa mesure: les expressions «$\beta = -2\pi + \alpha$» et «$\beta = \alpha - \pi$ » l'attestent à suffisance. Cependant, dans C_1, trois réponses correctes ont été obtenues en comparant les deux angles par le biais de leurs mesures respectives

Tableau 1

Codes	Types de Réponses	Effectifs	Modèles de Conceptions
C_1	$\beta = 2\pi + \alpha$ $\beta = \alpha$ *car: mes*(β) = *mes*(α) (*mod*2π)	10 3	*Conception «Angle – Mesure» dans* $\oplus/2\pi\mathbb{Z}$
C_2	$\beta = \alpha \quad \pi$	2	*Conception «Angle – Mesure» dans* $\oplus/\pi\mathbb{Z}$
C_3	$\beta > \alpha$	7	*Conception «Secteurs Angulaires»* *Prégnance de la Représentation Figurative*
C_4	$\alpha > \beta$	6	*Conception liée à la «non-unification de l’ensemble* δ *des angles orientés» et à l’existence d’un «ordre total sur* δ*»:* «{ “Φ^-”, $\{\hat{o}\}$, “Φ^+“} *est une partition de* δ.» «Φ *est totalement ordonné par* »
C_5	*Utilisation du lien entre Angle et Rotation*	2	*Conception «Interactions dans (angle, rotation)»*
RNC	*Réponses non classées*	2	
	Total	32	

dans $\mathbb{R}/_{2\pi\mathbb{Z}}$. Ces modèles de conceptions sont significatifs de l’*écrasement* de l’objet géométrique «angle orienté» sur ses «mesures» dans l’enseignement de la géométrie au lycée.

Modèle de conceptions «secteur Angulaire»: Le modèle de conceptions «*secteur angulaire*» est caractérisé par le fait que les réponses données s’appuient essentiellement sur des secteurs angulaires sans la prise en compte de l’orientation du plan malgré la donnée de celle-ci dans l’énoncé. Sept productions d’élèves liées à ce modèle ont été recensées (***Tableau 1, C_3***). Les réponses sont validées soit par comparaison des «mesures» de secteurs angulaires, soit par un contrôle perceptif comme c’est le cas ci-dessous (***fig. 9***).

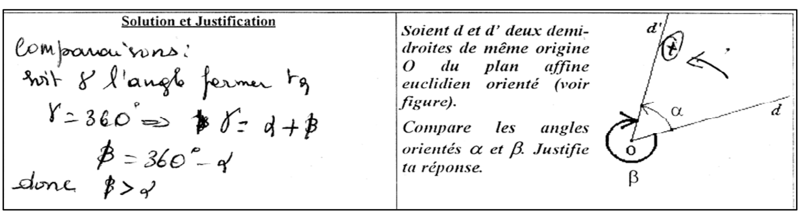

Figure 9

Modèle de conceptions lié à la « non-unification de l'ensemble δ ***»:*** Les réponses produites selon le modèle de conceptions lié à la « non-unification de l'ensemble des angles orientés δ» sont au nombre de 6 (C_4). Il se traduit dans le traitement du problème, par la mobilisation d'un certain nombre d'««opérateurs» au sens de Balacheff (1995, p. 225)» dont les plus importants sont les suivants:

- *«{ «*Φ^-*«, {*$\hat{o}$*}, «*δ^+*»} est une partition de* δ*.»où «*Φ^-*«, {*$\hat{o}$*}, «*Φ^+ *«* désignent respectivement, le sous-ensemble des «*angles positifs*», le singleton «*angle nul*» et le sous-ensemble des «*angles négatifs*».
- «Φ *est totalement ordonné par* $\leq$» et on a: «$\forall\ (\alpha, \alpha') \in \Phi^- \times \Phi^+$, $\alpha \leq \hat{o} \leq \alpha'$».

Cependant, la réponse d'élève donnée ci-dessous (***fig. 10***) montre que les «mesures» d'anglessont effectuées en référence à ses connaissances sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des réels : les expressions «$\beta < 0 < \alpha$» et «$0 < |\alpha| < |\beta|$» attestent de cette conception.

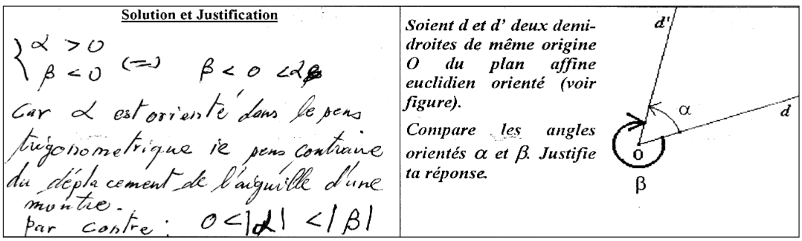

Figure 10

Modèles de réponses et Niveaux conceptuels liés au couple (angle, rotation): Deux élèves ont tenté d'utiliser le lien entre les angles et les rotations pour traiter le problème; les deux réponses sont toutes incorrectes. Cependant, la solution d'un élève dont une copie est ci-dessous (***fig. 11***), relève de la mise en œuvre d'une combinaison non réussie de plusieurs modèles de conceptions recensés dans le ***tableau 1***. Les raisons en sont les suivantes:

- La copie (***fig. 11***) révèle d'une confusion entre «mesures» d'angles orientés de couples de droites, et «mesures» d'angles orientés de couples de demi-droites: les premières sont effectuées à $k\pi$ près, alors que les secondes sont effectuées à $2k\pi$, pour k entier relatif. L'expression «$-\beta = \pi - \alpha \Rightarrow \beta = \alpha - \pi$" semble attester cette confusion. Elle atteste aussi de la mise en œuvre par cet élève de conceptions liées à l'«angle – mesure».

- Dans cet exemple, il est remarquable que les erreurs commises sur la rotation est intimement liée à celles commises sur l'angle et inversement. Cet échec est dû au fait que les *connaissances de base* liées aux relations entre angle et rotation sont rarement objet de problèmes dans nos pratiques de classe. L'allusion à «*l'élément neutre*» pour la rotation est le signe que cet élève a reçu un enseignement de la rotation dans le cadre algébrique: toute rotation d'angle de «mesure» $2k\pi$ est l'application identique du plan, donc élément neutre pour la loi de composition des transformations du plan. De plus, ses lacunes sont manifestes sur cette notion en tant qu'objet géométrique. Par rapport au classement effectué plus haut à propos de l'enseignement du couple (*angle, rotation*), il est au plus au *niveau 2*.

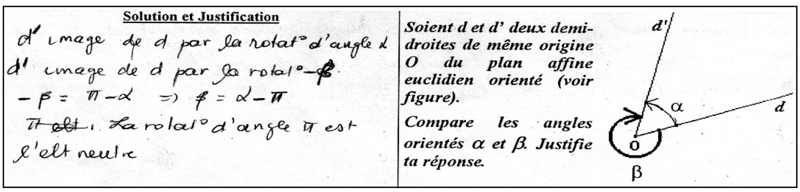

Figure 11

VI. Conclusion

VI.1. Pertinence des interactions au sein du couple (Angle, Rotation)

Au plan didactique, les rapports qu'entretiennent l'angle et la rotation ne sont pas statiques. Leur analyse nous a permis de mettre en évidence cinq niveaux d'appréhension attachés au couple (angle, rotation). Dans l'enseignement de la géométrie, cette approche est pertinente pour les raisons suivantes:

- Certes, le caractère polysémique de l'angle fait que son enseignement est assez complexe, mais cette complexité ne doit pas être statique, l'enseignement doit la rendre mobile. L'un des moyens pour favoriser cette mobilité réside dans la conception de problèmes dont la résolution exige une approche interactive de l'angle et de la rotation.

- Par ailleurs, cette approche interactive de l'angle et de la rotation favorise la construction du sens de ces deux notions à travers le double processus,

de passage de la rotation en tant que relation entre deux parties d'une même configuration à la rotation considérée comme relation entre deux configurations;

de passage de l'angle en tant que «dessin géométrique» à l'angle considéré comme «figure géométrique»[18].

L'interprétation des textes de programmes qui prévaut généralement au lycée, à propos de l'angle et de la rotation est que la première notion sert d'outil pour introduire la seconde. En effet, l'angle est toujours considéré comme élément définitoire de la rotation jusqu'à la sortie du lycée. Cette interprétation relève moins de l'esprit des textes de programmes que d'une lecture réductrice des choix didactiques liés à la mise en œuvre de ces programmes. Certes, les commentaires de ces programmes préconisent l'introduction de la rotation plane à partir de son angle et de son centre, mais nulle part, il n'est dit que cette approche doit être à sens unique comme cela semble être le cas dans nos pratiques de classes au lycée.

La production d'élève qui est reproduite en la figure (***fig. 10***), consolide notre point de vue relatif à la pertinence d'une approche interactive soutenue dans l'enseignement de l'angle et de la rotation au lycée. De façon plus générale, les transformations doivent en retour servir comme moyens de consolidation et d'élargissement du champ conceptuel des figures géométriques. C'est ce qui semble ressortir de ce point de vue de Guitart (*2000*):

> Ce n'est pas parce que l'histoire va des figures aux transformations qu'il faut supprimer les figures. Le progrès sur le purement figuratif c'est la conception plus riche qui se dit: figures et transformations. Il semble plus juste de dire maintenant que la géométrie, en particulier l'acte géométrique, cela résulte d'un va-et-vient entre figures et transformations. (Guitart R., 2000, p. 797)

---

18 Les expressions«dessin géométrique», «objet géométrique» et «figure géométrique» sont données au sens de Balacheff (1999), pp. 216-218.

VI.2. Les limites des interactions au sein du couple (angle, rotation)

Par rapport aux interactions étudiées au sein du couple (*angle, rotation*), l'équivalence mathématique n'implique pas nécessairement l'appréhension d'une équivalence au plan didactique. La rotation en tant que transformation de figures ne restitue pas toutes les significations de l'angle orienté de couple de demi-droites. Dans le registre figuratif, l'appréhension par les élèves de l'opérateur, «*l'angle ne dépend ni de la taille de ses représentants ni de celle d'une configuration géométrique dont il est élément constitutif*» n'est pas spontanée à partir d'un couple de figures homologues par une rotation puisque celle-ci conserve *la taille* des figures. Dans le domaine des transformations du plan, il faut aller au-delà de la rotation pour faire apparaître cet opérateur. L'enseignement doit en tenir compte, il s'agira alors de faire découvrir par les élèves à travers l'action d'autres transformations du plan telles que les similitudes planes directes, que l'angle orienté de couples de demi-droites:

> ne dépend d'aucun point, même si celui-ci est le sommet de l'un de ses représentants dans le registre figuratif;
> n'est lié à aucune position privilégiée par rapport au support plan de la figure en jeu;
> ne dépend de la taille d'aucun de ses représentants dans le registre figuratif, ou de celle d'une configuration géométrique dont il est élément constitutif comme le montre la figure (*fig.* 12)[19].

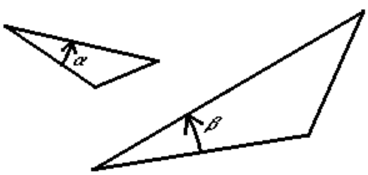

Figure 12

En effet toute similitude plane directe de rapport $k > 0$ modifie la taille des figures mais conserve les angles orientés. Néanmoins, l'approche

19 Ceci peut être rapproché des résultats de Balacheff (1988) à propos des conceptions d'élèves de collège sur la notion d'angle en particulier, lorsque la variable didactique «taille des figures» est prise en compte.

fondée sur les interactions au sein du couple (*figure, transformation*) et sur les niveaux conceptuels, offre la possibilité d'effectuer des choix didactiques pertinents pour l'enseignement de la géométrie au secondaire. Il y a près de deux millénaires entre l'apparition de l'angle et celle de la rotation en tant que transformation ponctuelle du plan. La nécessité de réduire ce décalage au moyen de processus didactiques judicieusement élaborés relève d'une problématique dont bien des aspects demeurent encore un défi pour la didactique des mathématiques.

Références

ARSAC G. (1989). "La transposition didactique en mathématiques". In: *La transposition didactique en mathématiques, en physique, en biologie*. IREM et LIRDIS, Lyon.

BALACHEFF N. (1988). *Une étude des processus de preuve en mathématiques chez les élèves de collège*. Thèse d'Etat, Université de Grenoble 1, Tome 2.

_____(1995). *Conceptions, Connaissances, Concepts*. In: Séminaires de DidaTech, didactique et technologies cognitives en mathématiques, pp. 219-244, CNRS-IMAG - Université Joseph Fourier.

_____(1999). "Apprendre la preuve". In : SALLATIN, J. et SZCZECINIARZ, J.-J. (eds.). *Le concept de preuve à la lumière de l'intelligence artificielle*. Paris, PUF (Nouvelles Encyclopédie Diderot).

BAUTIER T. (1988). *Les activités expérimentales introductives à la symétrie orthogonale au collège*. Actes de la 4ème école d'été de didactique des mathématiques, pp. 352-354. IREM de Paris VII.

BERTHELOT, R. et SALIN, M-H. (1992). *L'enseignement de l'espace et de la géométrie dans la scolarité obligatoire*. Thèse de l'université de Bordeaux I.

BROUSSEAU, G. (1998). *Théorie des situations didactiques*. Textes rassemblés et préparés par Balacheff, N.; Cooper, M.; Sutherland, R.; Warfield, V. Recherche en Didactique des Mathématiques. Grenoble, Pensée Sauvage.

CHEVALLARD Y. (1985). *La transposition didactique, du savoir savant au savoir enseigné*. Grenoble, La Pensée Sauvage (réédition, 1991, augmentée d'une postface).

CHOQUET G. (1971). *L'enseignement de la géométrie*. Paris, Hermann.

DIEUDONNÉ J. (1968). *Algèbre linéaire et géométrie élémentaire*. Paris, Jacques Gabay.

DOUADY, R. (1986). Jeux de cadres et Dialectique outil-objet. *Recherche en Didactique des Mathématiques*, 7/2, pp. 5-31. Grenoble, Pensée Sauvage.

DUVAL R. (1994). *Différents fonctionnements d'une figure dans une démarche de géométrie*. Repères – IREM, n. 17, pp . 249-280.

_____(1995). *Sémiosis et pensée humaine – Registres sémiotiques et apprentissage intellectuels*. Berna, Peter Lang.

EDWARDS, L. D. (1989). *Children's Learning in a computer Microworld for Transformations Geometry*. Doctor of Philosophy in Sciences/ Mathematics education, University Of California at Berkeley.

GRENIER, D. (1988). *Construction et étude du fonctionnement d'un processus d'enseignement sur la symétrie orthogonale en sixième*. Thèse de doctorat de l'université Joseph Fourier (Grenoble 1).

GRENIER, D. et LABORDE, C. (1988). *Transformations géométriques: le cas de la symétrie orthogonale.* In: Didactique et acquisition des connaissances scientifiques, Actes du colloque de Sèvres, mai 1987, pp. 65-86. Grenoble, La Pensée Sauvage.

GUITART, R., (2000). Voir ce que l'on dit, dire ce que l'on voit. *Bulletin 431 A.P.M.E.P.*, pp. 793-812.

JAHN A.P. (1998). *Des transformations de figures aux transformations ponctuelles: étude d'une séquence d'enseignement avec Cabri-géomètre – Relations entre aspects géométriques et fonctionnels en classe de seconde*. Thèse Université Joseph Fourier, Grenoble 1.

PAPY, G. (1967). *Mathématiques Modernes*, Tome III : Voici Euclide. Paris, M. Didier.

PERRIN-GLORIAN, M. J. (2002). *Problèmes didactiques liés à l'enseignement des grandeurs: le cas des aires.* In: DORIER J.L. et al. Actes de la 11e école d'été de didactique des mathématiques. Grenoble, La Pensée Sauvage.

PIAGET, J. et GARCIA, R. (1983). *Psychogenèse et histoire des sciences*. Paris, Flammarion.

SANGARÉ, M. (2000). *La rotation: approche cognitive et didactique; Une étude de cas au Mali*. Thèse de l'université du Mali, I.S.F.R.A. Bamako.

SANGARÉ, M. (2000). *La Machine de Sylvester – Principes Mécaniques et Principes Mathématiques: une Etude de Cas*. In: Actes du Premier Symposium Malien sur les Sciences, FAST, Université du Mali août 2000, pp. 124-130. Oulu University Press.

VADCARD, L. (2000). *Etude de la notion d'angle sous le point de vue des conceptions*. Thèse Université Joseph Fourier, Grenoble.

VERGNAUD, G. (1989). Psychologie du développement cognitif et Didactique des mathématiques: cas des structures additives. *Petit x*, n. 22, pp. 51-67.

______(1991). *La théorie des champs conceptuels*. *Recherche en Didactique des Mathématiques*, 10/2.3, pp. 133-170. Grenoble, La Pensée Sauvage.

Recebido em maio/2008; aprovado em jun./2009