

<http://dx.doi.org/10.23925/1983-3156.2020v22i2p689-720>

Análise das técnicas mobilizadas por licenciandos em matemática ao resolverem tarefas visuais

Analysis of techniques mobilized by mathematics degree students when solving visual tasks

Análisis de las técnicas utilizadas por los estudiantes de docencia en matemáticas al resolver tareas visuales

Natália Alcazar de Matos¹

Colégio SESI Maringá

<http://orcid.org/0000-0001-7644-794X>

Valdeni Soliani Franco²

Universidade Estadual de Maringá

<http://orcid.org/0000-0002-9202-4434>

Mariana Moran³

Universidade Estadual de Maringá

<http://orcid.org/0000-0001-8887-8560>

Resumo

Fundamentado em uma pesquisa de mestrado, este trabalho tem como objetivo analisar as técnicas mobilizadas por 18 estudantes do 2º ano de Licenciatura em Matemática ao resolverem tarefas matemáticas visuais, classificando-as segundo seu nível de Visualidade Matemática e identificando, quando houver, a presença das habilidades de visualização - Interpretação da Informação Figurativa (IFI) e Processamento visual (VP), descritas por Alan J. Bishop. Os dados foram coletados por meio do registro escrito das resoluções de duas tarefas matemáticas propostas aos participantes da pesquisa. A análise dos dados revelou que das 15 resoluções apresentadas, 7 foram classificadas como técnicas parcialmente visuais, 5 como não-visuais e 3 como visuais. Todas apresentaram indícios da habilidade IFI; e 10 do VP.

Palavras-chave: Visualização matemática, Tarefas matemáticas, Habilidades visuais.

¹ nalcazarm@gmail.com

² vsfranco@uem.br

³ mbarroso@uem.br

Abstract

Based on a master's research, this work aims to analyze the techniques mobilized by 18 students of the 2nd year of a Mathematics degree course when solving visual mathematical tasks, classifying them according to their level of Mathematical Visuality and identifying, if any, the presence of visualization skills - Interpretation of Figurative Information (IFI) and Visual Processing (VP), described by Alan J. Bishop. The data were collected through the written record of the resolutions of two mathematical tasks proposed to the research participants. Data analysis revealed that of the 15 resolutions presented, 7 were classified as partially visual techniques, 5 as non-visual, and 3 as visual. All of them showed evidence of IFI skill; and 10 of the PV.

Keywords: Mathematical visualization, Mathematical tasks, Visual skills.

Resumen

Basado en una investigación de máster, este trabajo tiene como objetivo analizar las técnicas movilizadas por 18 estudiantes de 2o curso de la carrera docente de Matemáticas a la hora de resolver tareas matemáticas visuales, clasificándolas según su nivel de Visualidad Matemática e identificando, en su caso, la presencia de Habilidades de visualización: Interpretación de Información Figurativa (IFI) y Procesamiento Visual (VP), descrito por Alan J. Bishop. Los datos fueron recolectados a través del registro escrito de las resoluciones de dos tareas matemáticas propuestas a los participantes de la investigación. El análisis de los datos reveló que, de las 15 resoluciones presentadas, 7 se clasificaron como técnicas parcialmente visuales, 5 como no visuales y 3 como visuales. Todos mostraron evidencia de habilidad de IFI; y 10 del PV.

Palabras clave: Visualización matemática, Tareas matemáticas, Habilidades visuales.

Análise das técnicas mobilizadas por licenciandos em matemática ao resolverem tarefas visuais

Ao longo das últimas décadas, tem sido crescente o número de trabalhos abordando a visualização matemática. Os resultados revelados por pesquisas relacionadas a este tema, como em Presmeg (1986) e Vale (2016), apontam que a visualização tem revelado o seu potencial ao ser concebida como uma estratégia a mais no leque de possibilidades que um aluno pode ter, para resolver um problema matemático, colaborando assim para sua aprendizagem. Contribuir para esse campo e abordar em sala de aula metodologias que propiciem o desenvolvimento dessa habilidade pode ser um caminho para darmos um passo em direção ao desenvolvimento da Educação Matemática. De acordo com Vale e Pimentel (2016), a estratégia, por eles chamada de “procurar ver” pode colaborar para resolver problemas, impulsionar a criatividade e aprender conceitos e resultados matemáticos, dado sentido a eles e progredindo na sua compreensão

[...] defendemos a estratégia *procurar ver* como estratégia complementar poderosa para resolver problemas, e ainda para impulsionar a criatividade, dando a todos os alunos a oportunidade de a experienciar numa aula de matemática (Vale & Pimentel, 2016, p. 9).

Nesta mesma perspectiva, Buratto (2012) afirma que

A aprendizagem é voltada para a melhoria das condições do pensamento espacial para que o aluno possa pensar em novas relações com o conceito matemático, interligadas com o visual no ensino da matemática, aumentando as habilidades para a interpretação das transformações projetivas de modo a facilitar o entendimento de futuros conceitos geométricos (Buratto, 2012, p. 62, grifo nosso).

Tais resultados têm impulsionado as pesquisas a este respeito, difundindo o conceito de visualização na literatura referente a educação matemática. Com o crescente interesse voltado a este campo, diversos autores vêm apresentando suas próprias definições para este termo.

Dentre os estudos iniciais referentes ao termo visualização destacam-se os de Bishop (1973, 1983, 1988a, 1988b), que já nos anos 70 revelava seu interesse em relação a este tema. Ainda nesta época, ao observar a literatura, este pesquisador percebeu que a construção deste

conceito interage com as ideias de *imaginação, habilidade espacial e intuição*. Também Norma Presmeg tem grande contribuição no desenvolvimento dessa área de pesquisa. Seu trabalho, publicado em 1986, apresenta uma pesquisa realizada com alunos e professores durante 8 meses, onde foram realizadas observações, entrevistas e tarefas. Neste trabalho, a partir da experiência desta pesquisa Presmeg apresenta sua concepção de visualização como sendo uma relação entre imagens, uma vez que para ela uma imagem visual é um *esquema mental* representando informações reais ou espaciais (Presmeg, 1986). Algum tempo depois, Zimmermann e Cunningham (1991) apontam que na matemática, a visualização não é um fim em si, mas um meio para um fim: o entendimento (Zimmermann & Cunningham, 1991). Desta forma, para esses autores, a visualização matemática é definida como o processo de formar imagens e usá-las para descoberta e compreensão matemática.

Enriquecendo o campo teórico a respeito das representações matemáticas, Dreyfus (1991) afirma que este pesquisador afirma que a visualização se mostra eficaz, para apoiar a intuição e a formação de conceitos na aprendizagem da matemática. Este pesquisador define a visualização sob as lentes da Educação Matemática e afirma que ao ser analisada sob este ponto de vista a visualização se desdobra em duas direções: a primeira diz respeito à *interpretação e compreensão* de modelos visuais e a segunda aborda a capacidade de *traduzir* em informação de imagens visuais o que é dado de forma simbólica (Dreyfus *apud* Costa, 2000).

Neste trabalho, tendo em vista o seu objetivo, conceberemos o termo visualização como o processo composto por duas habilidades, a interpretação da informação figurativa (IFI) e o processamento visual (VP), conforme descritas por Bishop (1983). Além disto, utilizando termos de Presmeg (1986) chamaremos de visualizadores aqueles indivíduos que preferem utilizar métodos visuais ao resolverem problemas matemáticos que podem ser solucionados por métodos visuais ou não visuais. Já os não-visualizadores são aqueles indivíduos que tendo a possibilidade de resolver um problema matemático por diversos métodos, preferem utilizar

os que não são visuais (Presmeg, 1986). Para Presmeg (1986), o que determina se um método de solução é visual ou não visual é a presença ou a ausência de imagens visuais como parte essencial do trabalho de resolução. A escolha desses autores como referencial principal para a análise realizada neste artigo se justifica na próxima seção.

Este trabalho propõe realizar uma análise de como licenciandos em Matemática resolvem tarefas matemáticas visuais de geometria. Nosso objetivo é investigar quais técnicas são mobilizadas por eles, identificando nessas técnicas aspectos concernentes as habilidades de visualização (IFI e VP).

Concebendo a Visualização Matemática

Um dos maiores responsáveis pela expansão do campo de pesquisa em visualização foi o pesquisador Alan J. Bishop, um dos precursores do movimento que surgiria em prol das investigações em habilidades visuais. Segundo Presmeg (2008), a revisão da pesquisa em habilidades espaciais no campo da psicologia, feita por Bishop já em 1980, não somente apresentou o estado da arte deste campo naquele tempo, mas fez muito além disso. Em consonância com a preocupação que demonstrou em várias de suas pesquisas para melhorar o ensino e aprendizagem de matemática, neste trabalho Bishop identificou elementos salientes e tópicos dos estudos em visualização que poderiam, e viriam a ser desenvolvidos e investigados nas pesquisas em educação matemática para muitos anos por vir.

Sempre afirmando o seu interesse em promover pesquisas relevantes para além do campo teórico, mas que atingissem também a atividade do professor em sua profissão, Presmeg (2008) aponta que, “a escrita de Bishop reflete sua constante preocupação de que a pesquisa em educação matemática deve ser relevante para os detalhes básicos do trabalho do professor na sala de aula de matemática”⁴ (Presmeg, 2008, p. 85, tradução nossa).

⁴“Bishop’s writing reflects his constant concern that research in mathematics education should be relevant to the nitty-gritty details of the teacher’s work in the mathematics classroom.” (Presmeg, 2008, p. 85)

De acordo com Presmeg (2008), fundamentado nesses objetivos, Bishop propõe analisar a visualização por meio de dois tipos de constructos. Esses dois constructos, referem-se a duas habilidades que segundo ele, compõem a visualização. São eles, a interpretação de informação figurativa, no original *interpreting figural information*, também conhecida como IFI e o processamento visual, no original *visual processing*, também chamado de VP. Esses dois constructos assim como o seu uso, foram elaborados em 1983, no artigo “Space and Geometry” (Bishop, 1983).

A identificação dessas duas habilidades colaborou para que a visualização fosse analisada do ponto de vista do processo, ou seja, da atividade que desperta. Uma vez que, de acordo com Bishop (1989), a visualização desperta a atividade de manipulação de imagens visuais, mentais ou físicas. Essa manipulação, por sua vez, ocorre por meio dessas duas habilidades, o IFI e o VP.

De acordo com Bishop (1983), a interpretação da informação figurativa – IFI refere-se à ação de compreender as representações visuais e o vocabulário espacial usados no trabalho geométrico, como gráficos, quadros e diagramas de todos os tipos. A IFI é uma habilidade que depende da compreensão do conteúdo e do contexto, e que se relaciona particularmente com a forma do material de estímulo.

Desse modo, conforme analisa Fernández (2013), a interpretação da informação figurativa é o processo de compreender e interpretar as representações visuais para extrair a informação que estas contêm, o que inclui a manipulação e a transformação de representações e de imagens visuais.

Já o processamento visual – VP é descrito por Bishop como uma característica mais dinâmica, pois envolve a visualização e a tradução de relações abstratas e de informações não-naturais em termos visuais, como por exemplo manipular e transformar representações e

imagens visuais. Em contraste com o IFI, o VP não se relaciona com a forma do material de estímulo, porque é uma habilidade de processo e não de conteúdo (Bishop, 1983).

Conforme expande Fernández (2013), o processamento visual abrange tanto o processo de conversão da informação abstrata ou não figurativa em imagens visuais, quanto o processo de transformação de algumas imagens visuais já formadas em outras. “Se trata de uma capacidade de processo que não se refere à forma do estímulo do material apresentado. Sua natureza é privada e pessoal, sendo o processo inverso do anterior”⁵ (Fernández, 2013, p. 24, tradução nossa).

Para a análise realizada neste trabalho, fundamentados em Bishop (1983), conceberemos o termo visualização como o processo composto por essas duas habilidades, a interpretação da informação figurativa (IFI) e o processamento visual (VP), conforme descritas por Bishop (1983).

A partir do modelo proposto por Bishop e após realizar sua própria investigação, Presmeg (1986) propõe uma diferenciação entre alunos visualizadores e não-visualizadores, tendo como base o conceito que chamou de Visualidade Matemática. Para essa autora, a Visualidade Matemática é o grau de preferência que uma pessoa tem por usar métodos visuais ao tentar resolver problemas matemáticos que podem ser resolvidos tanto por métodos visuais, quanto por métodos não visuais.

Para Presmeg (1986), um *método visual* de solução é aquele que envolve imagens visuais, com ou sem um diagrama, como uma parte essencial do método de solução, mesmo que métodos de raciocínios algébricos também sejam empregados. Em contrapartida, um método não visual de solução é aquele que não envolve imagens visuais como parte essencial do método de solução. Portanto, o que determina se um método de solução é visual ou não

⁵“Se trata de una capacidad de proceso y no se refiere a la forma del estímulo del material presentado. Su naturaleza es privada y personal siendo el proceso inverso del anterior.” (Fernández, 2013, p. 24)

visual é a presença ou a ausência de imagens visuais como parte essencial do trabalho de resolução.

A partir deste conceito, a autora caracteriza que um indivíduo é um visualizador se ele prefere utilizar métodos visuais ao resolver problemas matemáticos que podem ser resolvidos por métodos visuais ou não visuais. Já os não-visualizadores são aqueles indivíduos que tendo a possibilidade de resolver um problema matemático por diversos métodos, optam por utilizar aqueles que são não visuais (Presmeg, 1986). Assim, a habilidade de visualização passa a ser vista como intrinsecamente relacionada a uma preferência e não a uma capacidade ou uma característica inata.

Para a análise realizada nesta pesquisa, fundamentados em Presmeg (1986), identificamos as técnicas de resolução das tarefas matemáticas apresentadas pelos participantes classificando-as em *métodos visuais*, *métodos parcialmente visuais* e *métodos não-visuais*. Consideramos como um *método visual* as técnicas de resolução que empregam imagens visuais, com ou sem diagramas, como uma parte essencial do método, sem que estejam associadas a métodos de raciocínio algébrico. Chamamos de *método parcialmente visual* as técnicas de resolução que utilizaram imagens visuais, com ou sem diagramas, em parceria com algum método de raciocínio algébrico. Já os métodos que não empregavam imagens visuais como uma parte essencial da solução, foram denominados *métodos não-visuais*.

O quadro a seguir sintetiza os conceitos empregados por Presmeg (1986) e Bishop (1983) e que trazem fundamento para a análise apresentada neste texto.

Tabela 1

Definição dos termos utilizados para análise de dados

Termo	Definição
Visualização	Processo composto pelas habilidades de interpretação da informação figurativa (IFI) e de processamento visual (VP) (Bishop, 1983).
Interpretação da informação figurativa	Refere-se à ação de compreender as representações visuais e o vocabulário espacial usados no trabalho geométrico, como gráficos, quadros e diagramas de todos os tipos. Depende da compreensão do conteúdo e do contexto (Bishop, 1983).
Processamento visual	Envolve a visualização e a tradução de relações abstratas e de informações não-naturais em termos visuais, como por exemplo manipular e transformar representações e imagens visuais (Bishop, 1983).
Visualizador	Indivíduo que prefere utilizar métodos visuais ao resolver problemas matemáticos que podem ser resolvidos por métodos visuais ou não visuais (Presmeg, 1986).
Não-visualizador	Indivíduos que tendo a possibilidade de resolver um problema matemático por diversos métodos, opta por utilizar aqueles que são não visuais (Presmeg, 1986).
Método visual	Técnica de resolução que emprega imagens visuais, com ou sem diagramas, como uma parte essencial do método, sem que estejam associadas a métodos de raciocínio algébrico.
Método parcialmente visual	Técnicas de resolução que emprega imagens visuais, com ou sem diagramas, em parceria com algum método de raciocínio algébrico.
Método não-visual	Técnica de resolução que não emprega imagens visuais como uma parte essencial da solução.

Fonte: os autores

Tarefas matemáticas como uma ferramenta para o ensino

O contexto de uma sala de aula de matemática abrange diversos aspectos que são considerados importantes no que se refere ao ensino e aprendizagem de matemática. Nesse ambiente, são muitos os fatores que poderiam ser citados. No âmbito desta pesquisa, destacamos as tarefas matemáticas. De acordo com Joana Brocardo, “as tarefas matemáticas que se propõem aos alunos são determinantes para o tipo de aprendizagem matemática que se lhes proporciona” (EIEM 2014, pg. 3). Assim sendo, apresentamos a seguir uma reflexão a respeito do termo “tarefa matemática” e das implicações de suas inserções em uma sala de aula de matemática.

De acordo com Stein e Smith (1998), uma tarefa matemática é um segmento da atividade da sala de aula cujo objetivo é concentrar a atenção dos alunos para o desenvolvimento de uma ideia matemática particular. Consideraremos como uma tarefa matemática visual qualquer tarefa matemática cuja solução possa ser obtida por uma estratégia visual, mesmo que esta não seja a única possibilidade de resolução. Uma tarefa matemática visual não apresenta, necessariamente, uma figura em seu enunciado, mas possibilita a sua construção como um dos caminhos para a solução. De acordo com Vale et al. (2012),

Uma estratégia visual pode ser um modo diferente de encarar um problema complexo e de obter uma solução mais simples, além de que tarefas com características visuais podem ajudar os alunos a ultrapassar algumas dificuldades com conceitos e procedimentos matemáticos, resolvendo com sucesso uma dada situação problemática (Vale et al., 2012, p. 7).

A mesma autora, com base em uma pesquisa realizada em 2016, afirma que em sua investigação pôde-se perceber que os alunos que utilizam estratégias visuais, na maioria dos casos, fazem-no depois de uma maior análise e reflexão sobre o problema, ou até mesmo, em alguns casos, como uma opção alternativa de solução que descobrem posteriormente, e que consideram mais bonita ou elegante (Vale, 2016). Nesta perspectiva, tem-se que

[...] as estratégias visuais, em certas ocasiões, são eficientes no sentido de que ajudam o solucionador na organização e compreensão mais profunda das questões que se colocam com a tarefa e da própria estrutura matemática subjacente ao problema (Vale, 2016, p. 21).

Neste trabalho, analisamos a resolução de duas tarefas matemáticas visuais por 18 participantes, tendo em vista o objetivo de analisar, do ponto de vista da visualização, quais técnicas de resolução seriam mobilizadas por eles. Na análise descrita a seguir, identificamos em cada uma das tarefas quais técnicas os participantes utilizaram para resolverem as tarefas matemáticas aplicadas, tendo como objetivo analisar aspectos referentes a visualização dos participantes, identificando as habilidades de Interpretação da Informação Figurativa e de

Processamento Visual. Também são analisadas quais das técnicas utilizadas são métodos visuais, não-visuais, ou parcialmente visuais.

Procedimentos metodológicos

Este artigo apresenta parte dos resultados de uma pesquisa de mestrado que faz parte um projeto maior realizado pelo Grupo de Pesquisa em Ensino de Geometria – GPEG. A presente proposta foi avaliada e aprovada pelo Comitê Permanente de Ética em Pesquisa com Seres Humanos – COPEP⁶. Além disso, todos os alunos participantes entregaram o Termo de Consentimento Livre e Esclarecido, devidamente assinado.

Como os dados obtidos por esta pesquisa não podem ser traduzidos de maneira mensurável, optou-se pelo método qualitativo, que segundo Denzin e Lincoln (2011) tem seu foco voltado para analisar aspectos implícitos, o que se faz, pelos pesquisadores, de maneira interpretativa a partir das lentes teóricas pelas quais se observa o caso estudado, a partir de seu referencial. Assim, ao assumir o paradigma interpretativo, assume-se também um compromisso com o quadro teórico e metodológico concordante com a natureza da investigação.

Contexto e participantes da pesquisa

Os dados analisados nesta pesquisa foram coletados, durante a disciplina de Teoria e Prática Pedagógica I, do segundo ano do curso de Licenciatura em Matemática de uma Universidade ao Norte do Paraná. Esta disciplina, ministrada no 2^o ano do curso de Licenciatura da Universidade pesquisada, possui carga horária de 102 horas e tem como objetivos conhecer as principais tendências da Educação Matemática escolar; considerar a natureza do conhecimento matemático; as dimensões do ensino e aprendizagem; possibilitar conhecimento sobre as especificidades dos alunos com necessidades educacionais especiais e,

⁶ Av. Colombo, 5790, UEM-PPG-Comitês de Ética. CEP: 87020-900, Maringá-PR. ((44) 3011-4444 / 3011-4597. *copep@uem.br

organizar e refletir sobre situações didáticas para o ensino da matemática no Ensino Fundamental. A coleta dos dados foi realizada, no primeiro semestre do ano de 2019, por meio da aplicação de um questionário contendo cinco tarefas matemáticas, durante uma aula da turma noturna da disciplina referida. Os dados foram coletados por meio dos registros escritos das resoluções das tarefas matemáticas propostas aos participantes. Para os objetivos deste trabalho, selecionamos apenas duas das cinco tarefas para serem analisadas.

A aplicação das atividades foi realizada próxima ao término do semestre, tal escolha se deu somente pelo cronograma desta pesquisa, não sendo relevante o conteúdo, nem o cronograma da disciplina, no momento da coleta de dados. Ressaltamos que a docente da turma não tinha o hábito de desenvolver tarefas visuais em sala de aula, uma vez que a visualização e o estudo de aspectos/habilidades visuais, não faz parte do programa da disciplina.

Os participantes foram 18 alunos da turma mencionada. Essa turma foi escolhida pois no terceiro semestre de graduação os alunos já possuem um rigor maior para justificar suas resoluções dos problemas matemáticos que resolvem. Além disso, como ainda se trata da primeira metade do curso, nesta fase os alunos estão num período de transição entre a realidade que enfrentavam no Ensino Básico e o formalismo requerido pela matemática acadêmica. Outra facilidade advinda da opção por essa turma repousa no fato de que uma das pesquisadoras deste trabalho era a docente da turma, sendo assim prontamente concedeu espaço em sua aula para a realização desta pesquisa. Com o intuito de preservar a identidade dos participantes eles foram denominados nesta investigação por A_1, A_2, \dots, A_{18} .

Metodologia para análise dos dados

Os dados foram analisados com base nos conceitos de visualização abordados nos referenciais teóricos anteriormente citados. Para isso, num primeiro momento, foram selecionadas as tarefas matemáticas. O critério adotado para tal escolha foi de que as tarefas matemáticas a serem aplicadas, fossem tarefas matemáticas visuais.

Conforme o objetivo proposto por esse trabalho, escolhemos tarefas matemáticas que permitissem que suas resoluções fossem elaboradas por meio de diferentes técnicas. Além disso, foi analisado o grau de dificuldade de cada uma delas, a fim de que fossem escolhidas tarefas matemáticas que pudessem ser resolvidas contando apenas com a matemática do Ensino Básico, uma vez que dado o objetivo, almejávamos que todos os participantes conseguissem resolver as questões propostas.

No momento da aplicação das tarefas, os participantes foram devidamente orientados a respeito da pesquisa. Inicialmente, o objetivo da investigação não foi apresentado aos participantes, para evitar que eles fossem influenciados no momento de sua resolução. Os participantes foram instruídos a apresentarem suas resoluções de forma clara e sem se preocuparem com possíveis erros ou acertos, uma vez que para essa investigação o mais importante era a estratégia e o processo de resolução. O tema da pesquisa não foi inicialmente divulgado aos participantes, a fim de não os influenciar, já que um ponto importante da análise é investigar a preferência dos alunos por determinada estratégia. Uma folha de questões entregue aos alunos, contendo uma instrução para que os participantes resolvam as tarefas matemáticas justificando todas as passagens e fornecendo a maior quantidade possível de detalhes em sua solução. Além disso, foi descrito que os participantes deveriam utilizar para a resolução as técnicas/resultados que eles preferissem e/ou achassem mais viável.

Com os dados já coletados, sua análise teve início na identificação dos tipos de técnicas contidos nos registros fornecidos pelos participantes, para que fossem identificadas as técnicas que foram mobilizadas por eles. Identificadas as técnicas, foram analisados e discutidos os aspectos concernentes a visualização em cada uma delas.

Descrição e análise dos dados

Nesta seção apresentamos as duas tarefas matemáticas que foram sugeridas aos participantes da pesquisa e a análise de suas resoluções, destacando as técnicas mobilizadas por eles ao resolverem as duas tarefas.

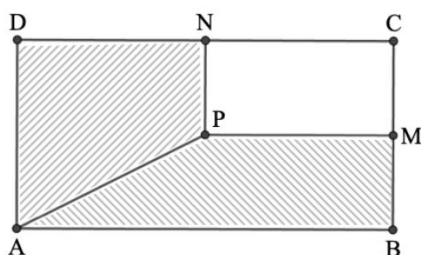
Denotaremos por " T_i " as técnicas utilizadas pelos participantes na resolução das tarefas propostas, onde "i" enumera as diferentes técnicas de resolução da tarefa. Salientamos que a escolha de "i" servirá apenas para distinguir as diversas formas de resoluções, isto é, a escolha não tem como objetivo classificar as técnicas em nenhuma ordem de importância.

A análise de cada tarefa é apresentada a fim de evidenciar quais foram as técnicas que emergiram nas resoluções dos participantes. Além disso, consideramos importante comentar os erros cometidos pelos participantes que não chegaram a uma solução correta para o que foi solicitado. Sendo assim, no início de cada análise mencionamos brevemente quais foram os principais equívocos identificados no registro dos participantes que não alcançaram o objetivo da tarefa e que por isso, não tiveram suas resoluções consideradas para a análise das técnicas.

Na figura abaixo, sejam $ABCD$ um retângulo, M o ponto médio do lado BC e N o ponto médio do lado CD . Sabendo-se que $PMCN$ é um retângulo, que o lado AB mede 12 cm e o lado BC mede 6 cm, compare as áreas dos quadriláteros $APMB$ com o quadrilátero $ADNP$.

Figura 1.

Tarefa 1 (Fonte: os autores)



Nesta tarefa, elaborada pelos autores desta pesquisa, tem-se como objetivo a comparação entre as áreas de duas figuras geométricas. As referidas figuras são dois trapézios

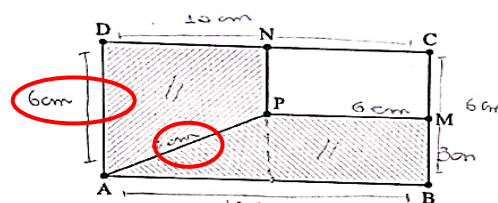
distintos, onde a distinção foi representada na figura do enunciado, sem que houvesse referência explícita a ela no enunciado da tarefa. Não é solicitado que se calcule o valor numérico das áreas abordadas na figura para que tal comparação seja realizada. Escolhemos essa tarefa pelo fato de ela possibilitar que seu objetivo seja alcançado por diferentes caminhos, incluindo aqueles que são estritamente visuais ou estritamente algébricos.

Dos 18 participantes da pesquisa, todos apresentaram alguma solução para a tarefa 1. Desse total, 6 alunos utilizaram algum método por meio do qual não conseguiram chegar à solução ou apresentaram como resposta algo diferente do que era solicitado na tarefa, sendo assim, não foi possível classificar o tipo de técnica utilizada por esses participantes. Nos registros desses 6 alunos, aparecem conclusões sem justificativas, onde não é possível identificar o tipo de raciocínio que os levou a chegar às (quando houve) respostas apresentadas ou justificativas feitas de modo incorreto, donde foi possível inferir que os erros cometidos decorrem da ausência ou limitação das habilidades de visualização. Comentamos a seguir algumas dessas tentativas.

Os participantes A_1 e A_5 , por exemplo, assumem que os segmentos AD e AP possuem a mesma medida, como apresentado pelo participante A_5 na figura a seguir.

Figura 1.

resolução apresentada por A_5



Quadrilátero $ADNP$: Se a distância entre $DC = 12$ e N é o ponto médio entre as partes $DN = 6$ cm, $DA = 6$ cm, $AP = 6$ cm (pois N como ponto médio do lado DC é igual para o lado AB), e o lado $NP = 3$ cm (pois M como ponto médio que era igual a P), pois quadrilátero $APMB$ tem $AB = 12$ cm, $AP = 6$ cm, $PM = 6$ cm e $MB = 3$ cm, logo podemos observar que o quadrilátero $APMB$ tem área maior que o quadrilátero $ADNP$.

Essa afirmação evidencia a suspeita de que ao olharem para a imagem esses participantes não visualizam os conceitos ali presentes, mas apenas inferem com base naquilo que acreditam ver. Em termos de visualização, esse erro indica uma limitação na habilidade de Processamento Visual, uma vez que esses participantes fazem suas suposições sem levar em conta os argumentos de ordem geométrica que também são abrangidos pelos elementos da figura, mas que não são explícitos em termos visuais.

Outro erro recorrente e que também invalidou algumas soluções é a dificuldade em identificar e utilizar corretamente o vocabulário compreendido na situação apresentada na tarefa. Problemas ao usarem as notações e erros na escrita matemática dos participantes podem ser uma evidência de dificuldades na Interpretação da Informação Figurativa – IFI, já que esta habilidade está relacionada a compreensão do conteúdo e do contexto.

Dentre os demais alunos, todos chegaram à conclusão correta e entre as suas resoluções surgiram três tipos de técnicas, que serão apresentadas a seguir.

- T₁: Aplicar a fórmula para o cálculo da área de um Trapézio

Figura 2.

Técnica de resolução τ_{11} aplicada por A₄

A_{APMB} e A_{ADNP}
 são áreas de trapézios,
 cujas fórmulas de áreas
 são: $A_{trap} = \frac{(B+b) \cdot h}{2}$
 $\Rightarrow B, b$ são bases maior
 e menor respectivamente
 $\Rightarrow h$ é a altura
 Para $A_{APMB} = \frac{(12+6) \cdot 3}{2}$
 $A_{APMB} = \frac{18 \cdot 3}{2} = 27 \text{ u.a.}$

Para $A_{ADNP} = \frac{(6+3) \cdot 6}{2}$
 $A_{ADNP} = \frac{9 \cdot 6}{2} = 27 \text{ u.a.}$

As áreas dos trapézios APMB e ADNP são iguais.

Essa foi uma das técnicas que mais ocorreram entre os participantes da pesquisa. Esta técnica consiste em aplicar a fórmula para o cálculo da área de um trapézio. Nela, o aluno identifica que os quadriláteros APMB e ADNP são trapézios. Assim sendo, identifica cada um

dos seus elementos (base maior, base menor e altura) e por fim, aplica a fórmula, já que as medidas necessárias são facilmente obtidas por meio do enunciado da tarefa.

Os participantes que aplicaram este método de resolução obtiveram o valor numérico da área de cada um dos quadriláteros, compararam esses valores, identificaram que eram iguais e assim chegaram à conclusão de que os dois quadriláteros possuíam a mesma área. A aplicação dessa técnica é ilustrada pela figura 9, extraída da folha de tarefas do participante por A₄.

Observa-se que neste método de resolução a figura é utilizada somente para obter os dados necessários para que se realize um procedimento algébrico de resolução, ou seja, a aplicação de uma fórmula. A imagem fornecida pelo enunciado da tarefa não é explorada a fim de solucionar o problema por meios geométricos. Percebe-se que, para os participantes que optaram por essa técnica, a figura é observada, os quadriláteros são identificados como dois trapézios e em seguida a fórmula é aplicada.

Não consideramos esta técnica como um método visual de solução, pois essa não tem a figura como parte essencial do método de solução, como requer Presmeg (1986). Tal fato se faz evidente ao percebermos que esta técnica não necessita obrigatoriamente da figura para ser aplicada, podendo ser utilizada em uma tarefa que disponibilize somente dados numéricos. Portanto classificamos a técnica T₁ como um método não-visual de solução.

A técnica T₁ foi utilizada por 5 dos 18 participantes, são eles: A₄, A₇, A₉, A₁₁ e A₁₂. Identificamos nos registros fornecidos pelos participantes que aplicaram essa técnica, a presença da habilidade IFI – interpretação da informação figurativa, conforme descrita por Bishop (1983), uma vez que os alunos que a utilizaram demonstraram compreender a representação visual e o vocabulário utilizado no enunciado da tarefa. O que fica evidente pelo fato que os alunos identificaram na imagem que as áreas que precisavam comparar eram de trapézios. Não foi possível identificar evidências do VP – processamento visual no registro feito pelos participantes que adotaram essa técnica.

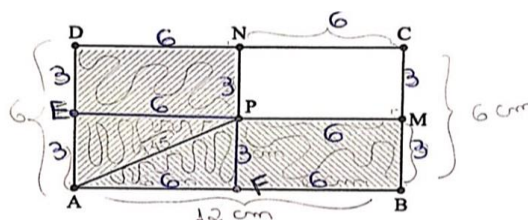
- T_2 : Particionar a figura e calcular a área de cada uma das partes.

A segunda técnica de resolução que foi utilizada pelos participantes consiste em particionar o retângulo ABCD, em figuras menores para calcular a área de cada uma das partes. Assim, somando a área de cada uma das partes que formam APMB e ADNP pode-se fazer a comparação que é solicitada. A partição é feita para que fórmulas mais simples, como a do cálculo da área do retângulo e do triângulo, possam ser aplicadas.

Essa foi a técnica mais utilizada entre os participantes, 6 dos 18 alunos escolheram esse método de resolução. Foram eles: $A_3, A_6, A_{10}, A_{13}, A_{17}$ e A_{18} . Os participantes que adotaram esse método de resolução particionaram a figura de duas formas diferentes. A maioria deles, conforme ilustrado na figura a seguir, traçou o segmento que liga o ponto P ao ponto médio do lado AD e ao ponto médio do lado AB, respectivamente.

Figura 3.

partição feita por A_6

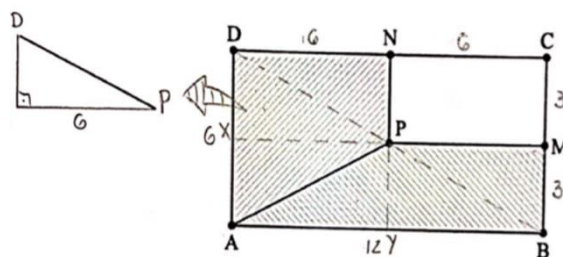


Fonte: coleta de dados

Apenas o participante A_{10} realizou uma partição diferente dos demais. Este aluno particionou a área referente aos trapézios APMB e ADNP em seis triângulos retângulos congruentes, como se mostra na imagem a seguir.

Figura 4.

partição feita por A_{10}



No caso dessa técnica de resolução, de modo geral, percebe-se que a figura é analisada sob diferentes perspectivas, a fim de fornecer informações adicionais sobre o problema. Uma vez que o ato de particionar a figura repousa sobre o resultado de que a soma da área das partes é igual a área do todo.

Observa-se que alguns dos alunos que utilizaram essa técnica percebem a congruência entre os retângulos e os triângulos obtidos nas partições. Como é o caso de A_{13} , apresentado a seguir, que registra o fato de que a figura foi dividida em quatro retângulos de mesma área, sendo que um deles foi dividido em duas partes iguais. A partir daí, esse participante calcula apenas uma vez a área de cada tipo de parte e soma a medida das partes que compõe os quadriláteros que deseja analisar, conforme apresentado em seu registro.

Figura 5.

técnica de resolução τ_{12} aplicada por A_{13}

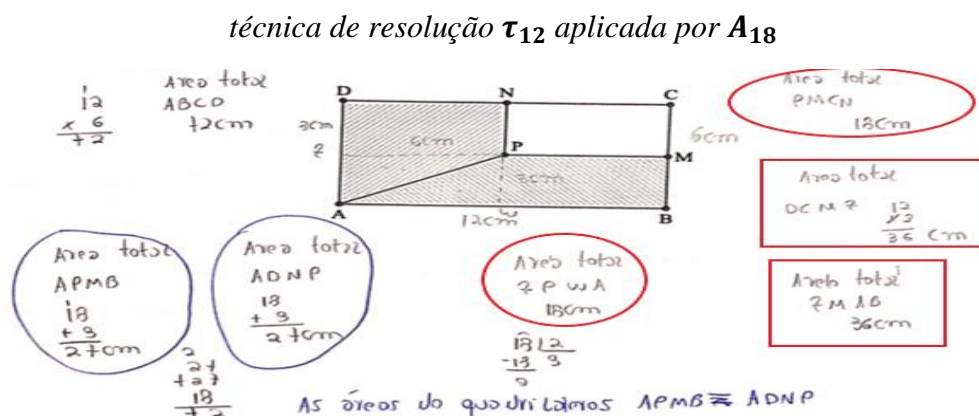
\bar{A} rea ABCD
 $12 \times 6 = 72 \text{ m}^2$
 \bar{A} rea PMCN
 $6 \times 3 = 18 \text{ m}^2$
 \bar{A} rea DNP
 $18 + 9 = 27 \text{ m}^2$
 \bar{A} rea PMB = $18 + 9 = 27 \text{ m}^2$

desenhei a caixa da PMCN
 e dividi a figura em 4 retângulos
 de mesmo tamanho, e como um
 veio AP como meio de um
 deles peguei 18 e dividi por 2
 somando
 $18 + 27 + 27 = 72 \text{ m}^2$

A₁₃ explica a forma como particionou a figura e por fim, calcula a soma da área do retângulo PMCN com a área obtida dos dois trapézios, como uma forma de verificar sua análise, observando se esse resultado seria igual a área total de ABCD inicialmente calculada por ele. Percebemos nesse caso, que o aluno visualiza a congruência entre as figuras que formam as áreas de APMB e ADNP, porém prefere fundamentar sua análise nos números obtidos por meio do cálculo da área, deixando evidente que apresenta maior segurança em apresentar uma prova numérica. Neste caso, observamos que, apesar de visualizar algumas das propriedades que podem ser extraídas da figura fornecida na tarefa, o participante prefere fundamentar sua prova em argumentos numéricos, indicando uma Visualidade Matemática intermediária.

No entanto, em outros casos, fica evidente que a congruência entre as partes da figura não é percebida, já que os alunos preferem calcular a área de cada uma delas. Como no caso de A₁₈, apresentado a seguir, onde destacamos as partes em que o aluno efetua operações para calcular a área de figuras congruentes.

Figura 6.



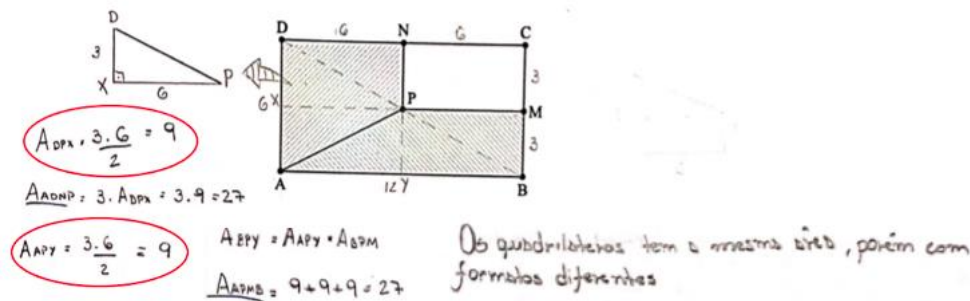
Fonte: coleta de dados

Também no caso de A₁₀, que realizou a partição apresentada anteriormente, ele percebe a congruência entre os triângulos que compõem ADNP e também a congruência entre os

triângulos que compõem APMB, porém não percebe a congruência entre as partes de ADNP e APMB, o que se mostra pelo fato de calcular as áreas DPX e APY, como apresentado abaixo.

Figura 7.

Técnica de resolução τ_{12} aplicada por A₁₀



Fonte: coleta de dados

Conforme definido anteriormente, a técnica de resolução T_2 é um método parcialmente visual, pois utiliza a imagem em parceria com algum método de raciocínio algébrico. Identificamos nessa técnica a presença da habilidade IFI, conforme descrita por Bishop (1983), uma vez que os alunos que a utilizaram, demonstraram compreender a representação visual e o vocabulário utilizado no enunciado da tarefa. Também identificamos a presença de Processamento Visual, pois percebe-se nos registros que houve a visualização de algumas informações não naturais em termos visuais, como por exemplo, visualizar e depois representar a imagem particionada. Também no desenho apresentado anteriormente, feito por A₁₀, percebe-se que, além de particionar a figura, esse participante extrai uma parte da figura e a analisa separadamente, uma outra evidência do VP.

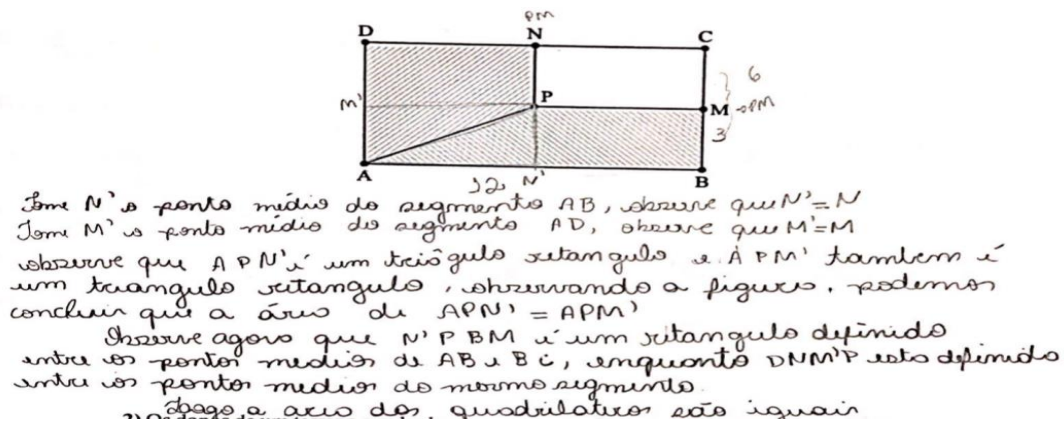
- T_3 : analisar geometricamente a imagem.

Utilizada apenas por um participante, denominado por A₂, essa foi a única técnica em que não se utilizam fórmulas ou cálculos. Neste caso, o participante consegue solucionar o problema mobilizando somente recursos visuais, demonstrando uma visualidade matemática aprimorada. Apesar de cometer alguns erros no que se refere ao uso incorreto de notações e não apresentar as justificativas necessárias para validar seus argumentos, a estratégia utilizada

por A_2 é um caminho para a solução da tarefa, pois por meio dela o participante consegue alcançar o objetivo proposto na tarefa e soluciona o problema. Apresentamos a seguir o seu registro.

Figura 9.

técnica de resolução τ_{13} aplicada por A_2



Analisando a resolução de A_2 , percebe-se que esse participante, no seu segundo ano de graduação, ainda não apresenta o formalismo requerido pelas demonstrações matemáticas. Com base em seu registro, percebe-se que, ao afirmar “Tome N' o ponto médio do segmento AB , observe que $N' = N$ ” o participante deseja expressar que ambos os pontos, N e N' , dividem os lados maiores do retângulo em duas partes iguais. De modo análogo, é feita a análise para os lados menores do retângulo com M e M' . O participante registra ainda, que as áreas dos triângulos retângulos que denotou por APN' e APM' são iguais. Em seguida, volta o seu olhar para os retângulos $N'PBM$ e $DNMP$, os quais ele justifica terem a mesma área pelo fato de ambos estarem definidos entre os pontos médios de segmentos congruentes, pois $AD \equiv BC$ e $AB \equiv DC$. Com isso conclui que as áreas dos quadriláteros $APMB$ e $ADNP$ são iguais.

Apesar da falta de formalismo nas justificativas, percebe-se nesta estratégia que o participante fundamenta o seu raciocínio somente em argumentos visuais e em propriedades geométricas. Em nenhum momento faz-se o uso de argumentos algébricos ou numéricos. Consideramos essa técnica um método visual de solução, pois tem a figura como parte essencial

para que seja aplicada. Identificamos que houve interpretação de informação figurativa, uma vez que o participante demonstra ter compreendido tanto o vocabulário quanto as representações visuais contidas na tarefa. Também identificamos a presença da habilidade VP na manipulação feita sobre a figura e nas relações abstratas e propriedades identificadas pelo participante e foram utilizadas no desenvolvimento de sua análise.

O quadro a seguir sintetiza a análise da tarefa 1, apresentando a classificação de cada técnica, quais as habilidades de visualização foram identificadas em sua aplicação e o número de participantes que aplicou.

Quadro 1.

classificação das técnicas aplicadas a tarefa 1

Técnica	Classificação	Constructos	n. de participantes
T₁	não-visual	IFI	5
T₂	parcialmente visual	IFI e VP	6
T₃	visual	IFI e VP	1

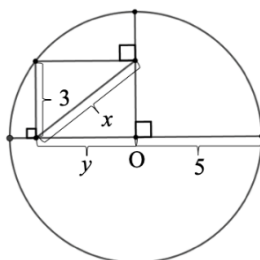
Fonte: os autores

Por meio dos dados levantados é possível perceber que das três técnicas que emergiram dentre as resoluções dos participantes, prevaleceu a quantidade de alunos que adotou técnicas não-visuais ou parcialmente visuais sendo somente um participante utilizou como técnica um método visual de solução. Todos os participantes que foram abordados na análise mostraram em suas resoluções a presença da Interpretação da Informação Figurativa, porém somente em 7 participantes foi identificada a mobilização do Processamento visual para solucionar a tarefa proposta.

Utilizando o círculo de centro O a seguir, obtenha os valores de x e y .

Figura 10.

Tarefa 2



Retirada do livro “Curso de Desenho - Vol. 1”, do professor Carlos Marmo⁷, a tarefa 2 propõe calcular a medida de dois segmentos de reta x e y . A figura apresentada no problema, na forma como foi construída, permite que os segmentos x e y sejam observados sob diversas perspectivas, possibilitando assim diferentes estratégias de solução.

Dos 18 participantes da pesquisa, apenas 3 apresentaram em seu registro o desenvolvimento de uma técnica que os conduziu ao resultado correto. Foram eles: A_4 , A_9 e A_{11} . Em relação aos outros 15 participantes, 10 deles ou deixaram em branco, ou apresentaram em seus registros apenas um esboço de algumas tentativas sem conclusão, onde fica evidenciado que não obtiveram uma técnica definida por meio da qual solucionariam a tarefa proposta. Os outros 5 alunos (A_1 , A_8 , A_{12} , A_{14} e A_{16}) apresentaram em suas tentativas suposições errôneas, que os conduziram a soluções incorretas.

As tentativas desses 5 alunos não serão analisadas, uma vez que sua análise não faz parte do objetivo desta pesquisa, porém, consideramos importante mencionar brevemente o equívoco cometido por eles. Houve três participantes (A_8 , A_{14} e A_{16}) que afirmaram que o segmento y é o lado de um quadrado e que, portanto, mediria 3. Já os outros 2 participantes, (A_1 e A_{12}) supuseram que o segmento y fosse raio da circunferência, afirmando assim, que esse segmento possui medida 5. Ambas as afirmativas estão incorretas e conduziram a raciocínios

⁷MARMO, Carlos. *Curso de Desenho*. Vol. 1. São Paulo: Editora Moderna, 1964

equivocados. Ressaltamos que essas suposições evidenciam dificuldades nas habilidades de visualização, pois revelam que esses participantes olham para a figura, mas não se detêm a análise das informações nela apresentadas a fim de associarem-nas as propriedades e conceitos que podem ser extraídos e utilizados para fundamentar as suposições feitas ao longo da análise.

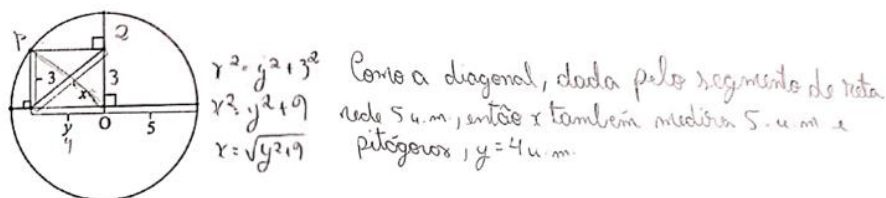
Dos 3 participantes que obtiveram a solução correta para a tarefa matemática proposta, houve a aplicação de três técnicas distintas, as quais apresentamos a seguir.

- T_1 : analisar as diagonais do retângulo contido na figura

Esta técnica de solução foi utilizada pelo participante A_{11} . Apresentamos a seguir o registro de A_{11} , no qual o participante expõe seu raciocínio.

Figura 8.

aplicação da técnica τ_{31} pelo participante A_{11}



Observa-se nesse registro que o participante insere na figura um ponto P e a seguir traça o segmento OP. Ao perceber que a diagonal traçada é também raio da circunferência apresenta um comentário onde registra que essa diagonal possui medida 5, assim por congruência temos que $x = 5$. Em seguida, aplica-se o Teorema de Pitágoras no triângulo retângulo cujos catetos medem 3 e y, e a hipotenusa $x = 5$, donde obtêm-se $y = 4$.

Classificamos esta técnica como um método visual de solução, fundamentados no que foi apresentado em Presmeg (1986), uma vez que a figura é parte essencial desta técnica de solução e sem ela não seria possível extrair uma das principais informações necessárias para a resolução desta tarefa, a de que a diagonal OP do retângulo é raio da circunferência.

Além disso, foi possível identificar a presença da habilidade IFI, pois fica evidente no registro feito pelo aluno que ele compreende o vocabulário descrito no enunciado e também se

referiu em língua portuguesa à elementos apresentados em linguagem figurativa utilizando corretamente termos como “diagonal” e “segmento de reta”.

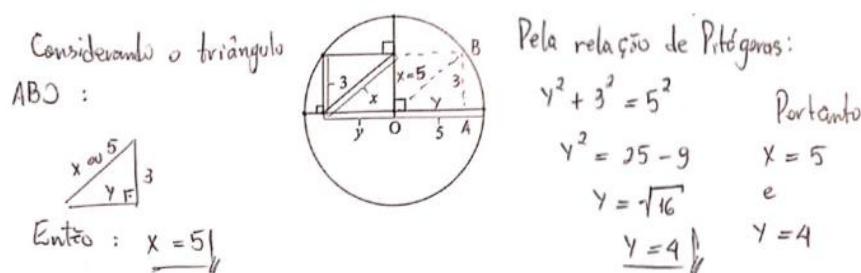
Também podemos afirmar que houve a mobilização da habilidade de Processamento Visual (VP), pois o participante que adotou esta técnica visualizou e extraiu da imagem apresentada informações não naturais, visualizando-as e traduzindo-as para a língua portuguesa, o que se evidencia pela percepção das propriedades e conceitos envolvidos na tarefa, como por exemplo a congruência e o teorema de Pitágoras.

- T_2 : analisar a simetria da figura

Esta técnica foi utilizada apenas pelo participante A_4 e tem como ponto inicial a análise da simetria da figura. Num primeiro momento, o participante faz a reflexão do retângulo contido na circunferência em torno do raio vertical contido na figura, que é perpendicular ao diâmetro traçado na figura. A partir daí, o participante analisa ambos os retângulos e traça, no novo retângulo a diagonal OB, paralela à diagonal já apresentada na figura. Nesse momento, percebe que a diagonal traçada é raio da circunferência. Assim, pela congruência das duas figuras conclui que o segmento x tem medida 5. Em seguida, o participante aplica o teorema de Pitágoras e obtém a medida do segmento y .

Figura 9.

aplicação da técnica τ_{32} pelo participante A_4



Esta técnica de resolução foi classificada como um método de solução parcialmente visual, pois é construída a partir da simetria inicial desenhada pelo participante. A partir da visualização desses argumentos geométricos, o participante obtém o valor da incógnita y , por

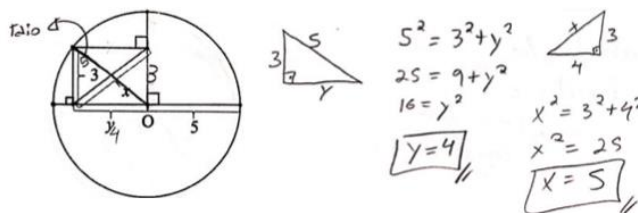
meio de um cálculo aplicando o teorema de Pitágoras. Em relação as habilidades de visualização, podemos afirmar que houve a presença da habilidade IFI, revelada em todo o registro do participante, o qual evidencia que este compreendeu o vocabulário do enunciado da tarefa e também soube interpretar corretamente os elementos apresentados na figura. Também podemos afirmar que houve a mobilização da habilidade de Processamento Visual (VP), pois o participante visualiza na imagem apresentada informações não naturais, visualizando-as e traduzindo-as em linguagem algébrica.

- T_3 : aplicar o teorema de Pitágoras

Esta técnica de resolução foi utilizada pelo participante A_9 e tem como característica a utilização do teorema de Pitágoras como ferramenta para a obtenção da medida dos segmentos x e y . Apresentamos a seguir a resolução construída pelo participante A_9 .

Figura 10.

aplicação da técnica τ_{33} pelo participante A_9



O participante dá início a sua técnica traçando a outra diagonal do retângulo contido na figura. Ao fazer isso, ele identifica que essa diagonal é também um raio da circunferência e que portanto mede 5, o que registra puxando na figura uma seta onde escreve “raio”. Sabendo disso, o participante aplica o teorema de Pitágoras no triângulo formado abaixo da diagonal traçada, cujos lados medem 3, 5 e y e assim, obtém o valor de $y = 4$. Em seguida, toma o triângulo inferior a diagonal x , que possui lados com medida x , 3 e 4 e aplica novamente o teorema de Pitágoras, donde obtém $x = 5$.

Podemos notar que nesta técnica o participante obtém os valores de x e y , por meio de um cálculo a partir da aplicação do teorema de Pitágoras. Não são utilizadas propriedades ou

conceitos geométricos que auxiliam na obtenção desses valores, como nas técnicas analisadas anteriormente. A figura é utilizada somente a fim de traçar o segmento que falta para ser aplicado o Teorema de Pitágoras, ao traçá-la o participante percebe que por se tratar de um raio, já sabe sua medida e assim, facilmente resolve o problema por meio de dois cálculos.

Classificamos essa técnica como um método parcialmente visual de solução, pois nela é possível perceber que o participante tem a figura como uma parte necessária da resolução, pois extrai dela as informações necessárias para que dê continuidade a sua resolução. As informações retiradas da figura são então associadas ao teorema e depois de realizados os cálculos a solução é obtida.

A análise da figura permite ao participante identificar que a diagonal traçada é raio da circunferência, uma informação que não é natural em termos visuais. Para que se tenha essa conclusão é preciso ter compreensão das definições de uma circunferência, raio, centro etc. Além disso, ao visualizar a figura o participante identifica em seus elementos um contexto propício para a aplicação do teorema por ele utilizado. Essas são evidências da mobilização da habilidade de visualização VP, uma vez que o processamento visual é identificado pela visualização e tradução de relações abstratas e de informações não-naturais em termos visuais. Também a Interpretação da Informação Figurativa, é identificada pela clara compreensão do conteúdo e do contexto abordado tanto na figura, quanto no enunciado da tarefa.

Apresentamos no quadro a classificação de cada técnica, as habilidades de visualização nela identificadas e o número de participantes que a utilizou em sua resolução.

Quadro 2.

classificação das técnicas aplicadas a tarefa 3

Técnica	Classificação	Constructos	n. de participantes
T₁	visual	IFI e VP	1
T₂	parcialmente visual	IFI e VP	1
T₃	parcialmente visual	IFI e VP	1

Nesta tarefa, identificamos que em todas as técnicas foram utilizadas as habilidades de visualização IFI e VP. Além disso, não foram encontrados participantes que chegaram à solução requerida na tarefa utilizando como estratégia técnicas não-visuais de solução.

Considerações Finais

Esta pesquisa teve como objetivo, analisar as técnicas mobilizadas por estudantes do 2º ano de Licenciatura em Matemática, ao resolverem tarefas visuais, identificando nessas técnicas as habilidades de visualização IFI e VP e classificando-as como métodos visuais, não-visuais ou parcialmente visuais.

Com base nos estudos que fundamentaram a escolha das duas tarefas propostas aos participantes, pudemos refletir sobre o fato que ao selecionar as tarefas matemáticas o professor/pesquisador toma a decisão de quais oportunidades serão oferecidas aos alunos/participantes. Foram selecionadas tarefas matemáticas com certo grau de abertura a fim de dar aos participantes a oportunidade de escolherem quais caminhos desejam seguir para a resolução e que pudessem ser resolvidas utilizando conceitos da matemática do ensino básico. Apesar disso, como foi observado, nem todos os participantes apresentaram tentativa de resolução para todas as tarefas.

Na análise da tarefa 1, foram identificadas na resolução dos participantes a utilização de três técnicas distintas, a primeira delas foi classificada como uma técnica não-visual, a segunda como parcialmente visual e a terceira como visual. Apesar de os três níveis de visualidade matemática serem contemplados nessas técnicas, constatou-se que a maioria (6 de 12) dos participantes preferiu optar pela técnica de resolução classificada como parcialmente visual. Como discutido, os registros dos participantes evidenciam que até mesmo quando visualizam as relações e propriedades presentes nas imagens, preferem fundamentar seus argumentos em provas numéricas.

Nota-se ainda que, o único participante que optou por utilizar uma técnica visual para resolver a tarefa 1 apresenta dificuldade com as notações e outros aspectos da linguagem matemática formal, o que pode estar associado ao fato de os participantes ainda estarem cursando o segundo ano da licenciatura em Matemática, ou à própria dificuldade que indivíduos visualizadores expressam ao formalizarem suas percepções. Em relação as habilidades de visualização, todos os participantes mostraram em suas resoluções a presença da Interpretação da Informação Figurativa, porém somente em 7 participantes foi identificada a mobilização do Processamento visual.

No caso da tarefa 2, em que apenas três alunos apresentaram resolução, constatou-se que cada um deles utilizou um tipo de técnica diferente. Nesta tarefa, a visualização se faz necessária para solução, o que justifica o fato de que dos três participantes que a resolveram, nenhum utilizou técnicas não visuais. Além disso, fica evidente a importância da visualização para o desenvolvimento das técnicas que surgiram, já que em todas elas foram utilizadas as habilidades de visualização IFI e VP. O número reduzido de participantes que apresentaram resolução para a tarefa 2 pode ser um indicativo de uma dificuldade da maioria dos participantes em traçar estratégias e apresentar técnicas para resolverem tarefas que abordem aspectos visuais. Apesar disso não foram exploradas neste trabalho, as razões dessa dificuldade, apenas comentamos brevemente quais os erros mais comuns nos registros. As três técnicas utilizadas na resolução dessa tarefa requereram a mobilização das habilidades de visualização, o que pode indicar certa dificuldade em visualizar por parte daqueles que não apresentaram resolução. Daí, decorre a importância de se proporcionar aos alunos um leque de estratégias variadas para que tenham diversos caminhos e habilidades a que recorrer no momento da resolução de uma tarefa matemática.

Desse modo, com base nos dados analisados, constatou-se que todas as 15 resoluções adotadas pelos participantes apresentaram evidências da habilidade de visualização IFI e

grande parte delas (10) também da habilidade VP. Além disso, 10 das resoluções continham técnicas visuais ou parcialmente visuais.

Para enfrentar os inúmeros desafios que são propostos a um estudante durante toda a sua formação, diversas são as habilidades necessárias para que ele atenda a cada uma das demandas que lhes são solicitadas. As metodologias de ensino adotadas, tal como a forma como são abordados os conteúdos matemáticos, podem contribuir para que se forme um indivíduo mais flexível e munido com diferentes recursos para enfrentar situações que lhes são apresentadas ao longo da vida. Acreditamos, portanto, que a visualização matemática é uma possibilidade de ampliação no leque de estratégias que podem ser utilizadas ao resolver um problema matemático, oferecendo mais oportunidades de aprendizagem e desenvolvimento. A valorização das estratégias visuais quando adotadas pelo professor nas práticas de sala de aula tende a promover nos alunos uma compreensão mais profunda de conceitos e conteúdos, além de propiciar o desenvolvimento da criatividade e de um pensamento mais flexível.

Referências

- Bishop, A. J. (1973). Use of structural apparatus and spatial ability: A possible relationship. *Research in Education*, 9, p. 43-49.
- Bishop, A. J. (1983). Space and geometry. In: R. Lesh & M. Landau (Eds.). *Acquisition of mathematical concepts and processes* (pp. 175–203). New York: Academic Press.
- Bishop, A. J. (1988a). *Mathematical enculturation: A cultural perspective on mathematics education*. Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.
- Bishop, A. J. (1988b). Mathematics education in its cultural context. *Educational Studies in Mathematics*, 19, 179–191. [Reprinted 2004 as Chapter 16 in T. P. Carpenter, J. A. Dossey, and J. L. Koehler (Eds.). *Classics in mathematics education research* (pp. 201–207). Reston, Virginia: National Council of Teachers on Mathematics.]
- Bishop, A. J. (1989). Review of research on visualization in mathematics education. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 11(1), 7–16.
- Bogdan, R. C. & Biklen, S. K. (1994). *Investigação Qualitativa em Educação*. Porto: Porto Editora.
- Christiansen, B. & Walther, G. (1986). Task and activity. In: B. Christiansen, A. G. Howson & M. Otte (Eds.). *Perspectives on mathematics education* (pp. 243-307). Dordrecht: D. Reidel.
- Denzin, N. K.; Lincoln, Y. S. (2011). Introduction: The discipline and practice of qualitative

- research. *The Sage handbook of qualitative research* (4th ed., pp. 1-19). Thousand Oaks, CA: Sage.
- Dreyfus, T. (1991). *On the status of visual reasoning in Mathematics and Mathematics Education*. Plenary address to PME XV, Proceedings Fifteen PME Conference, vol. I, p. 33-48.
- EIEM - Encontro de Investigação em Educação Matemática (2014). Sesimbra. *Livro de Atas do Encontro de Investigação em Educação Matemática*. Sesimbra: Escola Superior de Educação Instituto Politécnico de Setúbal. 385 p.
- Fernández Blanco, Tereza. (2013). *Investigación en Educación Matemática*. Bilbao: SEIEM. 23 p.
- Presmeg, N. C. (1986). Visualization in high school mathematics. *For the Learning of Mathematics*, 6(3), 42-46.
- Presmeg, N. C. (2006). Research on visualization in learning and teaching mathematics. In: A. Gutiérrez & P. Boero (Eds.). *Handbook of research on the psychology of mathematics education: Past, present and future* (pp. 205-235). Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishers.
- Presmeg, Norma. (2008). Spatial Abilities Research as a Foundation for Visualization in Teaching and Learning Mathematics. In: Clarkson, Philip. *Critical issues in mathematics education: major contributions of Alan Bishop*. New York: Springer. Cap. 6. p. 83-95.
- Stein, M. & Smith, M. (2009). Tarefas matemáticas como quadro para a reflexão: Da investigação à prática (artigo original publicado em 1998). *Educação e Matemática*, 105, p. 22-28.
- Vale, Isabel. (2012). As tarefas de padrões na aula de matemática: um desafio para professores e alunos Isabel Vale. *Interacções*, Santarém, v. 8, n. 20, p.181-207, abr.
- Vale, Isabel; Pimentel, Tereza. (2016). Resolver Problemas - Criando Soluções, Vendo. *Rematec*, Natal, v. 21, n. 11, p.8-23, abr.
- Zimmermann, W.; Cunningham, S. (1991). What is Mathematical Visualization? In: W. Zimmermann e S. Cunningham (Eds.). *Visualization in Teaching and Learning Mathematics* (pp 1-7). Washington: MAA.

Recebido em: 24/03/2020

Aprovado em: 02/07/2020