

Análise de erros em probabilidade: uma pesquisa com professores em formação continuada

Lori Viali¹
Helena Noronha Cury²

Resumo

Neste artigo, apresentamos resultados parciais de uma pesquisa desenvolvida com recursos do CNPq, com o objetivo de analisar soluções dadas por professores em formação continuada a questões sobre Álgebra, Análise, Geometria e Probabilidade. Para o relato aqui disponibilizado, analisamos os erros cometidos por 21 professores de Matemática ao resolver uma questão sobre probabilidade. A análise de erros é baseada em procedimentos para análise de conteúdo, sendo apresentadas classes de erros relacionados às definições de probabilidade. Pelos resultados obtidos, concluímos que os professores participantes não sabem resolver uma questão sobre um tópico que, pelos Parâmetros Curriculares Nacionais, deveria fazer parte dos conteúdos da Educação Básica.

Palavras-chave: análise de erros, probabilidade, professores em formação continuada.

Abstract

This article presents partial results of a research sponsored by CNPq, with the intent of analyzing the solutions given by teachers, enrolled in graduate courses, to Algebra, Analysis, Geometry and Probability questions. In this paper we have analyzed the errors made by 21 mathematics teachers in solving a probability question. The error analysis is based on procedures for content analysis and shows classes of errors related to the definitions of probability. From the results, we can conclude that the teachers do not know how to solve a question about a subject that, according to the National Curriculum Standards, should be part of the contents that they need to teach.

Keywords: error analysis, probability, teachers in graduate courses.

Introdução

O ensino de estatística e probabilidade nos níveis elementar e médio foi regulamentado pelos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) editados em 1998. Decorridos mais de 10 anos, contudo, poucos resultados foram obtidos. Os alunos continuam a chegar ao ensino superior com pouco ou nenhum conhecimento dos conteúdos dessas áreas. A causa principal, como observado em Viali (2008), é que as Diretrizes Curriculares Nacionais para os Cursos de Licenciatura em Matemática (BRASIL, 2002) não determinaram uma carga horária mínima desses assuntos nesses cursos. O resultado, de acordo com o levantamento realizado em Viali (2008), é que os currículos das licenciaturas, ou não apresentam disciplinas de Estatística ou Probabilidade, ou apresentam uma única, que engloba tanto estatística quanto probabilidade, geralmente de quatro horas aula semanais. Contudo, essa disciplina não é específica para os cursos de Licenciatura em Matemática, mas compartilhada com as Engenharias e outros cursos; assim, o futuro professor de Matemática acaba tendo

¹ Doutor em Engenharia de Produção, professor do Instituto de Matemática da UFRGS e do Mestrado em Educação em Ciências e Matemática da PUCRS

² Doutora em Educação, professora do Mestrado Profissionalizante em Ensino de Física e de Matemática do Centro Universitário Franciscano (UNIFRA).

apenas notícia desses assuntos e não recebe uma formação adequada que lhe permita sentir-se seguro para lecionar esses conteúdos. A proposta de colocar o aluno em contato com conteúdos de probabilidade e estatística, mesmo com poucas horas-aula, não é adequada e nem suficiente. Uma disciplina de Probabilidade e Estatística deve ter seus objetivos voltados para o ensino de futuros professores, mas não é isso que ocorre (VIALI, 2008).

Na preparação de professores para o ensino elementar e médio, Papaieronymou (2008) recomenda que sejam enfatizados os aspectos históricos do desenvolvimento da probabilidade, concepções errôneas mais comuns dos estudantes, aplicações dos conteúdos, o uso adequado e impróprio da tecnologia ao lidar com simulação e inferência e conexões da probabilidade com outros tópicos da Matemática. O que vem ocorrendo em nossos cursos de formação de professores, de fato, é que o licenciando cursa uma única disciplina que envolve tanto estatística quanto probabilidade, geralmente voltada para as engenharias, cuja abordagem não é própria e nem adequada ao futuro professor.

A consequência desses fatos é que o próprio professor acaba por não ter condições de resolver questões básicas de probabilidade que ele deveria estar ensinando aos alunos do ensino fundamental ou médio. Neste trabalho, apresentamos a análise de erros nas respostas a uma questão elementar de probabilidade, aplicada a uma amostra de professores desses níveis de ensino que estão em processo de formação continuada, tanto em cursos de especialização quanto de mestrado, e o resultado encontrado na avaliação preliminar aqui descrita mostra que menos de 10% conseguiram acertar a questão.

A análise de erros como metodologia de pesquisa

A análise de erros pode ser realizada com distintos objetivos e com diferentes maneiras de coletar, apresentar e interpretar os dados. Neste artigo, trazemos uma das abordagens possíveis, inspirada na análise de conteúdo. (BARDIN, 1979; NAVARRO; DIAZ, 1994; MORAES, 1999).

Bardin (1979) assinala três etapas básicas para o trabalho de análise de conteúdo: pré-análise, exploração do material e tratamento dos resultados. Ao adaptar esse método para a análise das produções de estudantes ou professores, especificamente dos seus erros, primeiramente fazemos uma leitura “flutuante” de todo o material, para avaliar as respostas. A seguir, as separamos em “totalmente corretas”, “parcialmente

corretas” e “incorretas”, fazendo a contagem do número de respostas de cada tipo. Algumas vezes, dependendo do tipo de questão, encontramos apenas duas classes, respostas corretas ou incorretas. Nessa primeira fase, já empregamos algum tipo de notação para separar aquelas produções sobre as quais nos debruçaremos, o *corpus* da pesquisa.

Em um próximo passo, aprofundamos a análise, realizando a unitarização e categorização das respostas. Segundo Bardin (1979, p. 119), “A categorização tem por primeiro objectivo (da mesma maneira que a análise documental), fornecer, por condensação, uma representação simplificada dos dados brutos.”

Nesse momento, o pesquisador já produz uma interpretação dos dados, pois estabelece os critérios segundo os quais cria as categorias. Suas decisões não são neutras, pois trazem suas concepções sobre o tema objeto de análise. Patton (1986) sugere que, se houver mais de um investigador trabalhando sobre um conjunto de dados, é recomendável que cada um produza sua classificação e que essas sejam, depois, comparadas, para refinar as classes.

Já na fase de tratamento dos resultados, as categorias são apresentadas por meio de quadros com indicação de frequências e percentagens ou com a produção de um texto-síntese que resuma cada uma, incluindo-se, também, exemplos dos erros cometidos. A interpretação dos dados da investigação é feita a partir das categorias apresentadas e exemplificadas. A fundamentação teórica para essa interpretação pode ser apresentada *a priori*, ou podem ser buscados, *a posteriori*, autores que auxiliem a analisar os problemas detectados. A partir dessa compreensão mais aprofundada, podem ser utilizados os resultados da investigação com fins teóricos ou práticos.

Se há interesse em investigar dificuldades na aprendizagem de um determinado conteúdo, à luz de uma teoria, as produções de alunos são analisadas a partir dos dados organizados segundo a sistemática acima referida. Se o objetivo é remediar os erros, pode-se empregar alguma estratégia de ensino que retome os conteúdos nos quais os respondentes mostraram maiores dificuldades. Se pretendemos utilizar os erros para fazer descobertas, podemos seguir as recomendações de Borasi (1996), de explorar os erros, juntamente com os estudantes, para fazer descobertas sobre os conteúdos em questão, em um ambiente de aprendizagem que aceite provisoriamente as respostas dadas. (BORASI, 1996; LOPES, 1987).

Aplicação de uma questão sobre probabilidade

Com o apoio do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq), está sendo desenvolvida uma pesquisa em quatro Instituições de Ensino Superior do Rio Grande do Sul, com o objetivo de analisar soluções de problemas de Álgebra, Análise, Geometria e Probabilidades e detectar erros cometidos por professores em formação continuada. Os pesquisadores envolvidos, docentes dessas instituições, elaboraram um teste-piloto, que foi aplicado a duas turmas de licenciados em Matemática, alguns deles já atuando na rede escolar. Uma das turmas é de um curso de Especialização em Educação Matemática e a outra, de um curso de Mestrado em Ensino de Matemática. Aos 43 participantes, foi aplicado um teste composto por cinco questões (em Apêndice), que apresentava um texto inicial em que os pesquisadores solicitavam alguns dados sobre o respondente e, a seguir, a resolução das questões.

Dos 43 Licenciados em Matemática, 13 (30%) não atuam no magistério. Dos 30 restantes, alguns trabalham em mais de um nível de ensino e em mais de um tipo de instituição, por isso o número de respostas é maior do que o número de respondentes. Agrupamos essas informações em gráficos, apresentados na figura 1, a seguir:

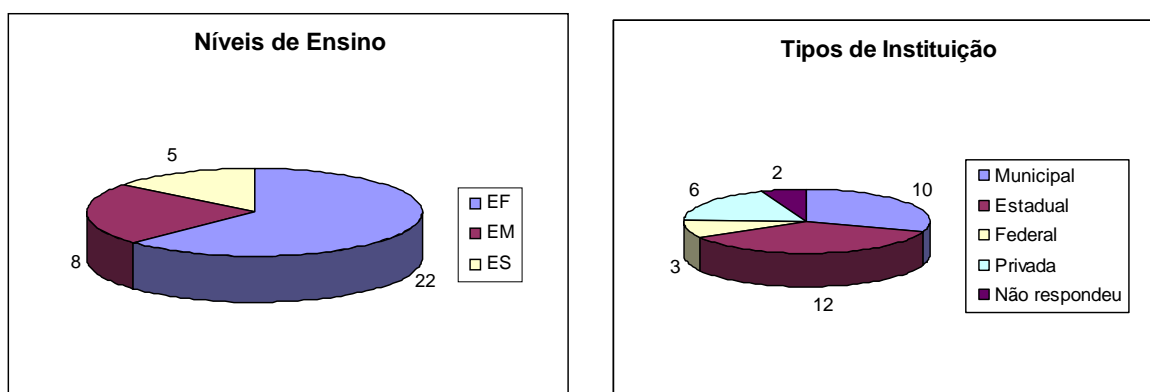


Figura 1 – Níveis de ensino e tipos de instituição em que atuam os respondentes

Inicialmente, foi feita a leitura de todas as respostas das questões propostas e que foram classificadas segundo os seguintes critérios: acertou, acertou parcialmente, errou ou não respondeu (deixou em branco). Apenas a questão 1 não foi corrigida segundo esse critério, visto que não há uma resposta numérica, pois depende da forma como o professor analisa a resolução do aluno e sugere estratégias de ensino. Dessa forma, obtivemos o Tabela 1, que fornece uma visão geral sobre o desempenho dos participantes nas questões de 2 a 5.

Tabela 1 – Desempenho dos professores nas quatro questões propostas

Questão \ Desempenho	2		3		4		5	
	nº	%	nº	%	nº	%	nº	%
Acertou	0	0	7	16	3	7	3	7
Acertou parcialmente	10	23	10	23	1	2	4	9
Errou	14	33	14	33	21	49	12	28
Não respondeu	19	44	12	28	18	42	24	56
Total	43	100	43	100	43	100	43	100

Neste trabalho é feita a análise apenas das respostas que os participantes deram à questão 4, envolvendo o conteúdo de probabilidade, com o seguinte enunciado:

Em uma urna existem quatro moedas de 10 centavos, quatro de 20 centavos e duas de 50 centavos. Retirando duas moedas ao acaso e sem reposição, determine a probabilidade de se obter exatamente 70 centavos. Se a retirada for com reposição, isto é, você retira a primeira moeda, observa, devolve e então retira a segunda, qual seria essa probabilidade?

O objeto de interesse são as respostas incorretas, para compreender as dificuldades que os professores de Matemática têm ao lidar com a aleatoriedade. Os conceitos envolvidos englobam a idéia de experiência aleatória, eventos simples e compostos, espaço amostra, definição clássica e axiomática de probabilidade, bem como regras de cálculo da soma de eventos mutuamente excludentes e do teorema da multiplicação para o cálculo do produto de eventos dependentes e independentes.

Na Matriz de Referência para o Novo ENEM (BRASIL, 2009), encontramos a lista de habilidades e competências que serão avaliadas no Exame Nacional do Ensino Médio a ser aplicado no ano de 2009. Em relação à Matemática e suas Tecnologias, a área 7 refere-se à compreensão do caráter aleatório e não-determinístico dos fenômenos naturais e sociais e utilização de instrumentos adequados para medidas, determinação de amostras e cálculos de probabilidade. Nessa área, é mencionada a habilidade H28, “Resolver situação-problema que envolva conhecimentos de estatística e probabilidade” (p. 3). Portanto, se o aluno concluinte do Ensino Médio deverá mostrar tal habilidade para ser considerado apto para o ingresso em cursos superiores, com maior razão se espera que seus professores de Matemática saibam resolver problemas que envolvam conteúdos de Probabilidade. Assim, a análise que fazemos dessa questão, ainda que

restrita a essa amostra de 43 professores, pode levantar discussões sobre as dificuldades do ensino e da aprendizagem de Matemática nos cursos de Licenciatura, especialmente no que se refere à probabilidade.

Conforme Viali (2008), os cursos de licenciatura em Matemática dedicam em média cerca de 2,7% de sua carga horária mínima a disciplinas relacionadas à estatística e à probabilidade. Pode-se estimar, então, que o conteúdo de probabilidade ocupe cerca de uma hora-aula-semester, visto que numa disciplina típica dos cursos de graduação, de quatro horas-aula, geralmente são abordados conteúdos de estatística descritiva, amostragem, estimação, testes de hipóteses e correlação e regressão, além dos de probabilidade. Contudo, o principal problema é que tais aulas não têm uma abordagem didática voltada ao ensino, isto é, de interesse de um licenciando, e normalmente segue um formato de disciplina de serviço, contemplando vários cursos especialmente os de engenharia.

A questão proposta e os resultados apresentados pelos professores

Em relação às soluções esperadas para a questão, os professores poderiam tê-la resolvido seguindo três abordagens, duas dessas sem representação visual e uma, com uma representação visual externa proporcionada pelo diagrama de possibilidades.

Para se obter 70 centavos, nas condições do problema apresentado, existem duas possibilidades:

- (i) Extrair uma moeda de 20 centavos e após uma de 50 centavos ou
- (ii) Extrair uma moeda de 50 centavos e após uma de 20 centavos.

Para apresentar as duas primeiras abordagens de solução, é conveniente estabelecer algumas convenções. Assim consideram-se os seguintes eventos:

$$M_{20} = \{ \text{retirar uma moeda de 20 centavos} \}$$

$$M_{50} = \{ \text{retirar uma moeda de 50 centavos} \}$$

Nesse caso, não é necessário considerar o terceiro evento que seria a extração de uma moeda de 10 centavos, já que com ela não é possível formar os 70 centavos solicitados no enunciado do problema.

Convém notar que os eventos dos itens (i) e (ii) são compostos e dessa forma é necessária a utilização do teorema da multiplicação para determinar as probabilidades de cada um. Essas probabilidades irão variar conforme a extração seja feita sem ou com reposição, pois no primeiro caso os eventos serão dependentes e no segundo,

independentes. Portanto, isso significa dizer que devem ocorrer os seguintes eventos compostos: $M_{20} \cap M_{50}$ ou $M_{50} \cap M_{20}$.

Como existem duas situações e elas se excluem mutuamente, é necessária ainda a utilização da regra da soma de eventos, nesse caso, em particular, eventos mutuamente excludentes.

Assim, o evento final cuja probabilidade deve ser obtida é $(M_{20} \cap M_{50}) \cup (M_{50} \cap M_{20})$. Nesse caso, ou ocorre a primeira situação ($M_{20} \cap M_{50}$) ou a segunda ($M_{50} \cap M_{20}$), não sendo possível a ocorrência de ambas simultaneamente.

A probabilidade do evento acima é:

$$\begin{aligned} P[(M_{20} \cap M_{50}) \cup (M_{50} \cap M_{20})] &= \\ &= P(M_{20} \cap M_{50}) + P(M_{50} \cap M_{20}) = \\ &= P(M_{20}) \cdot P(M_{50}/M_{20}) + P(M_{50}) \cdot P(M_{20}/M_{50}) \end{aligned}$$

Se a retirada for sem reposição, os eventos M_{20} e M_{50} são dependentes e a probabilidade acima vale:

$$\frac{4}{10} \cdot \frac{2}{9} + \frac{2}{10} \cdot \frac{4}{9} = \frac{16}{90} = 0,1778 = 17,78\% \quad (1)$$

Se a retirada for com reposição, então os eventos M_{20} e M_{50} são independentes e a probabilidade do evento pode ser escrita como:

$$\begin{aligned} P[(M_{20} \cap M_{50}) \cup (M_{50} \cap M_{20})] &= \\ &= P(M_{20}) \cdot P(M_{50}/M_{20}) + P(M_{50}) \cdot P(M_{20}/M_{50}) = \\ &= P(M_{20}) \cdot P(M_{50}) + P(M_{50}) \cdot P(M_{20}) \end{aligned}$$

A última fórmula decorre do fato de que $P(M_{50}/M_{20}) = P(M_{50})$ e $P(M_{20}/M_{50}) = P(M_{20})$

Assim, a probabilidade de retirarmos 70 centavos, se a retirada for com reposição, é:

$$\frac{4}{10} \cdot \frac{2}{10} + \frac{2}{10} \cdot \frac{4}{10} = \frac{16}{100} = 0,1600 = 16,00\% \quad (2)$$

Essa é uma das abordagens possíveis, isto é, utilizando-se as regras de cálculo da probabilidade de eventos compostos, derivadas da definição axiomática. Uma outra forma de encaminhar a solução é a utilização de análise combinatória. Nesse caso, a probabilidade, quando as retiradas forem sem reposição, é dada pelas combinações de todas as possibilidades, uma vez que não existem repetições de elementos nas combinações.

Assim a probabilidade (1) acima é obtida da seguinte forma:

$$\frac{\binom{4}{1}\binom{2}{1} + \binom{2}{1}\binom{4}{1}}{\binom{10}{2}} = \frac{8+8}{90} = \frac{16}{90} = 17,78\%$$

Para a situação com reposição, as combinações não são mais adequadas, pois agora é permitida a repetição dos elementos. Assim o adequado é a utilização do arranjo total. Nesse caso, a probabilidade (2) acima é obtida da seguinte forma:

$$\frac{4^1 2^1 + 2^1 4^1}{10^2} = \frac{8+8}{100} = \frac{16}{100} = 0,1600 = 16,00\%$$

A solução utilizando o diagrama ou árvore das possibilidades é apresentada na figura 2.

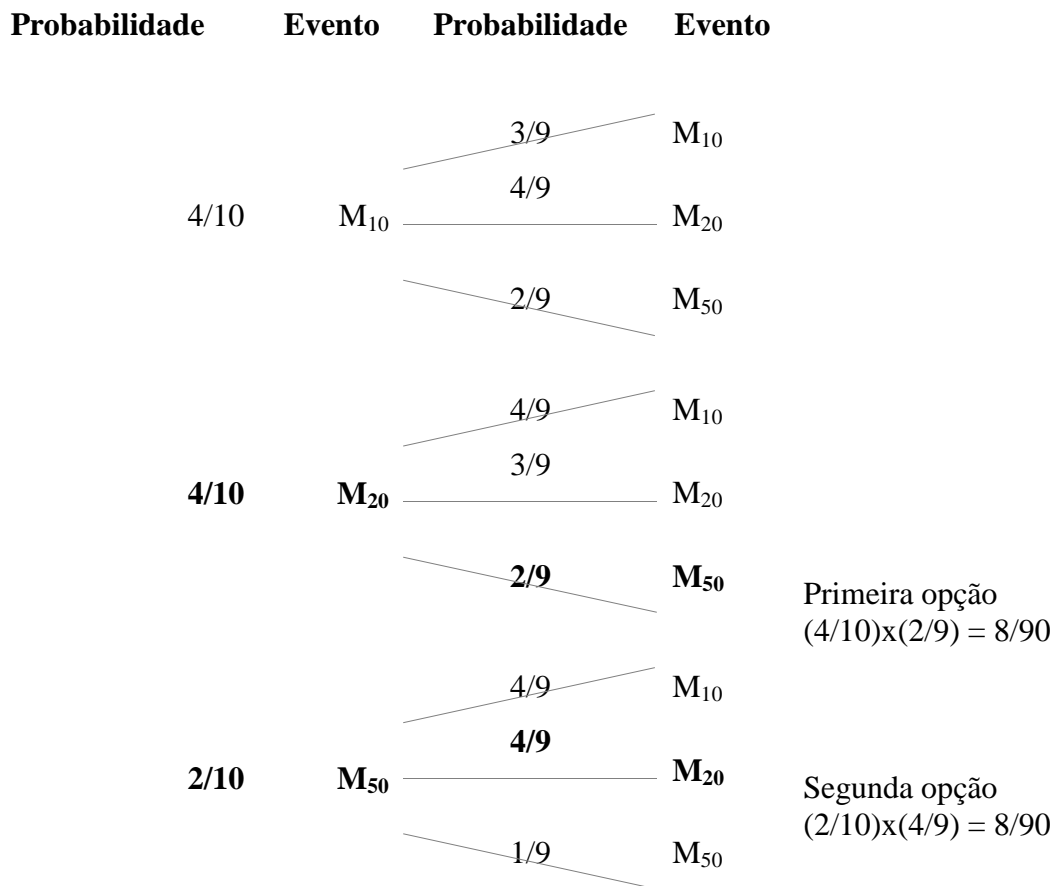


Figura 2 – Diagrama ou árvore das possibilidades da questão quatro

Nesse caso, o diagrama se refere à situação em que as moedas são extraídas sem reposição. O caso em que elas são extraídas com reposição é similar, bastando trocar o valor nove do denominador das probabilidades que aparecem na terceira coluna do diagrama pelo valor 10. O cálculo do evento determinado acima deve ser feito

somando as opções um e dois dos produtos das probabilidades, em negrito nas colunas um e três.

Os três professores que acertaram fizeram os cálculos conforme a primeira abordagem de resolução. O que acertou parcialmente resolveu a questão por análise combinatória, mas errou o cálculo da probabilidade no caso das retiradas com reposição, tendo indicado combinações ao invés de arranjos.

Entre os que não responderam a questão, um deles justificou que não houve tempo, apesar de ter sido destinado um período de aproximadamente duas horas para a resolução do teste.

Apresentamos, no quadro 2, as respostas dos 21 respondentes que erraram a solução da questão, indicando-os pela letra R seguida de um número, para preservar suas identidades. Muitos deles repetiram, inicialmente, os dados do problema, ou seja, escreveram “4 moedas de 10 centavos, 4 moedas de 20 centavos, 2 moedas de 50 centavos” e, em alguns casos, ainda reescreveram a pergunta. Por essa forma de iniciar a resolução do problema, parece-nos que esses professores precisam ter todos os dados à disposição, para começar a pensar sobre eles. Efetivamente, é uma das recomendações que costumamos fazer aos nossos alunos, talvez até pela influência de Polya (1978), que recomendava, na etapa de compreensão de um problema, que o solucionador fizesse as perguntas: “Qual é a incógnita? “Quais são os dados?” (p. 4).

Assim, nas soluções apresentadas na Tabela 2, optou-se por não repetir os dados e a pergunta, indicando, diretamente, os cálculos e as justificativas dadas a eles.

Tabela 2 – Erros apresentados na solução da questão quatro

Respondente	Solução
R1	“Sem reposição: $\frac{2}{10} \cdot \frac{4}{10} = \frac{2}{25}$ Com reposição: $\frac{2}{10} \cdot \frac{4}{9} = \frac{4}{45}$ ”
R2	“ $\frac{2}{10} \cdot \frac{4}{10} = \frac{2}{25}$ ”
R3	Esse professor, além de escrever a quantidade de moedas de cada valor, ainda repetiu, em três linhas: 10 10 10 10 20 20 20 20 50 50 Em seguida, escreveu: 4 em 10 para tirar 10 centavos, 4 em 10 para tirar 20 centavos, 2 em 10 para tirar 50 centavos. No entanto, não fez qualquer cálculo para obter as probabilidades.
R4	“ $\frac{2}{10} = \frac{1}{5} \rightarrow$ sem reposição. Se a retirada for com reposição também será $\frac{1}{5}$,”

	pois ao devolver a 1ª moeda e retirar a 2ª, não saberá qual moeda está sendo retirada da urna.”
R5	“Utilizaria combinação, arranjo, até mostrar”
R6	“ $\frac{8}{10} = \frac{4}{5}$ sem reposição $\frac{9}{10}$ com reposição “
R7	“ $\frac{2}{10} = \frac{1}{5}$ sem reposição $\frac{1}{10}$ com reposição “
R8	“Quando eu retirar a 1ª moeda a probabilidade de tirar a de 50 centavos é de 2 para 10. De tirar a de 20 centavos é de 4 para 10”
R9	$4 - 10 \rightarrow \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$ $4 - 20 \rightarrow \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$ $2 - 50 \rightarrow \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$ $P = \left(\frac{P}{A} + \frac{P}{B} + \frac{P}{C}\right) = \frac{1}{1}$ $P = \left(\frac{P}{B} + \frac{P}{C}\right) = P\left(\frac{2}{5} + \frac{1}{5}\right) = \frac{3}{5}$ <p>Com reposição $P = \frac{P}{A} + \left(\frac{P}{B} \cap \frac{P}{C}\right) = P = \frac{2}{5} + \left(\frac{2}{5} \cdot \frac{1}{5}\right) = \frac{2}{5} + \frac{2}{25} = P = \frac{10+2}{25} = \frac{12}{25}$”</p>
R10	“ $C_1^{50} + C^{10}$ ”
R11	<p>“10 moedas = $\frac{2}{0}$</p> <p>4 moedas de 20 = $\frac{4}{10} = \frac{2}{5}$ $\frac{2}{10} + \frac{4}{9}$</p> <p>Para dar 70 centavos teríamos que tirar uma moeda de 50 e uma de 20.</p> <p>Para tirar uma de 20 teríamos $\frac{4}{10}$ ou seja teríamos a possibilidade de tirar 4 moedas tendo 10, na próxima vez teríamos que tirar uma moeda de 50, desta vez teríamos $\frac{2}{9}$”</p>
R12	“Na urna eu terei 10 moedas para eu tirar 70 centavos eu preciso que no 1º lance eu tire 50”
R13	“10.9 = 90 Sem reposição 4.4.2=32 Com reposição “
R14	“Este exercício pode ser resolvido através de combinações sem reposição e com reposições. Não deu tempo de concluir.”
R15	<p>a) $P(0,70) = \frac{2}{16} \cdot \frac{4}{15} + \frac{4}{16} \cdot \frac{2}{15} = \frac{8}{240} + \frac{8}{240} = \frac{16}{240} = 6,7\%$</p> <p>b) $P(0,70) = \frac{2}{16} \cdot \frac{4}{16} + \frac{4}{16} \cdot \frac{2}{16} = \frac{8}{256} + \frac{8}{256} = \frac{16}{256} = 6,25\%$”</p>
R16	O respondente desenhou três quadrados no interior dos quais escreveu, respectivamente, 10, 20, 50, indicando abaixo de cada um dos valores o número

	de moedas: 4, 4, 2. Ao lado, escreveu: $\frac{6}{10} \cdot \frac{2}{9} = \frac{18}{90}$ $\frac{6}{10} \cdot \frac{4}{9} = \frac{24}{50}$
R17	$\frac{6}{10} \cdot \frac{5}{9} = \frac{30}{90} = \frac{1}{3}$
R18	<p>“Preciso retirar 2 moedas (S/R) → 70 centavos</p> $\frac{4}{10} + \frac{2}{9} = 0,4 + 0,22 \rightarrow 0,62 \rightarrow \frac{62}{100} = 62\%$ <p>Preciso retirar 2 moedas (C/R) → 70 centavos</p> $\frac{4}{10} + \frac{2}{10} = 0,4 + 0,2 \rightarrow 0,6 \rightarrow \frac{6}{10} \rightarrow \frac{60}{100} \rightarrow 60\% \text{ com reposição}$
R19	$\frac{4}{10} \quad \frac{4}{20} \quad \frac{2}{50}$ <p>Probabilidade sem reposição Probabilidade com reposição “</p>
R20	<p>“4 moe - 10 cent – 40 cent 4 moe – 20 cent – 80 cent 2 moe – 50 cent – $\frac{100}{220}$ “</p> <p>Em seguida, o respondente dividiu 220 por 70 e obteve 3. Esses “70” foram encontrados nas somas: $50+10+10=70$ e $20+20+20+10=70$. Abaixo, escreveu: “sem reposição 3 vezes” e, ainda, “com reposição 10! “</p>
R21	<p>“R\$ 0,10 R\$ 0,20 R\$ 0,50</p> <p>Obter R\$ 0,70 → $\frac{2}{10} = 20\%$”</p>

Análise dos erros dos participantes

Dentre os 21 professores que erraram a questão, pode-se estabelecer uma primeira classificação de suas respostas, separando aqueles que tentaram solucionar a questão usando a definição clássica de probabilidade³ (Classe A), os que empregaram o cálculo da probabilidade de eventos compostos, derivada da definição axiomática⁴ (Classe B) e os que buscaram empregar a análise combinatória (Classe C).

³ A definição clássica estabelece que a probabilidade de um evento em um espaço amostra S é dada pela divisão do número de casos favoráveis ao evento A pelo número de casos possíveis: $P(A)=n(A)/n(S)$.

Na classe A, temos os respondentes R3, R4, R6, R7, R8, R9, R11, R19 e R21. Na classe B, temos R1, R2, R15, R16, R17 e R18. Na classe C, temos R5, R10 e R14. Além desses, ainda temos as soluções apresentadas por R12, R13 e R20 (Classe D), que não se encaixam nas classes anteriores porque não houve explicação sobre o raciocínio e não foi possível determinar a abordagem da solução (R12) ou porque não houve menção à probabilidade (R13) ou, ainda, porque não foi possível entender a resposta (R20).

Analisando cada classe separadamente, na classe A podemos criar as sub-classes A1, A2 e A3. Na sub-classe A1, incluímos os respondentes R3, R8, R9, R11 e R19. Esses professores tem a noção de que a probabilidade é o quociente entre o número de casos favoráveis e o número de casos possíveis, mas apenas R9 e R11 esboçaram alguma idéia de que houvesse um evento composto, haja vista que R9 errou porque somou as probabilidades, ao invés de multiplicá-las e R11 fez menção às duas probabilidades, de tirar 20 centavos na primeira vez e 50 na segunda.

Na sub-classe A2, incluímos R4, R7 e R21, que pensaram apenas na quantidade de moedas: duas moedas em um total de 10, não levando em conta quais moedas e em qual ordem seriam retiradas.

Na sub-classe A3, destaca-se apenas o respondente R6, que estabelece probabilidades para o caso de retirada sem ou com reposição, mas não fica claro como obteve as quantidades (8 e 9, respectivamente).

Na classe B, podemos criar as sub-classes B1, B2, B3 e B4. Na sub-classe B1, incluímos R1 e R2, que só levaram em conta a probabilidade de retirar primeiro uma moeda de 50 centavos e depois uma de 20 centavos, não pensando que a situação também seria favorável se retirássemos primeiro uma moeda de 20 centavos e depois uma de 50 centavos. R1 ainda trocou as respostas, pois considerou que na retirada com reposição teria sempre 10 moedas no total. R2 não respondeu se seu cálculo envolvia reposição ou não.

Na sub-classe B2, incluímos apenas R15, que lembrou de considerar as duas possibilidades de retirar 70 centavos, acertou a idéia de que a retirada sem reposição diminuiria o número de moedas disponíveis na segunda retirada, mas errou o número de

⁴ A definição axiomática estabelece que a probabilidade de um evento A em um espaço amostra S é uma função do conjunto das partes de S sobre o conjunto dos reais e que deve satisfazer alguns axiomas, acarretando algumas conseqüências (teoremas), tais como o que estabelece a probabilidade da união e da intersecção de eventos.

casos possíveis, indicou 16. Por não termos entrevistado os respondentes sobre seus erros, não temos uma hipótese razoável para esse erro.

Na sub-classe B3, incluímos R16 e R17, que pensaram em produto de probabilidades, não levaram em conta as duas possibilidades de retirar 70 centavos e indicaram equivocadamente os números de casos possíveis. Ambos os respondentes pensaram em 6 casos possíveis para a primeira retirada, o que nos leva a supor que pensaram nas quatro moedas de 20 centavos somadas as duas de 50 centavos. Para a segunda retirada, no entanto, não fica claro, em nenhuma das soluções desses professores, como pensaram para indicar o número de casos possíveis.

A sub-classe B4 inclui apenas o respondente R18, cuja resposta tem características de duas classes, pois teve a idéia de que probabilidade é quociente entre o número de casos favoráveis e possíveis, calculou corretamente as probabilidades, mas somou-as, ao invés de multiplicar, não tendo, ainda, levado em conta as duas possibilidades de retirar 70 centavos.

A classe C não tem sub-classes porque os respondentes apenas mencionaram as combinações ou arranjos, não tendo efetuado cálculos. Também a classe D não é subdividida porque já comentamos acima que não foi possível compreender as soluções.

Apresentamos, a seguir, um quadro com as distribuições dos respondentes em cada classe ou sub-classe:

Tabela 3 – Distribuição dos respondentes por classe e sub-classe

Classe	Sub-classe	nº	%
A	A ₁	5	24
	A ₂	3	14
	A ₃	1	5
Sub-total		9	43
B	B ₁	2	9,5
	B ₂	1	5
	B ₃	2	9,5
	B ₄	1	5
Sub-total		6	29
C		3	14
D		3	14
Total		21	100

Pela distribuição apresentada na tabela acima, vemos que houve uma preferência pela solução que usa a definição clássica de probabilidade. Além disso, em todas as soluções apresentadas pelos 43 professores, chama atenção o pequeno número de respondentes que emprega a análise combinatória (um deles acertou parcialmente e três erraram) e, mais do que isso, o fato de que nenhum dos professores lembrou de empregar a árvore das possibilidades.

Benko e Maher (2006) comentam as representações construídas por alunos americanos de 7º ano ao tentar resolver um problema com dados. Quatro estudantes discutiram a tarefa e uma delas lembrou a possibilidade de usar a representação da árvore das possibilidades, com a qual já haviam trabalhado no 5º ano. Os outros concordaram com a sugestão e, ao final, refinaram suas próprias representações, que envolviam tabelas com linhas e colunas. Os autores consideram que um trabalho precoce com idéias de probabilidade ajuda os alunos a aprofundar seus conhecimentos antes de receber o ensino formal sobre probabilidade.

Conclusão

Como pode ser observado, então, 18 professores ou 42% da amostra investigada, nem tentaram resolver a questão. Bayer et al (2005) verificaram, em uma amostra de licenciandos de Matemática, que apenas 40% deles declaravam sentir-se seguros para lecionar conteúdos de probabilidade e estatística. Nesta pesquisa, novamente esse fato é verificado, pois boa parte dos professores nem tentaram resolver a questão proposta. Dos que tentaram e erraram, poucos deixaram uma marca do pensamento utilizado, de modo que fosse possível analisar em profundidade o tipo de equívoco cometido.

Conforme Shaughnessy et al. (1981, apud Carter e Capraro, 2005), a probabilidade é um dos tópicos matemáticos em que as concepções errôneas são bastante prováveis e, a menos que trabalhemos com essas concepções errôneas dos professores, não podemos esperar que eles saibam lidar com tópicos de probabilidade com seus alunos. As concepções errôneas são sistemáticas e podem co-existir com idéias corretas, na mente dos alunos e dos professores, a menos que elas sejam enfrentadas e remediadas (Carpenter e Hiebert, 1992, apud Carter e Capraro, 2005). Na amostra investigada nesta pesquisa, não foi possível identificar o tipo de concepção errônea sobre probabilidade que os professores apresentaram, visto que, como já foi

mencionado, poucos explicitaram seu pensamento. Também não foi possível identificar formas sistemáticas de erro, relacionadas tanto à regra do produto de probabilidades quanto à dependência ou independência de eventos.

Pelo que constatamos neste trabalho, parece que as licenciaturas, a exemplos de outros cursos, demoram a se adaptar às condições de mercado, ou seja, à adequação dos currículos a uma demanda legal, de forma a dar suporte ao trabalho do futuro professor. Mesmo que as Diretrizes Curriculares Nacionais para os Cursos de Licenciatura em Matemática tenham se omitido, as comissões que reformularam os currículos nas Instituições de Ensino Superior podiam ter percebido, sem dificuldades, esse tipo de necessidade. Contudo, tanto quanto os legisladores, essas comissões acabaram se omitindo. Assim, a lei exige que o futuro profissional lecionem conteúdos nos níveis elementar e médio, mas os currículos não foram adequados para tal. O resultado dessa omissão pode ser comprovado nesta pesquisa, em que professores que já estão em exercício do magistério nos níveis fundamental e médio não conseguem resolver uma questão simples sobre um conhecimento que eles deveriam exigir dos seus alunos nem mesmo usar recursos representacionais básicos, como a árvore das possibilidades.

Ao trazer essa análise, relacionada com erros em conteúdos de probabilidade, sobre os quais há ainda pouca bibliografia disponível, esperamos desencadear novos estudos e possibilidades de discussão sobre esse tema.

Referências

BARDIN, L. *Análise de conteúdo*. Lisboa: Edições 70, 1979.

BAYER, A. et al. Preparação do formando em Matemática-licenciatura plena para lecionar Estatística no Ensino Fundamental e Médio. In: *Encontro Nacional De Pesquisa Em Educação Em Ciências*, 5., 2005, Baurú: ABRAPEC, 2005. 1 CD-ROM.

BENKO, P.; MAHER, C. A. Students constructing representations for outcomes of experiments. In: *Psychology Of Mathematics Education*, 30, 2006, Praga, República Tcheca: PME, 2006. v. 2. p. 137-143. 1 CD-ROM.

BORASI, R. *Reconceiving mathematics Instruction: a Focus on Errors*. Norwood, NJ: Ablex Publishing Corporation, 1996.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática*. Brasília, 1998.

BRASIL. Ministério da Educação. Conselho Nacional de Educação. *Diretrizes Curriculares Nacionais para os Cursos de Matemática, Bacharelado e Licenciatura*. Brasília, 2001.

BRASIL. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira. *Matriz de Referência para o ENEM 2009*. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/index.php?option=com_content&view=article&id=13425:matriz-de-habilidades-do-enem-esta-disponivel-para-consulta&catid=212&Itemid=86>. Acesso em: 19 jun. 2009.

CARTER, T. A., CAPRARO, R. M. Stochastic misconceptions of pre-service teachers. *Academic Exchange Quarterly*, 22 Sept. 2005. Disponível em: <<http://www.thefreelibrary.com/Stochastic+misconceptions+of+pre-service+teachers-a0138703670>>. Acesso em: 20 jul. 2009.

LOPES, A. J. Erreurs: mensonges qui semblent vérités ou vérités qui semblent mensonges. In: *Commission Internationale Pour L'Étude et L'Amélioration de L'Enseignement des Mathématiques*, 39, 1987, Sherbooke, Canada: Université de Sherbrooke, 1988. p. 440-43.

MORAES, R. Análise de conteúdo. *Educação*, Porto Alegre, v. 22, n. 37, p. 7-32, 1999.

NAVARRO, P.; DÍAZ, C. Análisis de contenido. In: DELGADO, J. M.; GUTIERRES, J. *Métodos y técnicas cualitativas de investigación em ciencias sociales*. Madrid: Síntesis, 1994. Cap. 7.

PAPAIERONYMOU, I. Essential Knowledge of Probability for Prospective Secondary Mathematics Teachers. *Conference On Research In Undergraduate Mathematics Education*, 11, 2008, San Diego, CA: MAA, 2008.

PATTON, M. Q. *Qualitative Evaluation Methods*. London: Sage, 1986.

POLYA, G. *A arte de resolver problemas*. Rio de Janeiro: Interciência, 1978.

VIALI, L. *O Ensino de Estatística e Probabilidade nos Cursos de Licenciatura em Matemática*. In: SIMPÓSIO NACIONAL DE PROBABILIDADE E ESTATÍSTICA, 18., 2008, Estância de São Pedro, SP: ABE, 2008. 1 CD-ROM.

APÊNDICE – Teste-piloto aplicado aos professores

Prezado(a) professor(a):

Nos Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática para o Ensino Fundamental, os conteúdos que formam o núcleo principal do ensino de Matemática aparecem organizados em quatro blocos: *Números e Operações, Espaço e Forma, Grandezas e Medidas e Tratamento da Informação*. Nas Orientações Curriculares para o Ensino Médio, os conteúdos básicos também estão classificados em quatro blocos, *Números e Operações, Funções, Geometria e Análise de dados e probabilidade*. Já as Diretrizes Curriculares para os Cursos de Matemática sugerem que, entre os conteúdos a fazerem parte das grades curriculares desses cursos, sejam incluídos os ensinados na Educação Básica, nas áreas de Álgebra, Geometria e Análise.

Partindo dessas orientações, um grupo de professores de Instituições de Ensino Superior do Rio Grande do Sul que mantém cursos de Pós-Graduação em Educação Matemática (Especialização ou Mestrado) está desenvolvendo um projeto de pesquisa para analisar dificuldades encontradas por professores do Ensino Fundamental e Médio em conteúdos básicos para o ensino nesses níveis. Dessa forma, solicitamos a sua colaboração, no sentido de resolver as questões propostas nas páginas a seguir.

Utilize as folhas em branco, entregues juntamente com as questões, para indicar seus cálculos ou raciocínios, mesmo que não consiga concluir alguma resolução. Numere a solução de acordo com a respectiva questão.

Você não deve se identificar nem identificar o curso que frequenta. Apenas complete os dados solicitados abaixo. A resposta a este teste indica sua autorização para utilização das informações em nossa pesquisa.

Os docentes responsáveis pelo projeto agradecem sua colaboração.

a) Nível(eis) de ensino em que atua:

Ensino Fundamental Ensino Médio Ensino Superior

b) Tipo de instituição (ões) em que atua:

Municipal Estadual Federal Particular

Questão 1: A professora Clara, trabalhando no conjunto dos reais com alunos de 8ª série, propôs a eles que encontrassem a solução da seguinte equação do segundo grau: $x^2 - 1 = (2x + 3)(x - 1)$. Pedro e João resolveram o exercício de maneiras diferentes:

Resolução de Pedro:

$x^2 - 1 = (2x + 3)(x - 1)$
$x^2 - 1 = 2x^2 + x - 3$
$2 - x = x^2$
Como 1 é solução dessa equação, então $S = \{1\}$

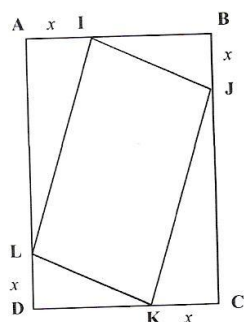
Resolução de João:

$$\begin{aligned}x^2 - 1 &= (2x + 3)(x - 1) \\(x - 1)(x + 1) &= (2x + 3)(x - 1) \\x + 1 &= 2x + 3 \\x &= -2 \\ \text{Portanto, } S &= \{-2\}\end{aligned}$$

- a) Explique o que aconteceu para que os dois alunos tenham encontrado soluções diferentes;
- b) a seguir, explique qual estratégia de ensino você sugere, para que os alunos da turma da prof^a Clara aprendam a partir dos erros cometidos por seus colegas.

Questão 2:

No retângulo ABCD, abaixo, o lado AB mede 7 cm e o lado AD mede 9 cm. Os pontos I, J, K e L foram marcados sobre os lados AB, BC, CD e DA, respectivamente, de modo que os segmentos AI, BJ, CK e DL são congruentes.



A partir desses dados,

- a) demonstre que o quadrilátero IJKL é um paralelogramo;
- b) escreva a função que fornece a área do paralelogramo IJKL em função de x e determine, caso existam, seus pontos de máximo e de mínimo.

Questão 3: Sabe-se que a concentração, C, em miligramas por litro, de um analgésico, na circulação sanguínea, t horas após a sua ingestão, é dada por:

$$C(t) = 10(e^{-t} - e^{-2t})$$

- a) Qual é a concentração aproximada do analgésico, uma hora e trinta minutos após a sua ingestão? Apresente o resultado arredondado até a segunda casa decimal.
- b) Sabe-se que o analgésico tem o efeito desejado quando a sua concentração é superior a 0,5 miligramas por litro. Considere que o analgésico foi ingerido às nove horas. Recorrendo à calculadora, se necessário, indique uma aproximação do intervalo em que ele produz o efeito desejado. Apresente os resultados em horas e minutos.

Questão 4: Em uma urna existem quatro moedas de 10 centavos, quatro de 20 centavos e duas de 50 centavos. Retirando duas moedas ao acaso e sem reposição, determine a probabilidade de se obter exatamente 70 centavos. Se a retirada for com reposição, isto é, você retira a primeira moeda, observa, devolve e então retira a segunda, qual seria essa probabilidade?

Questão 5: Pedro foi juntando algumas economias e, neste momento, tem 1.000 reais, que decide colocar no banco, em um investimento. Para isso, o banco oferece-lhe duas opções:

Opção A: Por cada ano de aplicação do capital, Pedro recebe 40 reais de juros.

Opção B: Por cada ano de aplicação do capital, Pedro recebe juros à taxa anual de 3,5%, a incidir sobre o capital total acumulado até à data.

a) Relativamente à opção B, designe por (b_n) a sucessão cujos termos são os valores do capital existente, decorridos n anos. Sabendo que (b_n) é uma progressão geométrica, determine sua razão e justifique a sua resposta.

b) Comente a seguinte afirmação: “Comparando as duas opções apresentadas, se nos primeiros anos a opção A é a melhor escolha, a partir de certa altura a opção B torna-se mais vantajosa.”

