



ENSINANDO PROBABILIDADE ATRAVÉS DE UM PASSEIO PELA ESTATÍSTICA

João Domingos Gomes da Silva Junior¹
Liliana Manuela Gaspar Cerveira da Costa²

Resumo

Neste artigo, apresenta-se uma proposta de abordagem ao conceito de probabilidade diferente da sugerida na generalidade dos livros didáticos. Procurou-se elucidar de forma clara a proposta pedagógica para que outros professores possam, assim como os autores, propor atividades experimentais para a construção de conceitos. A atividade proposta prevê a utilização de recursos digitais e computacionais para abordar o conceito de probabilidade através de experimentos simples e de fácil compreensão. A Lei dos Grandes Números foi primordial para embasar matematicamente este trabalho e no qual se conseguiu levar os alunos a intuir a veracidade e a convergência referida nessa lei. Pôde-se verificar que esta atividade não só despertou o interesse dos alunos, como também foi um meio facilitador para o aprendizado.

Palavras-chave: Estatística. Ensino de Probabilidade. Conceito Frequentista.

TEACHING PROBABILITY THROUGH A STATISTICAL WALK

Abstract

In this paper we present an approach to the concept of probability that is different from those given in most textbooks. We seek to describe clearly our pedagogical proposal in order that other teachers can use experimental activities for the construction of mathematical concepts. This activity provides for the use of technological resources to teach the concept of probability through simple experiments and easy to understand. The Large Number Law was very important to give the mathematical support to our proposal and it was possible to lead the students to intuit the veracity and convergence present in this law. We can verify that this activity promoted the student's attention, and facilitates the learning process.

Keywords: Statistic. Probability teaching. Frequency Concept.

Introdução

As tendências atuais de construção de um currículo em Matemática dão especial importância ao ensino de Probabilidade e Estatística. Os fenômenos aleatórios, presentes em nosso cotidiano, estão associados às ideias de incerteza e probabilidade.

¹ Mestre em Matemática Aplicada; Colégio Pedro II/CPII, NEPEM – Núcleo de Estudos e Pesquisas em Ensino de Matemática, Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, Brasil, E-mail: joao.dgomes@gmail.com.

² Doutora em Matemática; Colégio Pedro II/CPII, NEPEM – Núcleo de Estudos e Pesquisas em Ensino de Matemática, Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, Brasil, E-mail: lmgccosta@gmail.com.

Por isso, o tratamento da informação, a análise de dados e o estudo das probabilidades têm sido recomendados para todos os níveis da Educação Básica, com destaque para o Ensino Médio (EM). Segundo Ponte, Matos e Abrantes (1998, p. 170),

As reformas levadas a cabo nos últimos anos pela generalidade dos países tiveram também efeitos nos temas a abordar pelos currículos escolares, podendo-se dizer que a Estatística e as probabilidades são dos mais recentes a serem introduzidos, sobretudo ao nível do ensino básico. No entanto, veremos que são tópicos que têm vindo a ganhar uma maior visibilidade nos currículos de Matemática, acompanhando a sua crescente utilização nos mais diversos setores das sociedades ocidentais.

Esse aspecto é reforçado pela Base Nacional Comum Curricular (BNCC), ao propor o ensino das probabilidades durante todo o processo de ensino aprendizagem, tendo início nos primeiros anos do Ensino Fundamental (BRASIL, 2016). Essa mesma ideia está presente nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), que salientam:

As habilidades de descrever e analisar um grande número de dados, realizar inferências e fazer predições com base numa amostra de população, aplicar as ideias de probabilidade e combinatória a fenômenos naturais e do cotidiano são aplicações da Matemática em questões do mundo real que tiveram um crescimento muito grande e se tornaram bastante complexas. (BRASIL, 1998, p. 44)

Sendo assim, pode-se perceber que os documentos que norteiam a educação básica brasileira destacam a importância de uma cuidadosa abordagem da estatística e da probabilidade que, sem dúvida, é um meio muito fértil para ampliar e trabalhar a interdisciplinaridade e a matemática no cotidiano, assim como se constitui em um convite à realização de atividades experimentais que apelam para o espírito intuitivo e dedutivo.

Alinhado a esse contexto, propusemos um experimento que envolvesse conceitos básicos da estatística e que fosse um meio para introduzir a ideia de probabilidade através do conceito de frequência relativa. Aliada à abordagem experimental, há também a abordagem histórica que, certamente, é um elemento importante no processo de atribuição de significados aos conceitos matemáticos.

Em um sentido diferente da nossa proposta, a organização do currículo de Matemática do Ensino Médio, proposta por alguns livros didáticos e praticada em algumas escolas, coloca o estudo da Estatística após o das Probabilidades, como em Dante (2017). Em outros livros didáticos, a apresentação dos conceitos de estatística é feita no primeiro ano do EM, antes do estudo das probabilidades. No entanto, o conceito de probabilidade é introduzido sem conexão dos dois temas. A saber, em Moderna (2016) e Smole e Diniz (2016). A opção dos

autores referidos privilegia uma abordagem que enfatiza a Análise Combinatória e a definição clássica de probabilidade, atribuída a Laplace e que é enunciada a seguir.

Definição (Laplace): *Seja A um evento qualquer do espaço amostral. Se os eventos simples (ou elementares) são equiprováveis, então a probabilidade de A ocorrer será:*

$$P(A) = \frac{\text{número de resultados favoráveis à ocorrência do evento } A}{\text{número de resultados possíveis}}$$

Ora, na maioria das situações práticas, não existe equiprobabilidade e, conseqüentemente, não podemos calcular a probabilidade usando a definição clássica. Nesse caso, a probabilidade é calculada (aproximada) como a frequência relativa de um evento. De acordo com Meyer (1983, p. 27),

A hipótese mais comumente feita para espaço amostral finito é de que todos os resultados sejam igualmente prováveis. Esta hipótese não pode ser, contudo, tomada como segura; ela deve ser cuidadosamente justificada. Existem muitos experimentos para os quais tal hipótese é assegurada, mas existem também muitas situações experimentais nas quais seria absolutamente errôneo aceitar-se essa suposição. Por exemplo, seria bastante irreal supor que seja igualmente provável ocorrerem chamadas telefônicas em um centro entre 1 e 2 horas da madrugada e entre 17 e 18 horas da tarde.

No contexto da definição frequencista de Probabilidade, qualquer atividade a ser desenvolvida impõe a realização da mesma experiência um número elevado de vezes, e sempre nas mesmas condições. Por esse motivo, o computador pode desempenhar um papel de suma importância, já que permite criar simulações e gerar números aleatórios, o que pode ser feito por grande parte das planilhas eletrônicas.

É reconhecido que para o aprendizado científico, matemático e tecnológico, a experimentação é importantíssima, ainda mais quando permite ao estudante diferentes e concomitantes formas de percepção qualitativa e quantitativa, de manuseio, observação, confronto, dúvida e de construção conceitual (BRASIL, 2006). No entanto, temos que ter presente que no processo de transposição didática interna, a autonomia do professor é um aspecto fundamental a preservar e que o papel de única referência sobre o saber a ser ensinado, que o livro didático vem assumindo, precisa ser contrariado. Nesse sentido, Santos e Carneiro (2006, p. 206) destacam que:

o livro didático assume essencialmente três grandes funções: de informação, de estruturação e organização da aprendizagem e, finalmente, a função de guia do aluno no processo de apreensão do mundo exterior. [...] Entretanto o professor deve estar preparado para fazer uma análise crítica e julgar os méritos do livro que utiliza ou pretende utilizar, assim como para introduzir as devidas correções e/ou adaptações que achar convenientes e necessárias.

Propusemos-nos, assim, abordar a noção de probabilidade de forma diferente da sugerida na grande maioria dos livros didáticos. Na sequência deste artigo, vamos apresentar, na seção 2, uma breve descrição do avanço do pensamento frequencista da probabilidade até chegar à Lei dos Grandes Números (LGN).

Na seção 3, apresentamos uma breve descrição do referencial teórico que baseou nosso trabalho. Na seção 4, efetuamos a descrição da atividade proposta e realizada pelos alunos, bem como as questões que se colocaram no decorrer da mesma. O estudo realizou-se com 5 turmas da 3ª série regular do EM, do Campus Engenho Novo II do Colégio Pedro II, Rio de Janeiro, envolvendo um total de 105 alunos do no ano letivo de 2017. Para finalizar, na seção 5, apresentamos algumas considerações finais e conclusões sobre o trabalho realizado.

Da gênese aos nossos dias

A ideia de que a precisão das frequências relativas de um evento tende a melhorar à medida que o número de tentativas aumenta surge com Girolamo Cardano (1501—1576) (MLODINOW, 2005; VIALI, 2009). No entanto, é com o suíço Jacques Bernoulli (1654 – 1705) que se devem as primeiras referências fundamentadas do estudo da probabilidade associada à ideia frequencista. Bernoulli, um dos principais estudiosos sobre o assunto, se baseou na abordagem combinatória devida a Fermat (1601 – 1665) e iniciou o processo de sistematização da probabilidade.

Em torno de 1689, ele publicou um trabalho sobre séries numéricas onde apresentava um dos primeiros e principais teoremas da teoria da probabilidade, que denominou de "lei dos grandes números" (VIALI, 2008-2009). No resultado, publicado na obra "*Ars Conjectandi*", em 1713, afirma que:

Se um evento de probabilidade p é observado repetidamente em ocasiões independentes, a proporção da frequência observada do mesmo evento em relação ao número total de repetições converge em direção a p à medida que o número de repetições se torna arbitrariamente grande.

Em 1837, Siméon-Denis Poisson (1781—1840) também descreveu o conceito da lei dos grandes números. Posteriormente, o assunto é retomado por Tchebyshev, Markov, Borel, Kinchin e Kolmogorov, que formalizaram e desenvolveram a LGN com fundamentações diferentes, dando origem a duas formas que definem o mesmo conceito: a **lei fraca dos grandes números** e a **lei forte dos grandes números** (SENETA, 2013). Numa formalização atual temos:

Lei Fraca dos Grandes Números:

Seja X a variável aleatória que dá o número de sucessos em n eventos elementares, de modo que $\frac{X}{n}$ é a proporção de sucessos. Então se p é a probabilidade de sucesso e ε é um número positivo arbitrário,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\left|\frac{X}{n} - p\right| \geq \varepsilon\right) = 0$$

Podemos interpretar a LGN por: se um evento de probabilidade p é observado repetidamente durante repetições independentes, a razão da frequência observada deste evento para o total número de repetições converge para p conforme o número de repetições se torna arbitrariamente grande. Ou seja, a probabilidade de ocorrer um evento é calculada como frequência relativa deste evento, mais precisamente a “probabilidade observada” aproxima-se da real probabilidade. Vale destacar que o valor obtido é uma estimativa da probabilidade, ou seja, sua qualidade depende do tamanho da amostra.

Referencial teórico

A nossa pesquisa insere-se numa estratégia para aprimorar as práticas de ensino, o que vai ao encontro do significado atribuído à metodologia pesquisa-ação (PINTO, 1989; TRIP, 2005). Uma pesquisa pode ser qualificada em pesquisa-ação quando houver realmente uma ação por parte das pessoas implicadas no processo investigativo.

Esta metodologia exige uma estrutura de relação entre os pesquisadores e as pessoas envolvidas no estudo da realidade do tipo participativo/coletivo, como também uma relação destes com a realidade. Assim, a metodologia da pesquisa-ação “é entendida em sentido mais

restrito, como sequência lógica e sistemática de passos intencionados, ou seja, passos com objetivos que se operacionalizam através de instrumentos e técnicas” (PINTO, 1989, p.).

Descrição e execução da proposta de trabalho

Após o término dos conceitos de Estatística propostos para ser ensinados e/ou revisados no EM, disponibilizou-se aos alunos uma atividade a ser realizada em duas etapas. Numa primeira etapa, foi solicitado que cada aluno jogasse 30 vezes um dado cúbico não viciado, com as faces numeradas de 1 a 6 e anotasse o número presente na face voltada para cima.

Em seguida, cada aluno tabulou os dados por ele recolhidos, indicando as frequências absolutas e relativas dos resultados elementares obtidos. Além disso, solicitou-se também, de cada um, o cálculo das medidas de tendência central (média aritmética, mediana, moda) e das medidas de dispersão (variância e desvio padrão) bem como a representação dos dados obtidos por gráficos de setores e diagramas de barras. Segue a imagem da parte um do trabalho solicitado.

Figura 1 - Parte 1 da atividade proposta

Parte 1:

Cada aluno deverá:

- lançar 30 vezes um dado cúbico não viciado;
- organizar os resultados obtidos numa tabela onde estejam registradas as frequências absoluta, relativa e acumulada de cada número presente no dado.
- montar gráficos (barras e setores) associados à tabela construída.
- calcular a média, a moda, a mediana, a variância e o desvio padrão dos dados coletados.

Fonte: elaborada pelos autores.

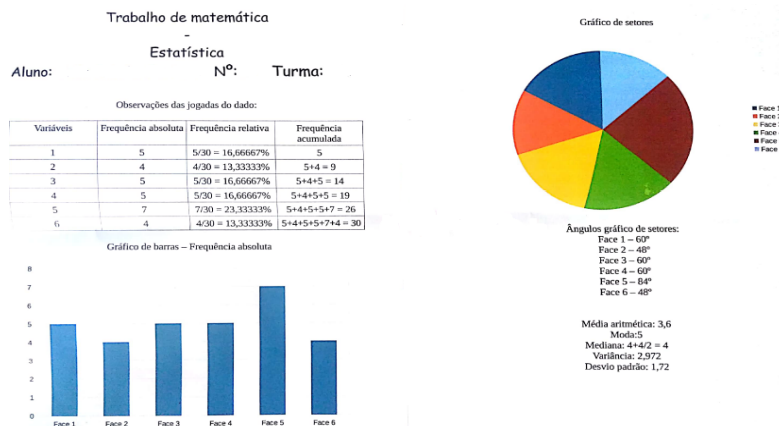
Esta tarefa foi realizada em casa e os alunos poderiam recorrer a um dado físico ou a algum simulador eletrônico². Nas tabulações e cálculo de medidas estatísticas, os alunos poderiam fazer uso de calculadoras, planilhas eletrônicas, programas de construção de gráficos, entre outros recursos digitais.

O uso desses recursos foi permitido já que são uma boa opção quando se trabalha com dados extraídos de situações reais, facilitando não só a organização da atividade proposta,

² <http://www.tiradado.com/1/6.html>.

como também, o desenvolvimento das diversas etapas que se tem na análise de dados coletados.

Figura 2 - Trabalho de um aluno referente à primeira parte do trabalho



Fonte: elaborada pelo aluno.

Na segunda parte da atividade, os alunos reuniram-se em grupos de quatro ou cinco integrantes e, juntando os dados coletados inicialmente, eles deveriam remontar as tabulações, os gráficos e recalculas as medidas estatísticas.

Figura 3 - Parte 2 da atividade proposta

Parte 2:

Os alunos devem organizar-se em grupos de 4 ou 5 elementos e utilizando os dados já coletados por cada um, montar uma outra tabela (tabela única). Essa nova tabela deverá ter todas as frequências já mencionadas na parte 1 da atividade. Além disso, cada grupo deverá montar os gráficos (setores e barras) dessa nova distribuição e calcular a média, a moda, a mediana, a variância e o desvio padrão.

Fonte: elaborada pelos autores.

Concluída esta fase, alguns alunos notaram de imediato que o fato de terem mais dados no experimento fez com que os valores da frequência relativa se aproximassem um pouco entre si.

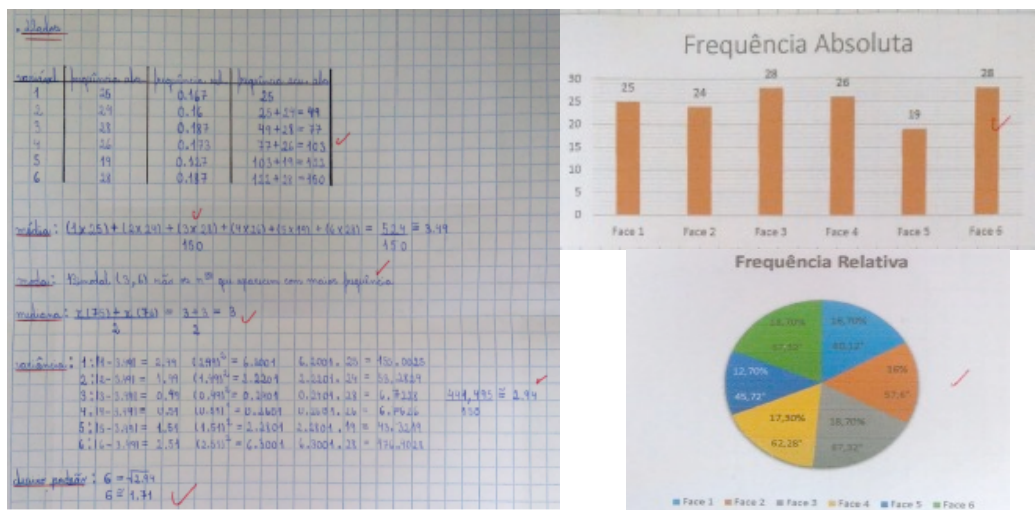
Algumas perguntas foram colocadas:

(A) **Analisando apenas as frequências relativas, o que aconteceria com os respectivos valores se juntássemos os dados de todos os grupos em cada turma e fizéssemos novas tabelas?**

(B) **O que aconteceria se juntássemos os dados de todas as turmas e refizéssemos as tabelas?**

Os alunos sugeriram que aumentando o número de dados, as frequências relativas iriam ter valores mais próximos entre si e esses valores ficariam mais próximos de $\frac{1}{6}$.

Figura 4 - Trabalho de um grupo referente à segunda parte do trabalho



Fonte: elaborada pelo grupo.

Para testar as hipóteses levantadas, foi solicitado que um grupo ficasse responsável pela coleta das frequências absolutas e relativas de todos os grupos da turma. Após a junção de todos esses dados, construiu-se, em cada turma, uma tabela com tais frequências (absoluta e relativa). Os resultados obtidos estão resumidos no quadro seguinte:

Tabela 1 – Tabela de Frequências por turma

Turma	Frequência	Face 1	Face 2	Face 3	Face 4	Face 5	Face 6	Total
1	Absoluta	115	112	109	134	121	129	720
	Relativa	0,1597	0,1556	0,1514	0,1861	0,168	0,1792	1
2	Absoluta	77	75	74	91	80	83	480
	Relativa	0,1604	0,1562	0,1542	0,1896	0,1667	0,1729	1
3	Absoluta	120	149	155	149	122	145	840
	Relativa	0,1429	0,1774	0,1845	0,1774	0,1452	0,1726	1
4	Absoluta	125	109	118	100	100	108	660
	Relativa	0,1894	0,1652	0,1788	0,1515	0,1515	0,1636	1
5	Absoluta	81	85	89	59	71	65	450
	Relativa	0,18	0,1889	0,1978	0,1311	0,1578	0,1444	1

Fonte: elaborada pelos autores.

Novamente, os alunos analisaram e compararam os resultados obtidos por eles individualmente, em grupo e o da turma. Confirmaram a ideia que tinha sido conjectura de

que os valores das frequências relativas se aproximaram ainda mais entre si em comparação aos valores obtidos pelos grupos isolados.

Passou-se à outra questão. Para isso, os alunos precisavam fazer a coleta dos dados de todas as turmas que participaram da atividade. A seguir, apresenta-se a tabela que contém os dados recolhidos por todas as turmas e que foi apresentada aos alunos para que eles pudessem retirar suas conclusões.

Tabela 2 – Tabela de frequências da amostra final correspondente à reunião de todas as turmas

União dos resultados das turmas							
Frequência	Face 1	Face 2	Face 3	Face 4	Face 5	Face 6	Total
Absoluta	518	530	545	533	494	530	3150
Relativa	0,1644	0,1683	0,173	0,1692	0,1568	0,1683	1

Fonte: elaborada pelos autores.

Após a observação da tabela, os alunos constataram que a tendência de aproximação dos valores das frequências relativas era mantida. Entreviemos e perguntamos:

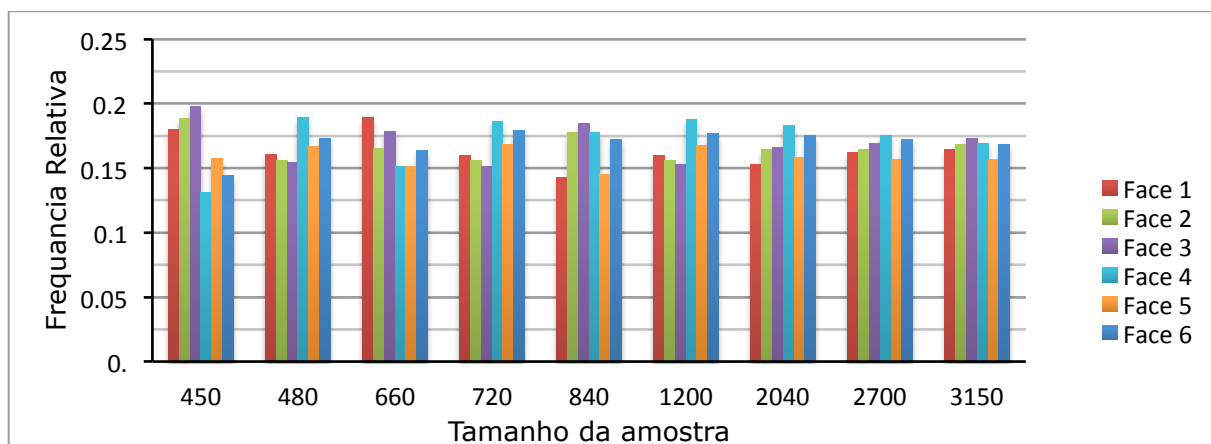
(A) Alguém saberia dizer para qual valor essas frequências relativas se iriam aproximando?

(B) Se o “número” de lançamentos fosse infinito qual seria o valor das frequências?

Perante as questões colocadas, alguns alunos reafirmaram a ideia intuitiva de que o valor da convergência seria $\frac{1}{6}$. Contudo, alguns deles ainda queriam aumentar mais a amostra para ter uma maior certeza no valor a ser obtido.

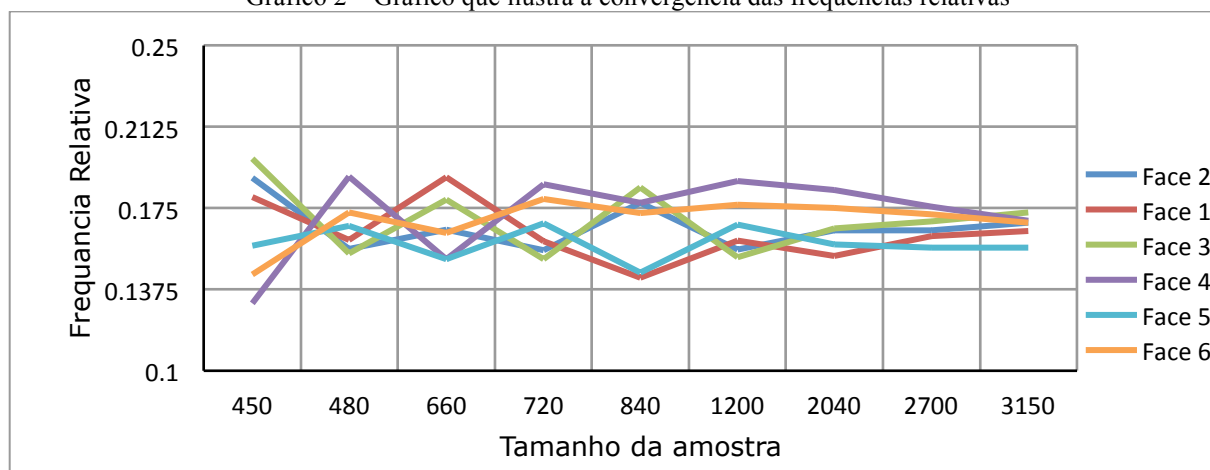
A seguir, exibimos os gráficos de barras e de linhas, que intuem a convergência das frequências relativas para o valor da probabilidade, quando aumentamos o número de experimentos. Assim, ilustramos a LGN através do nosso experimento. Observa-se que fomos acrescentando os dados turma a turma, gradualmente, para observarmos o comportamento em termos de convergência.

Gráfico 1 – Diagrama de barras das frequências relativas quando se aumenta o tamanho da amostra



Fonte: elaborado pelos autores.

Gráfico 2 – Gráfico que ilustra a convergência das frequências relativas



Fonte: elaborado pelos autores.

Após todas as considerações e observações sobre a experiência proposta, procedeu-se à formalização do conceito. Em seguida, recorrendo a situações do cotidiano, passou-se à fase de aplicação do que foi estudado.

Posteriormente, a definição clássica de probabilidade foi apresentada aos alunos. Assim, eles puderam perceber a importância do experimento quando confrontaram as definições.

Conclusão

A Estatística e a Probabilidade têm um papel essencial na formação do cidadão, uma vez que possibilitam lidar com a aleatoriedade, a incerteza e o acaso, permitindo uma análise de fatos complexos que, sob uma visão determinista, tornam-se impossíveis de ser tratados.

Toda a atividade pedagógica que recorra a experimentos tem, por parte dos jovens, uma maior aceitação. Os alunos sentem-se fascinados por métodos de ensino que recorram à experimentação e ao uso de computador, tendo por consequência efetiva o aumento dos níveis de motivação e predisposição para a aprendizagem.

Este trabalho proporcionou aos alunos um contato com a prática investigativa no ensino de Matemática. Situação que, de modo geral, não é habitual em nossas escolas. Permitiu, ainda, que eles afirmassem suas conjecturas e que as confirmassem, num processo afirmativo de autonomia e promotor da autoestima do estudante. Vale ressaltar, que a metodologia usada foi, certamente, um facilitador para todo o processo de experimentação, aprendizagem e avaliações futuras.

A atividade aqui referida foi extremamente gratificante para todos. Podemos dizer que os alunos foram avaliados de forma prazerosa. Temos a certeza da necessidade de dar mais ênfase a trabalhos desse porte, apesar de poderem existir percalços e resistências no caminho. Pode-se concluir, então, que a realização desse tipo de atividade contribui não só para incentivar o trabalho colaborativo e cooperativo, mas também para elucidar e confrontar conceitos através de experimentações (ALMEIDA, FREITAS, 2008).

Referências

ALMEIDA, Paulo Jacinto, FREITAS, Adelaide V. Exemplo da Utilização do Excel na Abordagem do Conceito Frequencista de Probabilidade. **Gazeta de Matemática** – SPM, Portugal, N° 155, p.50-57, Julho. 2008.

BRASIL, Ministério da Educação e do Desporto. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília. MEC, 2016.

BRASIL, Ministério da Educação e do Desporto. **Parâmetros Curriculares Nacionais**. Brasília. MEC/SEF, 1998.

BRASIL, Ministério da Educação e do Desporto, Secretaria de Educação Básica. **Orientações curriculares para o Ensino Médio**. Ciências da natureza, matemática e suas tecnologias, Vol 2, 2006.

DANTE, Luiz Roberto. **Matemática: Contexto & Aplicações**. 4ª Edição. São Paulo: Ática, 2017. Obra em 3 Vol.

- MEYER, Paul L. **Probabilidade**: Aplicações à Estatística. Tradução de Ruy de C. B. Lourenço Filho. 2. ed. Rio de Janeiro: LTC, 1983.
- MLODINOW, Leonard. **O andar do bêbado: como o acaso determina nossas vidas**. Rio de Janeiro, Editora Zahar, 2009.
- MODERNA. **Conexões com a Matemática**. 3ª Edição. São Paulo. Moderna, 2016. Obra em 3 Vol.
- PINTO, João Bosco G. **Pesquisa-ação: Detalhamento de sua sequência metodológica**. Recife, 1989, Mimeo.
- PONTE, J. P.; MATOS, J. M.; ABRANTES, P. **Investigação em Educação Matemática**. Lisboa: Instituto de Inovação Educacional, 1998.
- SANTOS, Wildson Luiz; CARNEIRO, Maria Helena da Silva. **Livro Didático de Ciências: Fonte de informação ou apostila de exercícios**. In: Contexto e Educação: Ano 21. Julho/dezembro, Ijuí: Editora Unijuí. 2006.
- SENETA, Eugene. **A tricentenary history of the Law of Large Number**. University Bernoulli 19(4), p. 1088–1121, 2013.
- SMOLE, Kátia S.; DINIZ, Maria I. **Matemática: para compreender o mundo**. 1ª Edição. São Paulo: Saraiva, 2016. Obra em 3 Vol.
- TRIP, David. Pesquisa-ação: uma introdução metodológica. **Educação e Pesquisa**, São Paulo, v. 31, n. 3, p. 443-466, set/dez. 2005.
- VIALI, Lorí. Algumas considerações sobre a origem da teoria da probabilidade. **Revista Brasileira de História da Matemática**, v. 8 nº 16, p. 143-153, out/2008-março/2009.