



## ANÁLISE DE ERROS COMO METODOLOGIA EM CURSOS DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

Luana Oliveira de Oliveira<sup>1</sup>

### Resumo

Pretende-se, com este trabalho, relatar uma experiência desenvolvida com alunos do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal de Pelotas, matriculados na disciplina de Matemática Discreta A, no período 2016/2. A disciplina objetiva prover o aluno dos conceitos básicos no estudo das estruturas matemática que são fundamentalmente discretas, no sentido de não suportarem ou requererem a noção de continuidade, estimulando-o a construir provas formais que utilizem tais conceitos. O relato apresentado aborda como contribuir para o aprendizado destes conceitos, utilizando-se da metodologia de análise de erros, descartando a aplicação direta de fórmulas que infere num desenvolvimento automatizado e irracional das situações apresentadas. Buscou-se contribuir para a formação dos graduandos envolvidos, trazendo uma reflexão sobre a importância de uma aprendizagem significativa e sobre o quanto o estereótipo de disciplina mais inacessível está atrelado ao trabalho do professor.

**Palavras-chave:** Análise Combinatória. Análise de erros. Educação Matemática. Formação de professores de Matemática.

## ANALYSIS OF ERRORS AS A METHODOLOGY IN UNDERGRADUATE COURSES IN MATHEMATICS

### Abstract

It is intended, with this work, to report an experience developed with students of the undergraduate course in mathematics of the Federal University of Pelotas, enrolled in the discipline of discrete mathematics A, in the period 2016/2. Objective discipline: To provide the student of the basic concepts in the study of mathematical structures that are fundamentally discreet, in order to not support or require the notion of continuity, stimulating it to construct formal evidence using such concepts. The presented report addresses how to contribute to the learning of these concepts, using the methodology of error analysis, discarding the direct application of formulas that infers from an automated and irrational development of the situations presented. We seek to contribute to the formation of the graduates involved bringing a reflection on the importance of meaningful learning and how much more inaccessible discipline stereotypes are linked to the work of the teacher.

**Keywords:** Combinatorial Analysis. Error Analysis. Mathematical Education. Teacher Training in Mathematics.

---

<sup>1</sup> Graduanda em Matemática; Universidade Federal de Pelotas/UFPEL, Pelotas, Rio Grande do Sul – Brasil. E-mail: luanaoliveira\_oliveira@hotmail.com.

## **Introdução**

Neste relato, apresentamos os resultados obtidos por meio do diagnóstico feito a partir dos erros e dificuldades apresentados pelos alunos, graduandos do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal de Pelotas, matriculados na disciplina de Matemática Discreta A, no período de 2016/02. Neste trabalho, resolvemos dar enfoque ao conteúdo de Análise Combinatória que apresenta conceitos que começam a serem ensinados nas séries iniciais com noções de multiplicação e no segundo ano do Ensino Médio com noções do princípio multiplicativo e de permutação, arranjo e combinação.

A turma em questão tinha inicialmente quinze alunos matriculados, dos quais dois desistiram da disciplina e do restante, cinco tiveram um mau desempenho, principalmente na área relacionada à Combinatória. Por este motivo, foi realizada uma avaliação extra com estes cinco alunos, para que pudessem refletir sobre os conceitos combinatórios a partir de seus erros e, assim, esta avaliação deu início a este trabalho.

## **A avaliação dos erros dos futuros professores e suas implicações**

Segundo Borasi (1996, p. 279), “apesar dos profissionais da educação estarem cientes de que erros ocorrem no processo de aprendizagem, nem todos eles têm consciência de que erros podem ser usados para potencializar os processos de ensino e aprendizagem.” Acreditamos que o erro não tem recebido atenção nem interpretação adequada por parte da comunidade educacional e, conseqüentemente, essa comunidade tem investido pouco diante da potencialidade do uso de erros no ensino formal.

Brousseau (1983, p. 172) afirma que “o erro é um conhecimento, que até certo ponto conduz ao acerto; contudo, a partir de determinado momento tal conhecimento se torna falho ou simplesmente inadaptável.” Para o autor, o erro é considerado necessário para desencadear o processo de aprendizagem do aluno. Os erros não são imprevisíveis, mas se constituem em obstáculos.

Assim, nesta avaliação, as questões tinham como foco os principais erros que os alunos apresentaram na primeira avaliação que eram basicamente interpretação da notação, determinação do tipo de agrupamento apresentado e resolução incorreta de cálculos algébricos. O critério adotado, na escolha das questões, foi encontrar situações em que o estudante tivesse de se posicionar como professor, e que as mesmas fossem extraídas de exames que este possivelmente venha a

fazer como um futuro profissional da educação. Outro critério adotado foi encontrar situações realmente problemáticas, nas quais o estudante pudesse refletir sobre o melhor caminho para sua resolução, sem prender-se às fórmulas, mas, sim, aos conceitos.

Foram utilizados problemas apresentados nas provas do Exame Nacional de Desempenho de Estudantes (ENADE), que avalia os conceitos e procedimentos sobre contagem e análise combinatória daqueles que cursam licenciatura ou bacharelado em matemática, da Secretaria de Educação do Estado de São Paulo (SEED/SP) e também da Associação Nacional de Pós-Graduação e Pesquisa em Administração (ANPAD). A seguir, apresentaremos as referidas questões:

*Questão 1* (ENADE 2005): Ao trabalhar o conteúdo de análise combinatória, o professor propôs que os alunos calculassem quantos números distintos de três algarismos podem ser formados a partir de quatro algarismos escolhidos por eles. A seguir, são destacadas as escolhas dos algarismos e as respostas dadas por quatro alunos dessa turma: Ana, Luís, Paulo e Roni.

I. Ana escolheu os algarismos 0, 3, 5 e 7.

Sua resposta foi 24, por levar em consideração apenas números com algarismos diferentes entre si.

II. Luís escolheu os algarismos 2, 4, 7 e 8.

Sua resposta foi 24, por levar em consideração apenas números com algarismos diferentes entre si.

III. Paulo escolheu os algarismos 3, 4, 5 e 6.

Sua resposta foi 16, por levar em consideração a possibilidade de haver algarismos repetidos nos números formados.

IV. Roni escolheu os algarismos 1, 2, 3 e 4.

Sua resposta foi 64, por levar em consideração a possibilidade de haver algarismos repetidos nos números formados.

O professor verificou que é coerente com as escolhas e a resposta somente o que se justifica em:

(A) I.

(B) II.

(C) I e III.

(D) II e IV.

(E) III e IV.

*Questão 2* (SEED/SP 2012): Após uma aula em que se chegou à generalização do Binômio de Newton, Antônio Carlos aplicou o que aprendeu para encontrar o valor numérico de  $(1 + \sqrt{3})^3$ . Observe os passos utilizados por ele durante a resolução.

$$1.^{\circ} \text{ passo: } \binom{3}{0} \cdot 1^3 + \binom{3}{1} \cdot 1^2 \cdot (\sqrt{3})^1 + \binom{3}{2} \cdot 1 \cdot (\sqrt{3})^2 + \binom{3}{3} \cdot (\sqrt{3})^3$$

$$2.^{\circ} \text{ passo: } \frac{3!}{3! \cdot 0!} + \frac{3!}{2! \cdot 1!} \sqrt{3} + \frac{3!}{1! \cdot 2!} \cdot 3 + \frac{3!}{0! \cdot 3!} \cdot 3\sqrt{3}$$

$$3.^{\circ} \text{ passo: } 1 + 3\sqrt{3} + 3 \cdot 3 + 1 \cdot 3\sqrt{3}$$

$$4.^{\circ} \text{ passo: } 10 + 6\sqrt{3}$$

Com relação ao observado, pode-se afirmar que:

- (A) Existe erro no 1º passo.
- (B) Existe erro no 2º passo.
- (C) Existe erro no 3º passo.
- (D) Existe erro no 4º passo.
- (E) Não existe erro em passo algum.

*Questão 3* (ANPAD 2015): O “amigo oculto” é uma tradição de fim de ano que tem por finalidade a troca de presentes entre os participantes. Primeiro, cada participante deve sortear um papel com o nome do amigo que presenteará. Depois, há o dia da troca, em que cada um deverá fornecer dicas para que os demais adivinhem quem será o presenteado. Escolhe-se quem começa a dar dicas, e o de, durante a brincadeira, algum participante presentear um amigo que já deu um presente, mas ainda haver amigos que não brincaram. Nesse caso, deve-se escolher quem recomeçará a brincadeira. Em um grupo de oito amigos, de quantas maneiras o sorteio pode ser feito de forma que o recomeço não aconteça?

- (A) 8.
- (B) 92.
- (C) 520.
- (D) 5.040.

(E) 40.320.

Dos cinco alunos que tiveram um mau desempenho e que, portanto, poderiam realizar a atividade extra, apenas quatro a fizeram. Os erros cometidos pelos estudantes são apresentados na Tabela 1, a seguir:

Tabela 1 – Levantamento dos erros cometidos pelos estudantes

	<b>Questão 1</b>	<b>Questão 2</b>	<b>Questão 3</b>
<b>Aluno 1</b>	sem erros	não desenvolvimento do Binômio de Newton	não compreensão do conceito de permutação circular
<b>Aluno 2</b>	erro de interpretação: números distintos e com repetição	não desenvolvimento do Binômio de Newton	sem erros
<b>Aluno 3</b>	erro de interpretação: números distintos e com repetição	erro algébrico no desenvolvimento do Binômio de Newton	sem erros
<b>Aluno 4</b>	erro de interpretação: números distintos e com repetição	não desenvolvimento do Binômio de Newton	não compreensão do conceito de permutação circular

Fonte: elaborado pelo autor.

Baseando-nos nas respostas dadas, podemos observar que há por parte dos estudantes uma falha no conhecimento prévio dos conceitos combinatórios. Nota-se um aprendizado instrumental, em que é necessário apenas descobrir que fórmula usar, não se faz uso do raciocínio e de grande interpretação, certamente por que esses conteúdos não foram bem desenvolvidos anteriormente, o que faz com que o aluno automaticamente procure sempre um meio “mecânico” de resolução e não consiga fazer a interpretação e o raciocínio mais adequado para responder.

Conforme Santos (1993, p. 34) "crenças permanentes podem ser desafiadas e começam a mudar quando é dada a oportunidade aos estudantes de controlarem suas próprias aprendizagens e construïrem uma compreensão da Matemática". É preciso dar aos alunos ferramentas que os tornem capazes de resolver as mais diversas situações e não apenas fórmulas prontas para determinados tipos de exercícios. O ensino no qual o professor faz um exemplo e o aluno apenas reproduz já deu claras demonstrações que não é suficientemente adequado para capacitar seus alunos no âmbito da matemática básica.

Assim, após a análise das respostas e a investigação das falhas dos alunos no desenvolvimento das questões, foi dada aos discentes a chance de reverem suas avaliações e obterem um retorno em relação ao ponto em que haviam se equivocado e de que forma isso

poderia ser solucionado. Foi solicitado, então, que cada um tentasse resolver as mesmas questões utilizando-se não de fórmulas, mas dos conceitos associados ao raciocínio lógico, de modo a que tais conceitos ficassem claros para eles, da forma que antes não havia ficado.

Embora estes estudantes tenham sido aprovados na disciplina, alguns ainda apresentam erros conceituais e comportamentais provenientes de um ensino básico que valoriza procedimentos e definições prontas, que devem ser repetidas e manipuladas sem atribuição de significado.

Sabo (2008, p. 1), ao falar dos discursos dos professores do ensino médio a respeito do ensino de análise combinatória, diz que

Algumas vezes, observo professores afirmando que eles próprios não têm esses conceitos construídos de forma sólida e significativa, e, por esse motivo, evitam abordar o tema ou, optam, apenas, a apresentar aos alunos um processo de aplicação de fórmulas prontas, sem justificativas ou explicações. Assim sendo, o aluno necessita utilizar-se da memorização para aplicar a fórmula certa na resolução de problemas específicos, ou seja, o ensino de Análise Combinatória torna-se tecnicista e operacional.

Percebemos que esta atitude estava presente na resolução destes estudantes; por exemplo, ao buscarem resolver a terceira questão, utilizaram diretamente um agrupamento relacionado à situação de organização de um amigo secreto, a permutação caótica, ou seja, utilizaram uma aplicação direta de um resultado sem sentido para a situação apresentada. O objetivo de escolha desta questão estava relacionado à interpretação da situação para a melhor escolha de resolução, isto é, através de uma permutação circular. Esta constatação aponta a necessidade de um trabalho mais efetivo, no ensino de matemática, a fim de proporcionar que o conhecimento matemático seja apreendido de forma correta pelo estudante.

### **Considerações finais**

Não podemos descartar os aspectos históricos que interferem nos procedimentos de aprendizagem matemática, especialmente de análise combinatória que, no princípio, não fazia parte do cálculo aritmético. Segundo Wilson (1990, p. 957), “as regras básicas de contar e suas aplicações têm sido enfatizadas, desde as civilizações mais antigas por exemplos absurdos onde era destacada a elusiva propriedade da memorização”.

Porém, o que mais interfere num baixo aprendizado de conceitos deste tipo ainda é um ensino falho que está diretamente atrelado à má formação de professores. Um professor que

não tem uma formação adequada não terá subsídio suficiente para ensinar qualquer conceito de outra maneira que não por memorização. Aproveitamos o fato de estarmos num curso de formação de professores de matemática para através de atividades como esta enfatizar o quanto um ensino “mecânico” pode ser falho e principalmente o quanto podemos e devemos aprender com os erros de nossos alunos, e o quanto eles próprios são capazes de aprender com seus erros.

Durante a graduação, muitas metodologias são apresentadas no intuito de que novos professores possam mudar o rumo da educação que deixa a desejar em alguns aspectos; porém, poucas vezes estas metodologias são postas em prática durante a graduação. Ter essa experiência, como a apresentada neste trabalho, faz com que o aluno, futuro professor, se aproxime de tal metodologia e seja capaz, através de um aprofundamento do tema, de compreendê-la quase que em sua totalidade, bem como se tornar capaz de utilizar-se dela quando necessário e em sua carreira que está por iniciar.

“O fenômeno do insucesso, nomeadamente na disciplina de Matemática, é reversível, desde que se invista decididamente no desenvolvimento curricular, na formação de professores e na investigação educacional” (Barros, p. 163, 1988). Se temos o intuito de desmistificar o ensino de matemática, seja em análise combinatória ou em qualquer outro conteúdo matemático, temos de dar ferramentas ao professor, não para que ele seja o “detentor de uma verdade absoluta”, mas, sim, o transmissor de um conhecimento humano que está ao alcance de qualquer um de nós.

## Referências

ARAUJO, Milton. **Caderno ANPAD** Fev 2013 a Fev 2016. Disponível em: <https://www.scribd.com/doc/316890614/Caderno-ANPAD-FEV-2013-a-FEV-2016>. Acesso em: 22 de julho de 2016.

BARROS, Maria Guilhermina. **Insucesso em Matemática, Fenómeno Irreversível?** In: Medidas que Promovam o Sucesso Educativo (Seminários realizados em Braga pela Comissão de Reforma do Sistema Educativo). Lisboa: Editorial do Ministério da Educação. p. 163, 1988.

BORASI, Raffaella. **Reconceiving mathematics instruction: A focus on errors.** Greenwood Publishing Group, p. 279. 1996.

BROUSSEAU, G. Les obstacles epistemologiques et les problemes en mathematiques. **Recherches en Didactique des Mathématiques**, v. 4, n. 2, p. 165-198. 1983.

GOVERNO DO ESTADO DE SÃO PAULO, SEED. **Prova Objetiva Professor De Educação Básica II – Matemática** 2012. Disponível em:

<https://arquivo.pciconcursos.com.br/provas/19023587/f99f60f67ac0/prova021.pdf>. Acesso em: 22 jul. 2016.

SABO, R. D. **O ensino dos conceitos de análise combinatória e o livro didático**: discurso de professores do Ensino Médio. Disponível em: [http://www2.rc.unesp.br/ventos/matematica/ebiapem2008/upload/257-1-A-GT1\\_sabo\\_ta.pdf](http://www2.rc.unesp.br/ventos/matematica/ebiapem2008/upload/257-1-A-GT1_sabo_ta.pdf). Acesso em: 21 jul. 2016.

SANTOS, Vânia M.P. dos. **The impact of an innovative mathematics course on the beliefs of prospective elementary teachers**. Atlanta, 1993. p. 38 Trabalho apresentado no Annual Meeting of the American Educational Research Association, em Atlanta, Georgia, em abril de 1993.

SINAES, **Exame Nacional de Desempenho dos Estudantes ENADE 2011**. Disponível em: [http://download.inep.gov.br/educacao\\_superior/enade/provas/2011/MATEMATICA.pdf](http://download.inep.gov.br/educacao_superior/enade/provas/2011/MATEMATICA.pdf). Acesso em: 22 jul. 2016.

WILSON, R. J.; LLOYD, E. K. **Combinatorics**. p. 952-965, 1990.