

# Os “espinhos” da álgebra para Lacroix

The "thorns" of algebra for Lacroix

---

CIRCE MARY SILVA DA SILVA<sup>1</sup>

## Resumo

*Analisa, numa perspectiva da história cultural, o papel desempenhado pelo livro didático de álgebra de Sylvestre Lacroix (1757-1833) no ensino da Academia Real Militar do Rio de Janeiro. A partir da análise documental de fontes, como jornais da época, Carta Régia de criação da Academia Militar, ofícios, programas e atas, procura indícios sobre o ensino de álgebra ministrado na Academia. No curso matemático, com duração de quatro anos, o ensino de álgebra iniciava no primeiro ano, pelas noções fundamentais e notações até equações do terceiro e quarto grau; em continuidade, no ano seguinte, era abordada a álgebra superior, que compreendia a resolução de equações. Esta pesquisa discute como conceitos polêmicos envolvendo o zero, infinito, números negativos e números imaginários eram abordados no livro didático de Lacroix no ensino de álgebra dessa instituição. Analisa a obra desse autor procurando indícios que justifiquem o fato de tal livro ter sido recomendado por tantos anos na Academia Real Militar.*

## Abstract

*This paper analyzes from a cultural history perspective the role of Sylvestre Lacroix's algebra textbook (1757-1833) in the Royal Military Academy of Rio de Janeiro mathematics teaching. By documentary analysis of sources – such as the Royal Charter which founded the Military Academy, newspaper issues, official letters, programs and minutes of meetings, etc. – clues of the algebra teaching at the Academy were searched for. Throughout the mathematics course, which lasted for four years, the teaching of algebra began in the first year and comprised from the fundamental notions and notations up to equations of the third and fourth degrees, followed, the next year, by the teaching of higher algebra equation solving. This research considers the way controversial concepts – such as the one of zero, infinite, negative numbers and imaginary numbers – were addressed in the Lacroix's textbook adopted by this institution. It analyzes this author's work by looking for characteristics which endorsed its recommendation for such a long period in the royal Military Academy.*

**Keywords:** algebra teaching, history of mathematics, Lacroix

## Introdução

A história da matemática estudada a partir dos manuais escolares desvenda não só um passado pouco explorado, mas possibilita compreender concepções de autores, estilos de escrita, reflexões sobre temas polêmicos, metodologia de ensino, problemas

---

<sup>1</sup> Programa de Pós-Graduação da UFES

escolares, bem como controvérsias entre autores e docentes. Como diz Choppin (2000, p. 111), os livros são símbolos da escola e constituem-se quer se queira, quer não em instrumentos de poder. A escolha para análise da obra do emblemático autor Sylvestre Lacroix (1765-1843) não foi ocasional. Seus manuais foram recomendados e usados por décadas nas escolas militares do século XIX, no Brasil, chegando a assumir um “posto” de soberania. Mas, para chegar a esse topo, passou por uma escalada controvertida com participantes docentes lutando para a adoção de um “sistema uniforme”, o que, na prática, significava utilizar apenas um autor para as diferentes disciplinas: aritmética, álgebra, geometria, trigonometria, cálculo diferencial e integral, geometria analítica e geometria descritiva. Ocupando um lugar de destaque no ensino de matemática da Academia Militar por muitos anos, o autor Lacroix destronou autores como Leonhard Euler (1707-1783) e Adrien Legendre (1752-1833). Triunfou como senhor quase absoluto, ditando a matemática a ser ensinada no ensino superior por décadas do século XIX.

Quais as razões para tamanho êxito? Existiram influências externas que garantiram a esse autor de manuais escolares reinar por tanto tempo? Quais motivos políticos internos facilitaram o monopólio de seus livros em quase todas as disciplinas matemáticas da Academia Militar? Quais características possuía o livro os “Elementos de Álgebra” para permanecer recomendados e utilizado por tanto tempo no ensino da Academia?

Como produto de um grupo social e de uma época determinada, a coleção de livros de Lacroix reflete o ensino francês e no Brasil; tanto a tradução de seus livros originais como as compilações baseadas em sua obra reproduzem o modelo francês de ensino da matemática.

A análise realizada no presente trabalho apoiou-se em fontes originais. Os dados aqui analisados foram coletados durante vários anos em diferentes acervos. O principal foi o do Arquivo Nacional, na coleção série “Guerra – escolas”. Lá encontramos atas e ofícios da Junta Diretora da Academia Militar, bem como currículos, programas de ensino e correspondências referentes à vida acadêmica dessa instituição. Outra fonte importante foi a Biblioteca de Obras Raras da Universidade Federal do Rio de Janeiro (BOR), que possui um dos acervos mais completos dos livros utilizados no Brasil no século XIX. Lá consultamos os originais em língua francesa, bem como as traduções. As seções de obras raras e de manuscritos da Biblioteca Nacional forneceram dados relevantes para a pesquisa, pois complementaram aqueles da BOR. Sebos do Rio de

Janeiro e de São Paulo foram também visitados e neles encontramos muitos exemplares das obras de Lacroix, todos em francês, com edições impressas entre 1812 a 1887. Um critério para a seleção dos livros foi o fato de serem indicados para uso na Academia Real Militar do Rio de Janeiro, no século XIX. Uma das primeiras análises realizadas resultou no texto intitulado “O livro didático de matemática no Brasil no século XIX” (SILVA, 2000a), que apresenta um panorama das obras que circularam no País e que foram categorizadas por nós segundo a área de pertinência. Além desse texto, foram realizadas análises mais pontuais que visaram a questões mais específicas como a tradução da álgebra de Euler para o português e sua utilização na Academia Real Militar do Rio de Janeiro (SILVA, 2009b). Na presente pesquisa, utilizamos a análise documental para compreender o monopólio dos livros de Lacroix na Academia Militar bem como a análise de conteúdo para apresentar os conceitos controversos de número negativo, número imaginário e infinito conforme exposto nos “Elementos de Álgebra” de Lacroix. De 1811 a 1814, muitas traduções<sup>2</sup> foram feitas. O quadro 1 mostra a relação contendo ano de publicação, título, autores e tradutores.

<b>Ano</b>	<b>Título</b>	<b>Tradutor</b>
1810	Tratado Elementar de Aritmética por Lacroix	Traduzido do francês por Francisco Cordeiro da Silva Torres
1811	Elementos de Álgebra por Mr. Lacroix	Traduzido por Francisco Cordeiro da Silva Torres
1812	Elementos de Geometria Descritiva com aplicações as artes de Lacroix	Traduzido por José Vitorino dos Santos Souza. Com prefácio, notas e adições do tradutor
1812	Tratado Elementar de aplicação de álgebra à geometria por Lacroix	Traduzido por José Vitorino dos Santos Souza. Contendo introdução e apêndice
1812	Elementos de Geometria por Lacroix	Traduzido por José Vitorino dos Santos Souza
1812	Tratado Elementar de Cálculo Diferencial por Mr. Lacroix (1 <sup>a</sup> . parte)	Traduzido por Francisco Cordeiro da Silva Torres
1813	Complementos dos Elementos de Álgebra de Lacroix	Sem informação
1814	Tratado Elementar de Cálculo Integral por Mr. Lacroix (2 <sup>a</sup> . parte)	Traduzido por Francisco Cordeiro da Silva Torres

<sup>2</sup> A relação foi feita com base no acervo da Biblioteca de Obras Raras do Centro Tecnológico da UFRJ, Acervo de Obras Raras da Biblioteca Nacional, do jornal Gazeta do Rio de Janeiro (1808-1820) e no catálogo da Imprensa Régia de Camargo.

### Quadro 1: Relação de livros de Lacroix 1811-1814<sup>3</sup>

Retornando às questões propostas, constatamos que a indicação dos livros-texto na carta de Lei de 1810, que criou a Academia Real Militar no Rio de Janeiro, tornou o seu uso obrigatório, gerando, assim, uma situação similar à francesa que segundo Dhombres (1985), justifica em certa medida o sucesso das obras de Lacroix, integrantes das listas oficiais de livros recomendados para as escolas. No Brasil colonial, vê-se, nos primeiros livros didáticos publicados na Impressão Régia<sup>4</sup> a partir de 1809, a intervenção direta do governo na escolha de autores, na definição do que publicar e dos conteúdos a serem ensinados no curso da Academia Real Militar. Os autores que poderiam ser “lidos” na Academia foram definidos em Carta de Lei (SILVA, 1994a). Entre eles, estava Sylvestre Lacroix. Os manuscritos com notas de aulas do aluno da Academia – Manoel José de Oliveira – <sup>5</sup>, datados de 1814, comprovam a utilização dos autores franceses. Ele cita Bellidor, Lacroix e Legendre. Aproximadamente dez anos após o início do curso acadêmico, os integrantes da Junta<sup>6</sup> da então denominada *Imperial Academia Militar*, <sup>7</sup> responsáveis pela direção da instituição, demonstravam grandes preocupações com a escolha e organização dos livros-texto a serem adotados para o ensino. Em 1824, a decisão sobre quais livros recomendar para a Academia estava novamente em pauta nas discussões da Junta que exigia a substituição do livro de Álgebra de Euler pelo de Lacroix.

Em ofício da mesma data de 23 de fevereiro, expressos igualmente a V. Excia. (sic) a necessidade de imprimir a Geometria e Trigonometria de Lacroix, a fim de completar o seu Curso de Matemáticas puras, havendo já designado S. M. I. de mandar substituir no 1º ano a Álgebra de Euler, que a experiência mostrara servir apenas para consumir tempo inutilmente [...] (OFÍCIOS DA

<sup>3</sup> O Quadro 1 foi elaborado a partir de consulta ao acervo da Biblioteca de Obras Raras da UFRJ, Gazeta do Rio de Janeiro, Arquivo Nacional (série Guerra – escolas) e da Bibliografia da Impressão Régia.

<sup>4</sup> Impressão Régia é o nome da primeira editora do Rio de Janeiro.

<sup>5</sup> Manuscrito da Biblioteca Nacional, localizador: I-47, 10, 2.

<sup>6</sup> Ao ser criada a Academia, a sua direção foi confiada a uma junta militar, conforme a Carta de Lei de 1810: “A Junta Militar será composta do presidente, que será um tenente general e sempre tirado do Corpo de Artilharia ou do Corpo de Engenheiros e de quatro ou mais Oficiais (se Eu assim For Servido) com a patente de coronel ou daí para cima, sendo um deles oficial engenheiro que for diretor do Meu Real Arquivo Militar e os outros três, os que, como mais hábeis nos estudos científicos e militares, eu for servido escolher e nomear para o mesmo serviço é for meu real agrado, servindo o mais moderno de secretário particular da mesma junta”.

<sup>7</sup> A Academia Real Militar (1810) mudou de nome quatro vezes: Imperial Academia Militar, em 1822; Academia Militar da Corte, em 1832; Escola Militar, em 1840; e Escola Central, a partir de 1858.

ACADEMIA, documento endereçado a João Gomes da Silva Mendonça, diretor, em 26 de abril de 1825, assinado por Manoel da Costa Pinto, Joaquim Norberto de Brito, Manoel Ferreira de Araujo Guimarães).

Outra razão que justifica a recomendação de Lacroix é a posição da Junta da Academia Militar por uma uniformidade de autores a serem adotados nas diferentes disciplinas do curso matemático, o que significava o mesmo que só recomendar os livros de Lacroix:

A junta da direção da Academia Militar, tendo reconhecido o inconveniente de um curso heterogêneo, tem em diferentes épocas (em virtude da carta de Lei de 4 de dezembro de 1810) representado a necessidade de substituir-lhes (por) outro uniforme e regular, e as suas súplicas foram atendidas quando S. A. I. ordenou que no ano passado se explicasse na aula do 1<sup>o</sup> ano a Álgebra de Lacroix em lugar da de Euler. Estando porém a Geometria e Trigonometria do mesmo Lacroix excluído da Academia, onde aliás se explicava todo o resto das matemáticas puras do mesmo autor, e resultando daí a complicação e imperfeição dos compêndios atuais, renovou a Junta ao presente ano as suas representações, que sem embargo de repetidas não foram atendidas. Estando próximo o tempo de explicar-se a Geometria, acha-se impressa a tradução de Lacroix, incumbe-me como deputado encarregado da direção das aulas, rogar a V. Excia. que se digne ordenar que na Academia se dê a referida Geometria e Trigonometria de Lacroix, em vez de Legendre, que até aqui se explica. Aproveitando o momento, em que V. Excia. [ilegível] inspetor de estudos que louvou com seus talentos, lembro a necessidade de pronta providência e me confesso de V. Excia. súdito obediente e fiel criado. Assinado: Manoel Ferreira de Araújo Guimarães, em 27/07/1824, endereçado ao Sr. Francisco Villela Barboza (OFÍCIOS DA ACADEMIA, manuscrito Arquivo Nacional).

Nos vários documentos encontrados<sup>8</sup> no Arquivo Nacional, entre eles ofícios da Junta da Academia, relatórios do diretor da Academia revelam a querela dos livros didáticos

<sup>8</sup> Documentos referentes aos compêndios usados na Academia: documento endereçado ao Imperador em 5 de agosto de 1823, elaborado pela Junta da Imperial Academia Militar, com 10 assinaturas: Saturnino da Costa Pereira, Jose Victorino dos Santos, João Feijó, Frei Pedro de S. Marianna,<sup>8</sup> Manoel Jose da Silva Oliveira, João Paulo dos Santos Barreto, Eustaquio Adolfo de Mello Mattos, José da Costa Azevedo, Roberto F. Da Silva, José Pedro Nolasco Pereira da Cunha e Daniel Gardner; documento endereçado a João Gomes da Silva Mendonça, diretor, em 26 de abril de 1825, assinado por Manoel da Costa Pinto, Joaquim Norberto de Brito, Manoel Ferreira de Araujo Guimarães; documento endereçado ao Sr. Francisco Villela Barboza, em 27 de julho de 1824, assinado: Manoel Ferreira de Araújo Guimarães; documento endereçado a João Gomes da Silva Mendonça, diretor da Academia Militar do Rio de Janeiro, em 26 de abril de 1825, assinado por Manoel da Costa Pinto, Joaquim Norberto de Brito e Manoel Ferreira de Araujo Guimarães; documento endereçado ao Sr. Francisco Villela Barboza por Manoel Ferreira de Araújo Guimarães, em 27 de julho de 1824; documento manuscrito de 1844 – códice IG3-18; documento manuscrito: relatório do

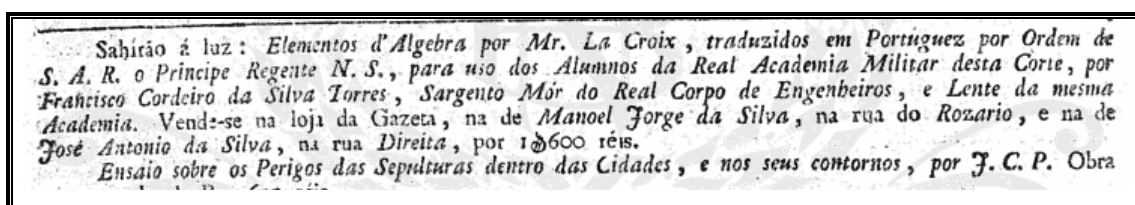
e a grande centralização a que eles estavam submetidos. Os docentes da área podiam opinar sobre os referidos livros, mas não tinham poder de decisão sobre qualquer alteração, uma vez que a Academia estava subordinada à Secretaria dos Negócios Estrangeiros e da Guerra (equivalente a um ministério). Toda e qualquer alteração na rotina da instituição, assim como a indicação dos livros, passava pelo controle do referido ministério.

Como Certeau (2006) afirma com propriedade, a história fala sempre de tensões, de redes de conflitos, de jogos de força, e aqui podemos constatar que a escrita desta história não poderia esquecer estes embates que ocorreram na primeira instituição responsável por um ensino de matemática superior no País.

## 1 A álgebra de Lacroix

Apresentaremos neste texto um breve recorte dessa trama histórica, analisando apenas a obra “Elementos de Álgebra” de Lacroix e tentando responder às questões levantadas.

A primeira tradução dos “Elementos de Álgebra” para o português foi feita em 1811, por Francisco Cordeiro da Silva Torres e divulgada no jornal Gazeta do Rio de Janeiro, em 29 de fevereiro de 1812.



O único exemplar dessa tradução, por nós encontrado, está na seção de obras raras da Biblioteca Nacional. Seu estado de conservação é bastante precário e dificulta a leitura, conforme se vê na Figura 1. Não há prefácio ou qualquer outra nota sobre a tradução.

---

diretor da Academia, em 1857. Ofício de Manoel José de Oliveira em, 29 de janeiro de 1834, a Raimundo José da Cunha Mattos, diretor da Academia Militar do Rio de Janeiro.

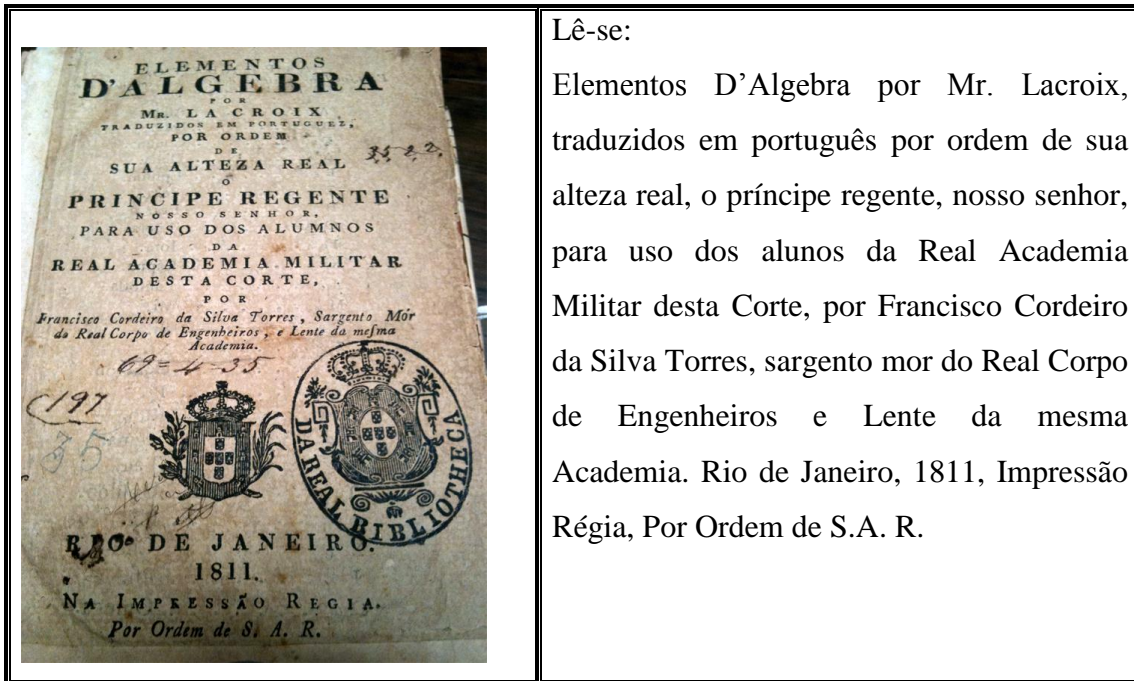


Figura 1: Fragmento do livro de Lacroix, 1811

Outra tradução apareceu, em 1830, na Typografia Nacional, mas sem referência ao tradutor. O único exemplar a que tivemos acesso encontra-se na Biblioteca de Obras da Universidade Federal do Rio de Janeiro, ele apresenta o mesmo título daquele de 1811.

Francisco Cordeiro da Silva Torres (1775-1856), o primeiro tradutor da álgebra de Lacroix para o português, nasceu em Olaia (Portugal) e lá cursou a Academia da Marinha. No Brasil, torna-se lente da Academia Real Militar e nela permanece por 25 anos. Sua formação matemática em Portugal bem como o domínio da língua francesa facilitaram seu trabalho como tradutor. Permaneceu como ministro da Guerra apenas por oito dias, e usando uma paródia de parte de seu nome, teria dito: “Um cordeiro não servia para a guerra” (SILVA, 2000b, p. 121).

O tradutor age como se fosse uma ponte estreita entre dois mundos de línguas diferentes que ele deseja aproximar (BAKHTIN, 2000). O sucesso dessa tradução dependerá da qualidade que ele puder imprimir à sua escrita, sendo convincente e preservando as ideias originais do autor. No caso dessa tradução, constatamos uma escrita muito fiel à original francesa, mantendo a mesma numeração de parágrafos, mesmos títulos e exemplos.

O conteúdo da obra compreende: noções preliminares, passagem da aritmética para a álgebra, equações do primeiro grau com uma variável, expressões algébricas,

quantidades negativas, sistemas de equações, fórmulas gerais para resolução de equação do primeiro grau, equações do segundo grau, formação de potências de monômios e extração de suas raízes, equações de dois termos, cálculo de radicais, redução de equações de grau superiores ao primeiro, raízes comensuráveis, resolução por aproximação de equações numéricas, proporções e progressões, teoria das quantidades exponenciais e logarítmicas, juros simples e compostos e anuidades.

O autor começa com noções preliminares e mostra como introduzir a linguagem algébrica na resolução de problemas. Por exemplo: “Dividir um numero dado em duas partes tais que o excesso da maior sobre a menor seja também dado”.

Do ponto de vista metodológico, nota-se uma preocupação em discutir amplamente os exemplos, passando-os da linguagem ordinária para a linguagem algébrica. Seguindo uma apresentação muito semelhante à usada por Netwon “Lectures on Algebra – 1673-1683”, distribuídos em duas colunas, em que a primeira está na linguagem “ordinária”, e a segunda na linguagem algébrica, Lacroix apresenta um problema mais elaborado: “Dividir um número em três partes tais que o excesso da média sobre o menor seja um número dado e que o excesso da maior sobre a média seja outro número dado”.

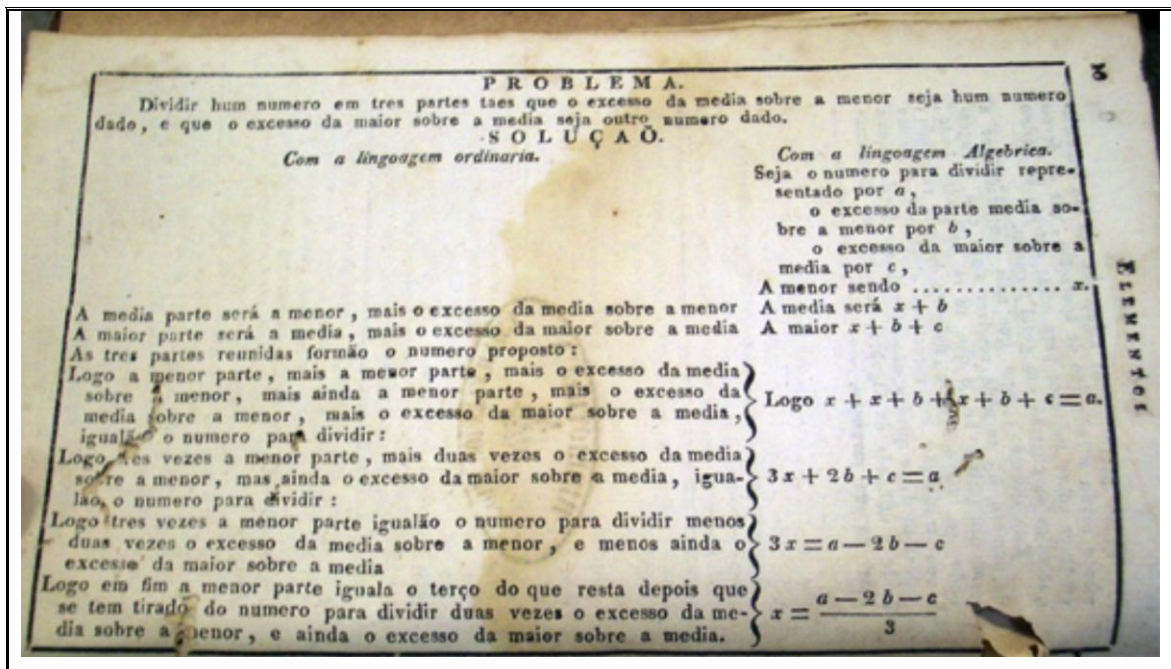


Figura 2: Fragmento do livro traduzido ( p. 16, versão de 1830).



Mesmo sem ter apresentado o método de resolução de uma equação do primeiro grau, ele isola o valor da incógnita e apresenta a solução em termos de valores quaisquer a, b e c.

No § 8º, inicia a abordagem de equações do primeiro grau. Com o objetivo de familiarizar o leitor com a álgebra, chama a atenção para a necessidade de exercitar-se muito em transpor da linguagem ordinária para a linguagem algébrica, o que requer apenas a “[...] inteligência dos sinais e do seu emprego” (p. 12). O autor formula regras, como era tradicional nos didáticos de álgebra da época. A primeira apresentada diz respeito à mudança de sinal, quando se passa um termo de um membro a outro da equação:

Concluir-se-ha daqui esta regra geral:  
Para fazer passar hum termo qualquer de huma equação, de hum membro para outro membro, he preciso apagal-o no membro em que se acha, e escrevel-o no outro com hum signal contrario ao de que estava affecto (LACROIX, 1830, p. 15).

A partir do § 14, inicia a resolução de equações aplicadas a problemas tradicionais, entre eles, aquele das fontes que enchem um tanque: “ Sejam duas fontes tais que a primeira correndo só  $2 \frac{1}{2}$  h, encha um certo tanque e a segunda correndo só  $3 \frac{3}{4}$ ; que tempo será preciso para que as duas fontes correndo simultaneamente encham o mesmo tanque?” (1830, p. 26).

Escolhemos analisar os conceitos de número negativo, número imaginário e infinito abordados nessa obra por Lacroix. Essa escolha deve-se ao fato de eles constituírem-se em obstáculos epistemológicos no ensino da álgebra. Concordamos com a concepção de Bachelard de que há resistências ao conhecimento científico que não ficaram restritas ao passado, mas que se “presentificam” sempre como impasse ao progresso do pensamento humano.

Como Lacroix apresenta, em seus livros os números negativos? Seriam números ou quantidades? O § 55 é interessante porque contempla os números negativos, por ele denominados “quantidades negativas” (p. 65), quando apresenta o método de resolver sistemas de duas equações a duas incógnitas.

Ele formula, no § 56, o seguinte problema (Figura 3):

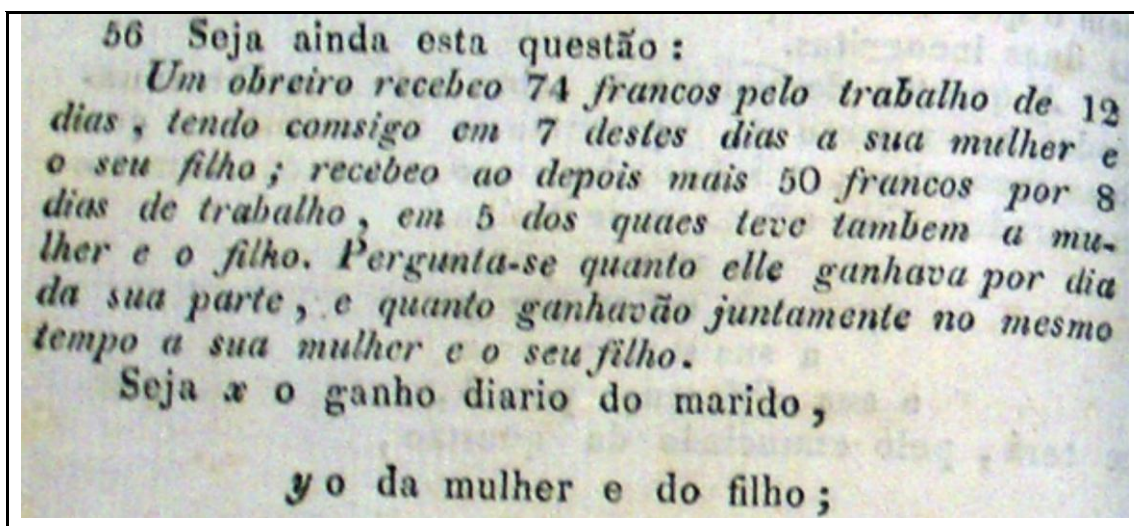


Figura 3: Fragmento do livro traduzido (1830, p. 65)

Como solução, ele encontra os valores:  $x=5$  e  $y=2$ .

Mas, reformulando os dados do enunciado: o obreiro recebendo 46, e a mulher e filho 30, mantendo as demais condições do problema, chega ao seguinte sistema:

$$12x+7y = 46$$

$$8x + 5y = 30$$

A resolução dá  $x=5$  e  $y=-2$

Como ele interpreta a solução negativa para  $y$ ? Lacroix sugere retornar ao enunciado do problema reformulando-a: “[...] Mas, se em lugar de tomar a quantia atribuída a mulher e ao filho como um ganho, se considerasse como uma despesa feita por eles a cargo do obreiro, então se tiraria esta quantia daquela que o homem ganhara [...]” (1830, p. 67) as equações ficariam:

$$60 - 7y = 46$$

$$40 - 5y = 30$$

Nesse caso, as soluções seriam ambas positivas e o desconforto de encontrar números negativos como solução de um problema desapareceria. O número -2, como solução para o problema, não teria significado, pois o que pode ser um ganho de -2? A maneira de contornar a situação embaraçosa parece ter sido eliminada e ele se sente confortável para enunciar uma regra.

Sempre que se achar para a incógnita um valor afeto do sinal -, se poderá retificar o enunciado da questão de uma maneira análoga à precedente, examinando com atenção qual é a quantidade que, de aditiva no primeiro enunciado, deve-se fazer subtrativa no segundo; mas a álgebra dispensa toda indagação a este respeito, quando se sabe operar convenientemente sobre as expressões afetadas de sinal -; porque estas expressões sendo das equações do problema, devem

satisfazer a estas equações, isto é, que submetendo-as as operações indicadas na equação [...] (1830, p. 71-72).

O tratamento a ser dado no caso de soluções negativas ficou aparentemente resolvido, mas o autor considerava serem as quantidades negativas “[...] uma das mais difíceis e mais espinhosas da álgebra” (p. 74) por isso necessitava fundamentá-la melhor. Nesse sentido, nos parágrafos §§ 62 e 63 tratou isoladamente das “quantidades negativas”:

A maior subtração que se pode operar sobre uma quantidade é tirá-la de si mesma, e neste caso, se tem zero para resto: assim  $a - a = 0$ . Mas quando a quantidade a subtrair excede a outra, não se pode mais efetuar inteiramente a subtração; não se opera na quantidade a subtrair senão uma redução sobre parte dela. Quando de 3, por exemplo, se quer subtrair 5, escreve-se  $3 - 5$ , e tirando 3 de 5, se decompõe 5 em duas partes 3 e 2 de que a subtração sucessiva seria equivalente a 5, e por isso em lugar de  $3 - 5$  se tem a expressão equivalente a  $3 - 3 - 2$  que se reduz a  $-2$ . O sinal menos, que precede 2, mostra o que falta para que a subtração se possa operar inteiramente, de sorte que tendo-se ajuntado 2 a primeira quantidade se teria  $3 + 2 - 5$ , ou zero. Exprime-se, pois por meio dos sinais algébricos a idéia que se deve ligar a quantidade negativa  $-a$ , formando a equação  $a - a = 0$ , ou considerando os símbolos  $a - a$ ,  $b - b$ , etc. como equivalente a zero (p. 74-75).

O caso da subtração parece estar resolvido. Interpretamos a posição de Lacroix, no que diz respeito ao número negativo, como algo que não existe isoladamente. Ele isoladamente não é um objeto matemático. Ele pode ter legitimação somente como resultado da operação de subtração. O número  $-2$  não existe em si, ele surge como o resto de uma operação subtrativa  $0 - 2$ .

A ênfase nas aplicações é característica da exposição desse autor. Ele introduz o tradicional “problema dos carteiros”<sup>9</sup> como um exemplo de aplicação de sistemas de equações de duas variáveis. Diferentemente de Euler que, em sua obra de álgebra, introduz logo nos primeiros parágrafos o infinito ao abordar as divisões envolvendo quocientes cada vez menores, Lacroix só irá apresentar uma idéia de infinito no contexto dos problemas que envolvem sistemas de equações. A interpretação e o uso simbólico que faz desse conceito são bastante interessantes e revelam a dificuldade até então de compreensão do significado do infinito.

---

<sup>9</sup> O problema dos carteiros, com uma história de mais de 2000 anos, insere-se numa classificação mais ampla de problemas de movimento, que podem surgir em situações da vida cotidiana ou situações hipotéticas. Por exemplo, quando envolvem o deslocamento de duas pessoas na mesma direção e sentido contrários, visando a se encontrarem num ponto. Newton, Bézout, Clairaut, entre outros, abordaram esses problemas. No Brasil, ele aparece em livros didáticos tanto do século XIX quanto do século XX, em autores como Cristiano Ottoni, Antonio Trajano, João Borges e Gomes Cardim, etc.

Lacroix (1811) utiliza muitos parágrafos para abordar o problema dos correios ou correios (do § 64 até o § 76). Seu estilo de apresentação é bastante didático. Ele começa pelo enunciado mais simples, o qual sempre tem solução – cada carteiro está numa posição e ambos caminham em sentidos opostos, como na ilustração simples da Figura 4. A abordagem didática difere daquela de Newton, que após um exemplo simples, generaliza o problema e solução<sup>10</sup>.

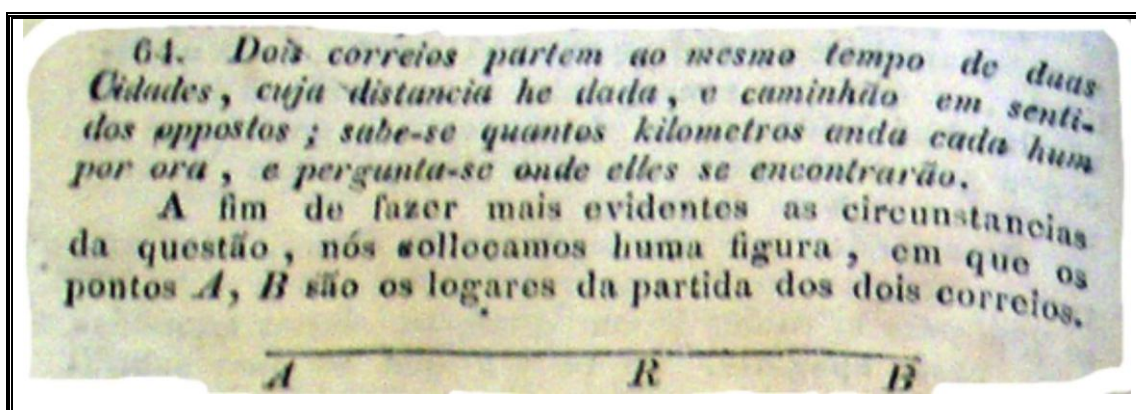


Fig. 4 Fragmento da página 76, versão de 1830

Após colocar em letras os dados conhecidos e desconhecidos, ele estabelece as demais relações. “Advertindo que os caminhos  $x$  e  $y$  são percorridos ao mesmo tempo, se notará que o primeiro correio, que anda em uma hora um número  $b$  de quilômetros, andará o espaço  $x$  em um tempo designado por  $\frac{x}{b}$ ” (p. 76).

De maneira semelhante, o outro correio andará um espaço  $y$  em um tempo  $\frac{x}{c}$ . Logo

$\frac{x}{b} = \frac{x}{c}$ . As equações serão duas:  $x+y=a$  e  $\frac{x}{b} = \frac{x}{c}$ . Por manipulações algébricas chega-se a  $x = \frac{ab}{b+c}$ .

Após essa resolução, ele dialoga com o leitor dizendo que, como nesta última fórmula não aparece nenhum sinal negativo, a questão será sempre resolvida e os correios deverão sempre se encontrar. Todavia, no § 65, ele aborda o caso mais interessante em que nem sempre os correios irão se encontrar. No parágrafo seguinte, Lacroix afirma que os valores negativos encontrados, quando substituídos na equação, a resolvem. Embora eles pareçam para esse autor não ser tão “legítimos” como os positivos, ainda assim eles verificam as equações. Neste caso, ele propõe uma

<sup>10</sup> Uma análise mais aprofundada sobre esse problema está em fase de elaboração e será objeto de publicação futura.

mudança no enunciado do problema: “Se tivéssemos suposto que o correio que parte de B vai após o outro. Esta mudança no enunciado produz uma [mudança] na direção do caminho dos correios, eles não tendem mais a C, porém a C’, como se representa na figura” (1830, p. 79).

No § 67, ele apresenta a situação que considera “inteiramente absurda”, quando se supõe que os dois correios andem na mesma velocidade. Nesse caso, eles nunca irão se encontrar. Diferentemente do caso anterior, o autor alerta que nenhuma modificação no enunciado poderá resolver essa situação. A longa explicação que se segue é interessante porque envolve o infinito. Vejamos:

§ 68. Este absurdo mostra-se mui singularmente nos valores das incógnitas  $x = \frac{ab}{b-c}$  e  $y = \frac{ac}{b-c}$ ; o seu denominador  $b - c$  sendo zero quando  $b=c$ , vem  $x = \frac{ab}{0}$  e  $y = \frac{ac}{0}$ .

Não se percebe com facilidade o que seja o quociente de uma divisão cujo divisor é zero, vê-se somente que sendo  $b$  muito próximo de  $c$ , os valores de  $x$  e  $y$  serão mui grandes. Para o provar, basta tomar  $b=6$  km e  $c=5,8$  km, ter-se-á

$$x = \frac{6a}{0,2} - 30a \frac{m}{0}, y = \frac{5,8a}{0,2} - 29a$$

Tomando depois  $b = 6$ ,  $c = 5,99$ , virá  $x = \frac{6a}{0,01} = 600a$  e  $y = \frac{5,99a}{0,01} = 599a$ ;

E vê-se facilmente que diminuindo o divisor à medida que se faz menor a diferença dos números  $b$  e  $c$ , obtém-se valores cada vez maiores.

Entretanto, como por quão pequena seja uma quantidade, ela nunca poderia ser tomada por zero, segue-se que por quão pouco diferentes se suponham os números representados por  $b$  e  $c$ ; e por maior que fossem consequentemente os valores de  $x$  e  $y$ , resultantes, nunca se chegaria aqueles que correspondem ao caso de  $c=b$ . Estes últimos não podendo representar-se por algum número por grande que se suponha, se chamam infinitos, e toda expressão da forma  $\frac{m}{0}$ , cujo denominador é zero, se considera como o símbolo do infinito. Este exemplo mostra que o infinito matemático é uma idéia negativa, pois só se chega a ela pela impossibilidade de associar uma quantidade que possa resolver a questão.

Conforme pode ser lido na citação anterior, o autor concebe o infinito matemático como uma “idéia negativa”, uma vez que surge de uma impossibilidade de dividir um número por zero. Ao mesmo tempo em que afirma que a quantidade no denominador

da fração nunca poderia chegar a zero, acaba concluindo que toda a expressão da forma “[...]  $\frac{m}{0}$  se considera como símbolo do infinito” (1830, p. 82).

As discussões sobre o conceito de infinito são amplas e merecem uma investigação aprofundada, que não é intenção deste trabalho, em que o foco é o autor Lacroix. Uma inovação metodológica surge a partir do § 82, quando ele chama a atenção para a necessidade de exercitação em resolver problemas que recaiam em sistemas de equações. Ele formula nove problemas e apresenta as respostas. Entre os problemas propostos por Lacroix aparece um sobre doação de esmolas.

Um homem encontrando pobres quer dar 25 céntimos a cada um, mas contando o dinheiro, vê que lhe falta para isso 10 céntimos, então dá só 20 céntimos a cada pobre e restam-lhe 25 céntimos; pergunta-se que quantia tinha este homem, e qual era o número de pobres? Resposta: 7 pobres e 1 franco e 65 céntimos.

Os problemas sobre esmolas e atos de caridade são comuns em livros didáticos, assim como aqueles sobre fontes e carteiros. Visivelmente, são problemas escolares que servem para exercitar os alunos com algum tipo de procedimento algébrico. Eles não estão próximos da realidade, uma vez que no caso da caridade, a repartição de dinheiro dificilmente levaria o caridoso doador a resolver um problema que envolvesse um sistema de equações algébricas.

Outra questão interessante abordada por esse autor diz respeito aos números imaginários. O *status* ontológico dos números complexos encontrava-se nessa época ainda duvidoso. Embora Carl Friedrich Gauss (1777-1855) tivesse se manifestado com muita autoridade sobre a legitimidade desses objetos, os autores de livros-texto dos séculos XVIII e XIX nem sempre os assumiram como objetos matemáticos assim como os números reais.

Lacroix os aborda em diferentes passagens de seu livro sem, contudo, dar-lhes um lugar de destaque. O primeiro aparecimento acontece quando trata das equações algébricas do segundo grau. “As expressões  $\sqrt{-b}$  e  $a + \sqrt{-b}$  e em geral as que compreendem a raiz quadrada de uma quantidade negativa, chamam-se quantidades imaginárias” (LACROIX, 1812, § 115, p.167). Em nota de rodapé, ele esclarece que o mais correto seria denominá-las de “expressões ou símbolos imaginários”, já que não se trata de quantidades. No § 131, ele generaliza afirmando que “[...] todo radical de um grau par, que compreende uma quantidade negativa, é uma expressão imaginária”. Como exemplo, traz: “ $\sqrt[4]{-a}, \sqrt[6]{-a^4}, b^4 + \sqrt[8]{-ab^7}$ ”. Ao comentar sobre essas expressões,

compara-as com as raízes de grau par de quantidades positivas, dizendo que só estas podem ser raízes das equações, tanto com sinal positivo como negativo.

Aristóteles (2000) tratava número como quantidade discreta e muitos autores ao acatarem essa concepção, sentiram dificuldades para compreender os novos objetos que foram surgindo como os negativos e complexos. Para Lacroix, embora eles fossem “símbolos de absurdo”, não deveriam ser desprezados nos cálculos porque, às vezes, era possível “destruir o absurdo”. No texto ora em análise, as expressões imaginárias continuaram a aparecer como respostas às equações: “A equação  $x^4 = -16$  dando  $x = \pm\sqrt[4]{-16}$  não conduz senão a valores imaginários” (LACROIX, 1812, § 157, p. 184).

Ao tratar de equações de grau superior, novamente o autor se depara com as soluções imaginárias. Quando procura as raízes da unidade, isto é,  $y^m - 1 = 0$ , seus comentários são interessantes, embora resolva a equação apenas até  $m = 4$ . No caso de  $m = 3$  e  $m = 4$ , juntamente com as raízes reais, aparecem as imaginárias, as quais o autor aceita com limitações. Para ele, as raízes dos números são de dois tipos: de determinações aritméticas e de determinações algébricas. No primeiro estão incluídas apenas as raízes positivas, sejam elas números inteiros, racionais ou irracionais, no segundo, estão os valores negativos e as expressões imaginárias. Sobre as denominadas determinações algébricas, ele diz: “[...] elas não devem sua existência senão à combinação dos sinais d’Algebra” (1830, p.188).

Com isso, suspeitamos que Lacroix só atribuía legitimidade aos números positivos que, como objetos oriundos da quantidade poderiam ser considerados como objetos matemáticos, enquanto os números negativos e imaginários existiriam apenas porque, inevitavelmente, surgem de manipulações algébricas, não podendo ser totalmente desprezados, mas com *status* ontológico diferente dos positivos.

Números negativos e infinito foram objetos de muitas discussões durante todo o século XIX, não apenas na Europa, mas no Brasil também. Conforme Bloch (2001, 83) afirma: “O espetáculo da busca, com seus sucessos e reveses, raramente entedia. É o tudo pronto que espalha o gelo e o tédio”. Nessa busca investigativa, sempre nos surpreendemos com o que às vezes por acaso tropeçamos. Um pequeno texto de 1863, escrito por Américo Monteiro Barros<sup>11</sup> (1836-1899), aborda exatamente reflexões

---

<sup>11</sup> Ele nasceu no Maranhão e faleceu no Rio de Janeiro. Foi casado com Júlia Augusta de Souza Camisão e teve dez filhos. Segundo Pardal (1993), em 1864, ele foi nomeado professor

sobre o emprego do infinito no ensino. Inicia criticando o uso do infinito no ensino da matemática elementar no Brasil, por professores que seguiam os autores franceses ou autores brasileiros que compilavam as obras francesas. Mais uma vez, encontramos com esse trabalho comprovações das influências externas no ensino da matemática na Academia. Américo cita a faculdade de Ciências de Paris que, em 1847, se manifestou sobre o tema afirmando: “[...] a discussão do infinito vem, desde os primeiros passos, perturbar o pensamento, o espírito de sistema, transviar a imaginação, as fórmulas gerais e ensinar o desprezo dos fatos”. Critica o uso da expressão  $x = \frac{A}{0}$  como símbolo do  $\infty$  e o simultâneo uso do infinito como o limite para o qual convergem as grandezas que crescem indefinidamente. Segundo ele, a expressão  $x = \frac{A}{0}$  só pode significar uma impossibilidade. Outro trabalho de autor brasileiro da mesma época sobre os números negativos é o de Benjamin Constant Botelho de Magalhães (1836-1891) intitulado “Teoria das quantidades negativas” (1868), em que defende a ideia de que um número negativo é simplesmente uma quantidade e por isso sempre maior que zero. Uma análise mais detalhada desse texto acha-se em Silva (1994b). No Ceará, em 1892, foi publicado o texto de José Faustino da Silva com o título “Memória sobre as quantidades negativas e theoria algébrica dos máxima e mínima”. Os trabalhos aqui referidos ilustram as preocupações de professores de matemática sobre o tema como objeto de ensino.

## Conclusões

Os docentes de matemática da Academia Real Militar realizaram vários embates por causa dos “compêndios” a serem recomendados na instituição. Eles desejavam um “sistema” único de orientação e isso, na prática significava, guiar o ensino das disciplinas básicas, como aritmética, álgebra, geometria (incluindo a geometria analítica) e cálculo diferencial por um único autor. A partir de 1834, os livros adotados eram: a Trigonometria (plana), de Legendre; a Geometria; os Complementos de Geometria e Geometria Descritiva; a Trigonometria esférica; o Cálculo Diferencial e Integral e Aritmética e Álgebra, todos de Lacroix. Isso demonstra um longo reinado e soberania dos livros do autor na Academia.

---

substituto da disciplina de Economia Política, Estatística e Princípios do Direito Administrativo, na Escola Central. Essa disciplina foi criada por José Maria da Silva Paranhos, Barão do Rio Branco, em 1863. Mais tarde, tornou-se catedrático dessa disciplina.



A forte influência externa do modelo francês, tanto para assuntos da vida quanto para acadêmicos, fez com que os docentes acatassem os mesmos compêndios que eram utilizados na França nesse período. Internamente, a política centralizadora do governo controlava inclusive os compêndios a serem adotados na Academia Militar. A centralização das decisões acadêmicas dificultava o andamento das atividades na escola. Mesmo as deliberações simples, como contratação de substituto, mudança de livro didático, faltas de alunos, questões de disciplina, necessitavam ser comunicadas e deliberadas pelo ministro do Gabinete dos Negócios da Guerra.

O livro de álgebra de Lacroix possuía características um pouco distintas daquele de Euler (SILVA, 2009) no que se refere ao método de apresentação dos conteúdos. Incluiu problemas a serem resolvidos e muitos deles com resposta, o que não aparecia na tradução de Euler para o português. Apenas na tradução para o inglês do mesmo livro, encontram-se problemas resolvidos que foram incluídos por Lagrange numa tradução posterior para o francês.

Todavia, Lacroix não ficou imune a alguns fantasmas da matemática – números negativos, números imaginários e infinito, que ainda não estavam totalmente legitimados no início do século XIX. A análise apresentada neste trabalho é apenas uma breve reflexão sobre temas espinhosos para os autores de livros didáticos e mesmo matemáticos na passagem do século XVIII para o século XIX e nos inícios do século XIX. Esses espinhos continuaram perturbando matemáticos, como Carl Friedrich Gauss, Augustin-Louis Cauchy (1798-1857), Bernard Bolzano (1781-1848), George Cantor (1845-1918) e Gottlob Frege (1804-1875) que, ao removê-los, trouxeram para a matemática novos objetos e mais beleza para os fundamentos dessa área do conhecimento.

Como dizia Bloch (2001), entender e fazer compreender uma atmosfera que não é mais a nossa e problemas que já não são exatamente os nossos é tarefa do historiador. Todavia, mesmo que os objetos aqui abordados já não sejam problemas para os atuais matemáticos, eles continuam a “espantar” os professores em sala de aula quando necessitam ser construídos no ensino. Eles aparecem tanto como obstáculos epistemológicos quanto didáticos. Assim, refletir sobre eles, do ponto de vista histórico, continua sendo tema atual e de relevância.

## Fontes documentais:

OFÍCIOS DA ACADEMIA: códice IG<sup>3</sup> – 2, IG<sup>3</sup> – 5, IG<sup>3</sup> – 7 da coleção Série Guerra, Anos: 1813,1814,1816, 1817, 1818 a 1822, 1824, 1825, 1834 a 1838 (Arquivo Nacional)

## Referências

ARISTÓTELES. *Aristóteles*. Rio de Janeiro: Nova Cultural, 2000. (Coleção: Os pensadores).

BACHELARD, G. *A formação do espírito científico*. Rio de Janeiro: Contraponto, 1996.

BAKHTIN, M. *Estética da criação verbal*. São Paulo: Martins Fontes, 2000.

BARROS, A. M. *Nota sobre o emprego do infinito no ensino das mathematicas elementares*. Rio de Janeiro: Typographia de N. Lobo Vianna, 1863.

BLOCH, M. *Apologia da história*. Rio de Janeiro: Zahar, 2001.

CAMARGO, A. M. A. ; MORAES, R. B. *Bibliografia da Imprensa Régia do Rio de Janeiro*. São Paulo: EDUSP/Kosmos, 1993.

CERTEAU, M. *A escrita da história*. Rio de Janeiro: Forense, 2006.

CHOPPIN, A. Pasado y presente de los manuales escolares. In: BERPIO, J. R. (Ed.). *La cultura escolar de Europa*. Madrid: Editorial Biblioteca Nueva, 2000. p. 107-141.

DHOMBRES, J. French mathematical textbooks from Bézout to Cauchy. In. *Historia Scientiarum*, n. 28, 1985. p. 91-138.

LACROIX, S. *Tratado elementar de cálculo diferencial e integral*. Tradução de Francisco Cordeiro da Silva Torres Alvim. Rio de Janeiro: Imprensa Régia, 1812.

\_\_\_\_\_. *Éléments d'algèbre a l'usage de L'École Centrale des Quatre-Nations*. 2. Ed. Paris: Chez Courcier, 1812.

\_\_\_\_\_. *Elementos d'algebra para uso da Escola Central das Quatro Nações*. Rio de Janeiro: Typographia Nacional, 1830.

MAGALHÃES, B. C. B. *Teoria das quantidades negativas*. Petrópolis: Tip. Mercantil de Sudre, 1868.

NEWTON, I. *Universal arithmetick*. Londres: J. Senex, 1720.

PARDAL, P. Primórdios do ensino da estatística no Brasil e na UERJ. *Revista do Instituto Histórico e Geográfico Brasileiro*. Rio de Janeiro, v. 154, n. 378, p. 1-152, jan./mar. 1993.

SCHUBRING, G. *Análise histórica de livros de matemática*. Campinas: Editores Associados, 2003.

SILVA, C.M.S. Marco do ensino superior da matemática no Brasil. *Temas & Debates*, ano VII, n .5, p. 31-39, 1994a.

\_\_\_\_\_. Benjamim Constant Botelho de Magalhães (1836-1891) militar ou pedagogo? *Temas & Debates*, ano VII, n .5, p. 54-60, 1994b.

\_\_\_\_\_. O livro didático de matemática no Brasil no século XIX. In: FOSSA, John (org.) *Facetas do diamante* Rio Claro: Editora da SBHMat, 2000a. p. 109-162.

\_\_\_\_\_. Um longo reinado do livro didático. *Anais do V Encontro Capixaba de Educação Matemática*. 2000b, p. 28-47.

\_\_\_\_\_. O livro didático mais popular de Leonhard Euler e sua repercussão no Brasil. *Revista Brasileira de História da Matemática*, Rio Claro, v.9, n. 17, p. 33-52, 2009.

SILVA, J. F. *Memória sobre as quantidades negativas e theoria algébrica dos máxima e mínima*. Ceará: Typ.Economica, 1892.

TORRES, F. C. S. *Tratado elementar d'arithmetic por Lacroix*. Rio de Janeiro: Impressão Régia, 1810.