

Uma discussão sobre o papel das definições formais no ensino e aprendizagem de limites e continuidade em Cálculo I¹

A discussion on the role of formal definitions in the teaching and learning of limits and continuity in Calculus I

OSVALDO HONÓRIO DE ABREU²

FREDERICO DA SILVA REIS³

Resumo

Este artigo apresenta uma discussão sobre o papel das definições formais de limites e continuidade nos processos de ensino e aprendizagem de Cálculo I. Inicialmente, buscamos algumas contribuições de pesquisas na área de Educação Matemática no Ensino Superior. A seguir, descrevemos uma pesquisa realizada com alunos dos cursos de Licenciatura em Matemática e Bacharelado em Estatística de uma universidade pública, a partir da elaboração e aplicação de atividades envolvendo definições formais de limites e continuidade, analisadas à luz das relações entre intuição e rigor. Os resultados apontam para a necessidade de se repensar o papel das definições formais de limites e continuidade na perspectiva de um ensino que privilegie a construção de imagens e definições conceituais significativas para a aprendizagem.

Palavras-chave: Definições formais; Limites e continuidade; Ensino de Cálculo.

Abstract

This article presents a discussion on the role of formal definitions of limits and continuity in the teaching and learning of Calculus I. Initially, we seek some contributions of research in Mathematics Education in higher education. We describe a survey applied to students of Bachelor Degree in Mathematics and Statistics in a public university from the development and implementation of activities involving formal definitions of limits and continuity, considered in light of the relationship between intuition and rigor. The results point to the need to rethink the role of formal definitions of limits and continuity from the perspective of a teaching that promotes the construction of conceptual images and conceptual definitions significant for learning.

Keywords: Formal definitions; Limits and continuity; Teaching of Calculus.

Introdução

Há muito que se pesquisar no ensino de Cálculo. Principalmente, quando consideramos que, na grande maioria das salas de aula, o “fazer pedagógico” está, normalmente, direcionado a uma abordagem livresca e centrado no professor, cuja função é unicamente transmitir conhecimento a partir de reprodução / memorização, seguindo-se de repetição de exemplos à exaustão.

¹ Apoio: Mestrado Profissional em Educação Matemática – Universidade Federal de Ouro Preto

² Centro Universitário de Belo Horizonte – osvaldoabreu@gmail.com

³ Universidade Federal de Ouro Preto – fredsilvareis@yahoo.com.br

A disciplina Cálculo Diferencial e Integral I, doravante denominada apenas Cálculo I, está presente no currículo das Engenharias em suas diversas modalidades e nas Licenciaturas em Matemática, Física e Química. O Cálculo I assume um papel fundamental dentro do ensino de Matemática Superior com inserção ainda nas ciências biológicas, com disciplinas de introdução ao Cálculo Diferencial e Integral, e nas ciências econômicas e sociais, com disciplinas de Cálculo Aplicado.

O ensino de Cálculo tem sido tema de importantes trabalhos. Tradicionalmente ligado a um elevado número de reprovações, tem despertado o interesse de diversos pesquisadores. Frescki e Pigatto (2009) citam a contribuição de diversos autores que se concentraram nas dificuldades envolvendo o ensino e a aprendizagem do Cálculo, os quais apontam problemas que vêm se acumulando desde o ensino básico até culminarem no Ensino Superior: *“Estes problemas [...] resultam da forma como os conteúdos de Matemática são estudados nos ensinamentos fundamental e médio, com muitos “macetes” e fórmulas decoradas, sem compreensão dos conceitos básicos.”* (FRESCKI e PIGATTO, 2009, p. 911, grifo dos autores)

De quem é a culpa? Do sistema? Do professor? Do aluno? Dos livros didáticos? Não queremos aqui apontar quem é ou não o culpado, mas sim afirmar que a responsabilidade de mudar esse quadro que aí se encontra é, de fato, de todos que de alguma forma estão envolvidos nesses processos de ensino e de aprendizagem.

Também parece não haver um consenso sobre como significar, de maneira satisfatória, um número reconhecidamente elevado de reprovações nas disciplinas de Cálculo. A abordagem didática tradicional de alguns professores (“binômio quadro-giz”) ou até mesmo uma preparação inadequada do aluno no Ensino Médio são temas recorrentes nessas explicações.

Em nossa concepção, qualquer uma dessas explicações, quando consideradas isoladamente, pode ser uma tentativa de reduzir a uma causa única um problema que pode, e eventualmente tem múltiplas explicações. O aspecto algorítmico e repetitivo do ensino de Cálculo também aparece na conclusão de alguns desses estudos. Segundo Frota (2001):

Parece haver consenso que o ensino da Matemática precisa libertar-se das amarras de um ensino passo a passo, que conduz à aprendizagem de procedimentos e não incentiva ao conhecimento matemático relacional que leva ao indivíduo a estabelecer, sempre mais, novas conexões entre os vários conceitos estudados. (FROTA, 2001, p. 91)

Sobre esse aspecto, acreditamos que a repetição à exaustão de um exercício (ou um grupo deles) pode ser de pouca ajuda no desenvolvimento das habilidades do estudante; principalmente se esse procedimento estiver dissociado de algum contexto que seja significativo para o aluno.

Ainda em relação ao procedimento repetitivo e à memorização, temos a contribuição de Barufi (1999):

A fim de minimizar o insucesso na construção do conhecimento significativo, a saída, muitas vezes adotada, é a de privilegiar a aplicação do cálculo, apresentando um grande número de problemas e exercícios, muitas vezes repetitivos, onde o aluno acaba memorizando, de alguma forma, processos de resolução. Nesse sentido, reduz-se a ideia, o conceito, ao algoritmo e sobra aquela eterna pergunta dos estudantes, não respondida e “odiada” pelos professores: Pra que serve isto? (BARUFI, 1999, p. 162)

Ainda preocupada com a questão do aspecto procedimental em detrimento do aspecto significativo da atividade e focando em uma das múltiplas interpretações para o conceito de derivada, Meyer (2003) destaca:

Tenho observado que muitos de nossos alunos, após cursarem a disciplina Cálculo I, são capazes de determinar a função derivada de diversas funções, utilizando-se de regras e procedimentos algébricos, ou mesmo, de reproduzir a definição formal da derivada de uma função. Mas, freqüentemente, produzem significados para este conceito que não são compartilhados pela comunidade matemática e, portanto não correspondendo aos significados pretendidos pelo sistema educacional. Quando um estudante associa a aplicação de regras e procedimentos ao conceito de derivada, o que é bastante frequente em nossos cursos de Cálculo, tal processo de significação não o impede de ter sucesso na realização de tarefas ditas operatórias, mas pode contribuir para o insucesso na realização de tarefas que envolvam aspectos conceituais. (MEYER, 2003, p. 4)

Ainda em atenção ao comportamento dos alunos, temos a contribuição de Pinto (2001) cuja pesquisa foi voltada para o ensino de Análise Real, mas que, em nosso entendimento, consegue depreender o comportamento típico de alguns alunos de Cálculo I que buscam no procedimento uma forma única de aprendizagem:

Estudantes são provenientes de um sistema educacional onde o ensino de Matemática está principalmente centrado em cálculos e na manipulação de símbolos, bem como na exploração de conceitos a partir de suas propriedades. A análise formal passa a requerer dos alunos um trabalho com definições que envolvem quantificadores múltiplos e lógica proposicional. Estudantes podem fazê-lo como se estivessem iniciando uma construção nova, compartimentalizada das

imagens prévias deixando a reconciliação com as experiências anteriores para depois, ou, partindo do conhecimento prévio, reconstruindo-o. (PINTO, 2001, p. 125)

Como professores de Cálculo, não podemos também deixar de assumir a parcela de culpa que nos cabe neste processo. Onuchic e Allevato (2009) assim nos apresentam uma interessante constatação:

Sempre houve muita dificuldade para se ensinar Matemática. Apesar disso, todos reconhecem a importância e a necessidade da Matemática para se entender o mundo e nele viver. Como elemento mais importante para se trabalhar a Matemática é o professor de Matemática e este não está sendo bem preparado para desempenhar bem suas funções, as dificuldades nesse processo têm aumentado muito. (ONUCHIC e ALLEVATO, 2009, p. 171)

Novamente Onuchic e Allevato (2009) retornam à prática pedagógica de alguns professores e, em especial, à sua possibilidade de desenvolvimento profissional, de forma ainda mais incisiva:

Sabe-se que a visão da sala de aula de Matemática, apresentada pelos documentos e que promove mudanças radicais na prática, requer uma forte re-educação dos atuais professores. Embora uma implementação adequada requeira mudanças políticas e estruturais, a natureza do desenvolvimento profissional do qual os professores participam, fortemente determinará a extensão da mudança que os alunos experimentaram em sala de aula. (ONUCHIC e ALLEVATO, 2009, p. 173)

Por fim, questionando a prática pedagógica dos professores de Cálculo, Reis (2001) reafirma:

A prática pedagógica do professor de Cálculo deve se pautar, primeiramente, na reflexão e compreensão do papel fundamental do Cálculo Diferencial e Integral na formação matemática de seus alunos. Somente estabelecendo elementos que esclareçam a real função do Cálculo na formação matemática do aluno, o professor terá condições de refletir sobre que objetivos traçar, que conteúdos e metodologias estabelecer, enfim, que prática pedagógica desenvolver. (REIS, 2001, p. 23)

Acreditamos que tais questões devem ser objeto de reflexão por parte de todos os “atores” dos processos de ensino e de aprendizagem de Cálculo: nós, professores, que devemos refletir / repensar o papel do Cálculo na formação matemática de nossos alunos; e alunos, que devem refletir / reconhecer a importância da construção dos conceitos do Cálculo para sua formação matemática.

1. Alguns estudos sobre o ensino de Cálculo, limites e continuidade

Não tendo a pretensão de esgotar o assunto, vamos apresentar alguns trabalhos sobre o ensino e a aprendizagem do Cálculo. Após uma breve abordagem em nossa introdução, retomamos esta discussão selecionando algumas pesquisas que julgamos representativos frente às dificuldades do ensino e da aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral. O objetivo aqui é destacar as dificuldades com o Cálculo e, principalmente, mostrar como o assunto vem sendo discutido de forma recorrente em alguns trabalhos. Concluímos com algumas pesquisas relacionadas especificamente ao ensino e aprendizagem de limites ou continuidade.

Cury (2009), ao comentar as dificuldades no ensino e aprendizagem de Cálculo, o faz de maneira direta e contundente associando àquelas o alto índice de evasão dos alunos em alguns cursos:

As dificuldades encontradas por professores e alunos de Cálculo Diferencial e Integral estão entre as principais causas apontadas para a excessiva desistência e evasão encontradas em curso superiores da área de Ciências Exatas. Pesquisas sobre o ensino de Cálculo vêm sendo apresentadas em comunicações, dissertações e teses ao longo das últimas décadas, mas seriam necessários mais estudos sobre o tema para que pudéssemos vislumbrar mudanças nos cursos. (CURY, 2009, p. 223)

Cury (2009) também destaca a quantidade de trabalhos voltados para as questões que envolvem as dificuldades no ensino e na aprendizagem do Cálculo:

[...] com o aumento do ingresso de estudantes em instituições de ensino superior nos últimos dez anos, as dificuldades relativas à aprendizagem de Cálculo foram se tornando mais frequentes e preocupantes, pois evidenciavam a falta de conhecimentos prévios ou a compreensão equivocada de assuntos estudados nos níveis anteriores. A divulgação dos anais de congressos das áreas de Matemática Aplicada, Engenharia e Educação Matemática permite analisar os assuntos abordados e nota-se que a maior parte dos trabalhos sobre ensino superior se relacionam ao Cálculo. (CURY, 2009, p. 223)

Destacamos essa contribuição com o intuito de mostrar que o tema, de acordo com a autora, já se apresentava de forma recorrente em vários estudos. Notemos ainda que, apesar dessas contribuições, não se nota uma mobilização dentro da sala de aula. Estamos cientes das dificuldades e dos problemas envolvidos, mas aparentemente impotentes para promovermos mudanças substanciais em nossa prática pedagógica.

Algumas instituições que mantêm cursos na área de ciências exatas já sinalizam com mudanças. A disciplina Cálculo I, normalmente ministrada no primeiro período, já tem

sido precedida pelo chamado “Cálculo 0” (como uma disciplina específica, deslocando o Cálculo I para o semestre seguinte, ou até mesmo como um curso de nivelamento em horário extracurricular). Entendemos essa mudança como extremamente benéfica para o aluno e para o curso e apenas lamentamos que ainda não seja adotada em instituições que, devido ao alto índice de reprovação em Cálculo I, talvez pudessem se beneficiar dessa prática.

Nasser (2009), após citar diversos pesquisadores, destaca a preocupação deles com o desempenho dos estudantes nas séries iniciais dos cursos que envolvem o estudo do Cálculo:

Muitos trabalhos de pesquisa, nacionais e internacionais, têm ressaltado as dificuldades dos alunos nos ciclos básicos das universidades na aprendizagem de Cálculo Diferencial e Integral. No grupo de Educação de Matemática no Ensino Superior (GT4) do I, II e III Seminários Internacionais de Pesquisa em Educação Matemática (SIPEM), houve uma predominância de artigos de pesquisa sobre a aprendizagem de Cálculo. Os índices de reprovação nas disciplinas de Cálculo são, em geral, muito altos, prejudicando o rendimento dos estudantes e atrasando seu curso universitário. Rezende (2003) e Baruffi (2009) estão entre os pesquisadores brasileiros que se preocupam com o baixo desempenho dos alunos em Cálculo, mas isso não é prerrogativa dos universitários brasileiros: há uma preocupação mundial com o fracasso em Cálculo, a qual deu origem ao movimento conhecido como *Calculus Reform*, na década de 80. (NASSER, 2009, p. 43)

Ainda que a dificuldade da aprendizagem do Cálculo possa ter diversas causas, Iglioni (2002) remete-se a Brousseau, que distingue três tipos de obstáculos à aprendizagem: um que se refere a limitações do próprio sujeito, que o autor se refere como sendo de origem ontogênica; outro que o autor diz como sendo de origem didática e que depende das experiências de aprendizado vivenciadas; finalmente aqueles de ordem epistemológica e que seriam inerentes ao conhecimento.

A partir desse trabalho de Iglioni (2002), Nasser (2009) destaca ainda, algumas reflexões acerca dos obstáculos na aprendizagem:

- as concepções que ocasionam obstáculos no ensino da matemática são raramente espontâneas, mas advindas do ensino e das aprendizagens anteriores;
- os mecanismos produtores de obstáculos são também produtores de conhecimentos novos e fatores de progresso;
- o obstáculo está relacionado a um nó de resistência mais ou menos forte segundo os alunos, de acordo com o ensino recebido, pois o obstáculo epistemológico se desmembra frequentemente em obstáculos de outras origens, notadamente didáticos. (NASSER, 2009,

A apresentação desses trabalhos nos permite acreditar na relevância de nossa pesquisa. A preocupação com o ensino e a aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral é tema recorrente e objeto de estudo de várias pesquisas, como evidenciamos.

Especificamente, agora tentaremos delinear alguns estudos focados no ensino de limites e continuidade, tema específico do presente trabalho. Começaremos destacando a dificuldade no ensino de limites a partir da problemática, até mesmo histórica, de conceituar os limites de maneira formal.

De início, o ensino de Limites apresenta uma dificuldade que Cornu (1983) chamou de epistemológica. Nesse primeiro contexto, temos o que poderíamos chamar de dificuldade inerente ao conceito de limite. Independente de qual maneira ou até o mesmo qual público pretendemos alcançar, o conceito de limite é, em si, complexo ao ser ensinado. Por sua vez, Tall e Vinner (1981) destacam que os processos mentais requeridos para esta compreensão demandam certo amadurecimento cognitivo. Posteriormente, vamos destacar a chamada intuição profunda (*deep intuition*, em tradução livre) que, ao ser aplicada ao conceito de limite, irá requerer do aluno, uma compreensão que transcende sua definição pura e simples.

Normalmente, o conceito de limite aparece no primeiro período nos cursos de Licenciatura em Matemática, em cursos de Engenharia e, invariavelmente, o tema é abordado como um pré-requisito necessário para a compreensão do cálculo das derivadas e das integrais. Naquele primeiro momento, costuma-se trabalhar conceitos como “estar próximo de” ou “tender para” e a representação gráfica quase sempre é a mais utilizada.

Notemos que, se não abordada de maneira adequada, podemos pecar aqui com um excesso de informalidade e contribuir para a construção de uma imagem inicial por vezes equivocada pelo aluno. Os termos utilizados nesta exposição costumam, quando utilizados no cotidiano, diferirem sobremaneira quando aplicados a conceitos matemáticos. Celestino (2008) nos traz a seguinte contribuição relacionada à sala de aula:

Nós usamos palavras ou frases como convergência, fronteira, arbitrariamente próximo, tende a, e limite, quando trabalhamos com limites de funções. Os significados cotidianos dos termos podem influenciar as percepções dos estudantes sobre estes termos em um

contexto matemático. Há uma ambigüidade na maneira como o conceito de Limite pode ser percebido. Pode-se focar no processo de aproximar o limite e, então, considerá-lo como um procedimento que nunca chega ao fim. Mas pode-se pensar no Limite como uma entidade estática com a quais funções podem ser comparadas. (CELESTINO, 2008, p. 19)

Quando apresentamos o conceito de limite, utilizando a definição formal com ε - δ (epsilons e deltas), não há como negar a complexidade que essa notação apresenta e, principalmente, o que o aluno necessita para compreendê-la. Zuchi (2005), por exemplo, refere-se à noção de limite como sendo uma noção que exige uma razoável abstração e, então, deveria ser adiada para momento mais oportuno. Seria esse momento oportuno, a disciplina Análise ou Fundamentos de Análise Real?

Já em relação ao ensino de continuidade na perspectiva do Cálculo, alguns pesquisadores (REIS, 2001, 2009) destacaram também as dificuldades em relação à abordagem do conceito e à definição formal, mesmos pontos já apontados no ensino de limites. Entendemos, então, que é fundamental aprofundarmos a discussão sobre alguns elementos que dizem respeito à abordagem do ensino de Cálculo.

2. Sobre intuição e rigor

Ainda que as definições desses termos não possam abranger, em sua plenitude, a sua aplicação no contexto matemático, ao menos elas apresentam uma noção aproximada: a intuição estaria ligada a uma “compreensão imediata” de um assunto, enquanto o rigor poderia estar relacionado a uma “explicação detalhada” do assunto.

Segundo Freudenthal (1973), em Matemática é importante, além do resultado correto, a “fundamentação correta” do raciocínio. O rigor não se reflete apenas no resultado, mas na forma e nos caminhos que foram utilizados para obtermos o resultado. É interessante observar que um raciocínio “intuitivo” pode levar também a uma resposta correta ainda que, na essência, não tenhamos sido rigorosos.

Sobre essa questão da intuição e rigor na condução de um procedimento para a resolução de um problema matemático, Reis (2001) nos apresenta o que ele chama de “tensão entre rigor e intuição”, fazendo uma crítica à relação entre estes conceitos e o ensino de Cálculo e Análise:

[...] podemos afirmar que é inadmissível separar intuição e rigor no ensino de qualquer conceito matemático. Igualmente inaceitável seria associar ao ensino de Cálculo, uma abordagem essencialmente

intuitiva e ao ensino de Análise uma abordagem essencialmente rigorosa. (REIS, 2001, p. 79)

Entenderemos no presente trabalho intuição como a capacidade do aluno de avaliar uma questão segundo a sua percepção (visual, sensorial, tátil) a despeito de qualquer definição rigorosa para o objeto matemático. Assim, para a questão de “continuidade”, por exemplo, entenderemos como resposta intuitiva aquela na qual o aluno entenda por continuidade qualquer imagem que possa ser evocada a partir de sua experiência cotidiana.

Por rigor, vamos entender o processo que norteia o método axiomático de entendimento do objeto matemático conforme compartilhado pela comunidade acadêmica e, quando possível, diagnosticar o método axiomático seguido pelo aluno para avaliar a questão. Retomando o exemplo de “continuidade”, vamos entender como rigor, o processo que envolve a definição formal para continuidade conforme apresentada a partir da existência dos limites que, por sua vez, serão considerados a partir de sua conceituação com a chamada notação ε - δ (epsilons e deltas).

Na perspectiva da sala de aula, Reis (2001) se refere assim ao papel do rigor na construção do conhecimento matemático:

Portanto cabe a nós, professores de Cálculo e Análise, a avaliação de qual nível de rigor é conveniente atingir sem que, com isso, percamos o real sentido e a real compreensão das idéias matemáticas. Para isso, devemos levar em consideração, fundamentalmente, o perfil do nosso estudante no que se refere a sua formação matemática anterior e aos objetivos das disciplinas que ministramos para os diversos cursos da carreira universitária, os quais formam profissionais com os mais diferentes espectros. (REIS, 2001, p. 79)

Concluindo essa seção, apresentaremos a noção de intuição profunda trabalhada por Semadeni (2008). O autor destaca a contribuição de Tall (2004) que apresenta o pensamento matemático se desenvolvendo a partir da conexão entre três universos da Matemática, tendo cada um deles um nível próprio de sofisticação e aprimoramento.

O primeiro seria o universo que compreende a descrição do objeto matemático (*conceptual-embodied world*, no original). Nesse primeiro momento o objetivo é descrever ou deduzir propriedades a partir da observação e manipulação do objeto. O segundo universo (*proceptual-symbolic world*, no original) compreende as ações e esquemas que podem explicar o objeto de uma maneira mais simbólica. Finalmente, temos o universo da descrição formal, rigorosa e axiomática do objeto (*formal-*

axiomatic world, no original).

Conforme apresentado, a forma como definimos um objeto matemático delimitará a transição do pensamento matemático elementar para o pensamento matemático avançado. A intuição profunda (*deep intuition*, em tradução livre) pressupõe a compreensão do objeto matemático em toda a sua multiplicidade de significados, incluindo suas propriedades e, principalmente, a relação com outros objetos, matemáticos ou não, que podem estar associados àquele. Nesse sentido, para compreendermos “profundamente”, devemos compreender o objeto imerso em todo um contexto associado à sua percepção física, sensorial, de definição e sua relação com o meio.

Finalmente, destacamos que muitos professores podem acreditar na existência de uma relação dicotômica entre a intuição e o rigor, a qual pode ser percebida quando, muitas vezes, a expressão intuição é enxergada como uma oposição ao rigor. A intuição estaria relacionada, por exemplo, à representação visual ou àquilo que poderia ser considerado plausível, ainda que não tenhamos utilizado de nenhuma demonstração rigorosa. Cabe ressaltar que compartilhamos com a proposta apresentada por alguns educadores matemáticos (REIS, 2001, 2009; DOMINGOS, 2003) para a relação entre rigor e intuição: não há, em nosso entendimento, uma relação dicotômica entre estas duas aproximações para a compreensão de um elemento matemático. Acreditamos fortemente numa relação de complementaridade entre esses conceitos.

3. Sobre imagem conceitual e definição conceitual

Diferentemente do que o senso comum nos apresenta, a construção de uma ideia ou a apropriação de um novo conceito não se dá de forma completamente linear em nosso cérebro. Ainda que o cérebro tenha uma identificação estreita com uma estrutura puramente lógica, seu funcionamento não é propriamente lógico. Quando evocamos um conceito qualquer ou quando vamos nos apropriar de uma nova informação, e aqui podemos incluir os conceitos e as informações matemáticas, o fazemos de maneira complexa e acionamos diferentes partes de nosso cérebro ao mesmo tempo. Existe toda uma estrutura cognitiva extremamente complexa para a apropriação desta nova informação. Nosso cérebro evoca diferentes imagens para se apropriar deste novo conceito, acionando toda uma rede complexa de imagens, definições pré-estabelecidas e saberes prévios para compreendermos esta nova informação.

Para lançarmos uma luz sobre essa complexa rede de informação acionada pelo nosso cérebro, ainda que nosso trabalho não pretenda elucidar todo o aspecto cognitivo que implica essa aquisição do conhecimento, consideraremos, no presente trabalho, as ideias de Tall e Vinner (1981) sobre imagem conceitual (*concept image*, em tradução livre) nas quais nos apoiaremos fortemente:

Usaremos o termo imagem conceitual para descrever a estrutura cognitiva total que está associada ao conceito, que inclui todas as imagens mentais, propriedades e processos associados. Esta é construída ao longo dos anos, através de experiências de todos os tipos, mudando enquanto o indivíduo amadurece e se depara com novos estímulos e amadurece. (TALL e VINNER, 1981, p. 153, em tradução livre)

Cabe destacar que a imagem conceitual é individual e dinâmica e vai sendo modificada com o tempo. A forma como cada um de nós constrói sua imagem para um dado conceito é muito particularizada e está sempre impregnada de valores e referências que são pessoais. Por outro lado, ela é também dinâmica e varia com o tempo. Novas imagens vão sendo agregadas às anteriores modificando-as e revestindo-as de um caráter dinâmico.

Consideraremos também, no presente trabalho, as ideias relacionadas à definição conceitual (*concept definition*, em tradução livre) de Meyer (2003), também se baseando em Tall e Vinner (1981):

O termo definição conceitual é utilizado para indicar a forma verbal utilizada pelo indivíduo para especificar um conceito. Esta definição conceitual pode ser aprendida pelo indivíduo de uma forma rotinizada ou de uma forma mais significativa, relacionando-a em maior ou menor grau com a definição formal do conceito científico. Pode também constituir uma reconstrução pessoal da definição de um conceito, sem que tenham necessariamente significados coincidentes. Neste caso, a definição conceitual é considerada como a forma verbal utilizada pelo estudante para especificar sua imagem conceitual (evocada). (MEYER, 2003, p. 6)

Interessante é que, principalmente em função de como foi processada a imagem conceitual, a definição conceitual pode diferir da definição apresentada formalmente. O aluno (re)constrói sua definição conceitual permeando-a com suas imagens conceituais previamente estabelecidas.

Notemos que a definição conceitual é uma forma de descrever em palavras um conceito. Podemos então evocar, para uma dada definição conceitual, imagens conceituais diferentes e, mais ainda, até mesmo conflitantes. O aluno pode, sem o perceber, ter

construído imagens conceituais conflitantes para uma mesma definição conceitual e não detectar o equívoco até ter a oportunidade de evocar as duas imagens em uma mesma situação.

4. Apresentando nossa pesquisa

Como observamos então, a investigação sobre imagens e definições conceituais pode revelar interessantes elementos que contribuam para a discussão do ensino de Cálculo. Nessa perspectiva, intentamos investigar as relações entre intuição e rigor e entre imagem conceitual e definição conceitual que podem ser manifestadas pelos alunos nos processos de ensino e de aprendizagem de limites e continuidade em Cálculo I, bem como caracterizar o papel das definições formais nesses processos.

Após uma revisão teórico-bibliográfica que nos permitiu discutir alguns aspectos dos processos de ensino e de aprendizagem de limites e continuidade em Cálculo I, na perspectiva da Educação Matemática no Ensino Superior, objetivamos mais especificamente, levantar hipóteses e categorias de análise de algumas relações manifestadas por alunos entre intuição e rigor e entre imagem conceitual e definição conceitual nos referidos processos.

Nossa pesquisa foi realizada no 2º semestre letivo de 2010, com 56 alunos dos cursos de Licenciatura em Matemática (36 alunos dos 2º e 3º períodos) e Bacharelado em Estatística (20 alunos dos 2º e 3º períodos) da Universidade Federal de Ouro Preto. Os alunos estavam matriculados em duas turmas da disciplina MTM 212 – Cálculo Diferencial e Integral I, obrigatória para os cursos de Matemática e Estatística, com carga horária de 60 horas/aula, desenvolvidas a partir da seguinte ementa: Derivadas e Aplicações; Integrais e Aplicações.

Cabe ressaltar que os conteúdos de Limites e Continuidade são estudados na disciplina MTM 211 – Introdução ao Cálculo Diferencial e Integral, integrante da grade curricular do 1º período de cada curso, também obrigatória e pré-requisito para o Cálculo I, com carga horária de 60 horas/aula, desenvolvidas dentro da seguinte ementa: Números Reais; Funções; Limites e Continuidade.

Destaca-se que é quase uma prática “obrigatória” dos professores de Cálculo I, iniciar a disciplina com duas semanas de revisão das definições e principais propriedades de limites e continuidade, o que foi feito pelo professor responsável pela disciplina, um

docente efetivo do Departamento de Matemática da UFOP, com formação de Doutorado em Matemática Aplicada e com 15 anos de experiência docente no Ensino Superior.

Contatamos esse professor responsável, o qual prontamente aceitou aplicar duas atividades por nós elaboradas e que serão descritas a seguir: a 1ª atividade (Limites) ao final da 1ª semana de aulas, na qual foi revisado o conteúdo de limites e a 2ª atividade (Continuidade) ao final da 2ª semana de aulas, na qual foi revisado o conteúdo de continuidade, sendo dado o tempo de 1 hora/aula para a realização de cada atividade por parte dos alunos. Obviamente, estes foram devidamente instruídos sobre o objetivo e a natureza das atividades como instrumentos de uma pesquisa científica.

Como as noções de rigor e intuição permearam a análise dos resultados para que pudéssemos estabelecer, se possível, uma relação entre os conceitos (imagem e definição) e os tratamentos (intuitivo ou rigoroso) desprendidos pelos alunos, a proposta de nossas atividades envolveu habilidades em que poderíamos avaliar tais noções.

Nessas atividades, partimos de aspectos que envolvem / evocam a intuição dos alunos para aspectos que descrevem / demonstram o rigor dos alunos na formalização dos conceitos de limites e continuidade. Isto pode ser notado quando exploramos, ao final de cada atividade, a capacidade dos alunos de, não mais “descrever” os conceitos envolvidos, mas de “defini-los” formalmente.

A Atividade 1 (Limites) iniciou-se com a Questão 1: “Escrevendo com suas palavras...”

Explique com suas próprias palavras, sem utilizar números nem simbologia matemática, o que você entende por:

- a) uma função tem limite quando a variável independente tende a um certo valor;*
- b) uma função tem limite infinito quando a variável independente cresce indefinidamente.*

A seguir, passamos para a Questão 2: “Do gráfico para o cálculo...”, na qual solicitamos a determinação gráfica da existência de limites com o intuito de destacar elementos da intuição gráfica / algébrica dos alunos. O objetivo da questão era avaliar como o aluno interpretava geometricamente a existência do limite de uma função. Foram construídos gráficos com limites em um ponto, com limites infinitos e com limites no infinito. Interessante observar que, propositalmente, alguns gráficos apresentavam descontinuidade em pontos onde o limite existia. Ainda que alguns aspectos da continuidade tenham sido avaliados somente na próxima atividade, acreditamos

proceder a uma melhor avaliação de algumas respostas da questão confrontando a existência do limite com a continuidade.

Na sequência, apresentamos a Questão 3: “Do cálculo para o gráfico...”, cujo objetivo era explorar a intuição algébrica / gráfica dos alunos relacionada aos limites laterais quando a função tende a um ponto e também aos limites infinitos e no infinito. Enquanto, na Questão 2, o aluno era levado a interpretar as informações sobre limites a partir dos gráficos, o objetivo aqui era construir o gráfico levando em consideração seu comportamento na vizinhança de alguns valores do domínio da função.

Finalmente, chegamos à Questão 4: “Tentando escrever rigorosamente...”

De acordo com as definições precisas de limites, o que significam as afirmações:

- a) para todo $\varepsilon > 0$ real dado, existe $\delta > 0$ tal que, se $x \in D(f)$ e $0 < |x - 4| < \delta$, então $|f(x) - 5| < \varepsilon$;
- b) para todo $M > 0$ real dado, existe $N > 0$ tal que, se $x \in D(f)$ e $x > N$, então $f(x) > M$.

A Atividade 2 (Continuidade) iniciou-se com a Questão 1: “Escrevendo com suas palavras...”

Explique com suas próprias palavras, sem utilizar números nem simbologia matemática, o que você entende por:

- a) uma função é contínua para um certo valor da variável independente;
- b) uma função é contínua.

A seguir, passamos para a Questão 2: “Do gráfico para o cálculo...”, na qual solicitamos que os alunos avaliassem a continuidade em gráficos, utilizando sua intuição gráfica / algébrica.

Na sequência, apresentamos a Questão 3: “Do cálculo para o gráfico...”, cujo objetivo também era explorar a intuição algébrica / gráfica dos alunos relacionada aos limites laterais quando a função tende a um ponto e também a continuidade da função em um dado ponto.

Finalmente, chegamos à Questão 4: “Tentando escrever rigorosamente...”

De acordo com as definições precisas de continuidade, o que significam as afirmações:

- a) existe $f(\pi)$, existe $\lim_{x \rightarrow \pi} f(x)$ e $\lim_{x \rightarrow \pi} f(x) = f(\pi)$;
- b) para todo $\varepsilon > 0$ real dado, existe $\delta > 0$ tal que, se $x \in D(f)$ e $|x - 4| < \delta$, então

$$|f(x) - f(4)| < \varepsilon.$$

5. Analisando as atividades

Cada uma das atividades foi composta de questões nas quais tentávamos estimular o aluno a apresentar imagens conceituais evocadas e avaliarmos as transições gráfico-algébrica e algébrico-gráfica. Ao final, tratamos sempre dos aspectos conceituais envolvidos. Procedendo assim, acreditamos contemplar diversas nuances dos aspectos intuição-rigor e imagem conceitual-definição conceitual.

Partindo das atividades propostas, identificamos algumas relações entre rigor e intuição e entre imagem conceitual e definição conceitual, manifestadas pelos alunos participantes de nossa pesquisa. Ademais, como as definições formais de limites e continuidade haviam sido trabalhadas com os alunos, pudemos inferir a respeito do papel dessas definições na formação de imagens e definições conceituais. Da análise de nossas atividades, que se encontra completa em Abreu (2011), pudemos estabelecer algumas categorizações que passamos, agora, a descrever.

5.1. Sobre as relações entre imagem conceitual e definição conceitual em limites

A partir da análise da Atividade 1, inferimos que as principais imagens conceituais relacionadas à existência do limite em um ponto evocaram as aproximações laterais da função a um valor, enfatizando os limites laterais e também a aproximação da função a um valor, sem enfatizar os limites laterais. Já em relação a limites infinitos e no infinito, as principais imagens conceituais evocaram o crescimento indefinido, enfatizando o limite infinito e o crescimento “negativamente e positivamente”, talvez querendo enfatizar o limite no infinito. Essa dificuldade em interpretar fidedignamente uma certa imagem conceitual já havia sido ressaltada por Meyer (2003).

Como nossa atividade permitiu que o aluno descrevesse em palavras os conceitos acima mencionados, podemos considerar, segundo Tall e Vinner (1981), que as definições conceituais remetem a imagens conceituais conflitantes, como no caso da imagem de que “ter limite é assumir um valor”.

5.2. Sobre as relações entre intuição e rigor em limites

A partir da análise da Atividade 1, inferimos que os alunos parecem apenas interpretar a existência do limite a partir de uma intuição gráfico-geométrica (REIS, 2001) e se

mostram limitados quando têm que transitar entre as representações gráfica e algébrica.

De um modo geral, os bons índices de acertos na questão específica da transição gráfico-algébrica nos remetem a Meyer (2003) que destaca:

No âmbito do ensino de Cálculo, é sabido que os estudantes apresentam bons resultados na realização de tarefas que enfocam os aspectos operatórios, e resultados menos satisfatórios se essas tarefas enfocam aspectos conceituais. [...] Este fenômeno evidencia uma questão amplamente debatida ao longo dos anos, que diz respeito à existência de diferentes tipos de conhecimento matemático: um deles relacionado à compreensão dos conceitos matemáticos, e outro, aos procedimentos adotados para resolver tarefas matemáticas. (MEYER, 2003, p. 5)

Entretanto, sequer um conhecimento procedimental (HIEBERT e LAFEVRE, 1986) pode ser associado à transição algébrico-gráfica, que revelou uma grande dificuldade dos alunos, talvez até mesmo pela ausência de atividades que fomentam tal transição em muitos livros didáticos.

Outra inferência emergente de nossa pesquisa é que a notação rigorosa para limites se revelou totalmente sem sentido para os alunos, já que praticamente todas as respostas ficaram em branco, sendo que nenhum participante apresentou uma resposta considerada correta. Assim, os alunos não conseguiram minimamente perceber nas definições formais, elementos intuitivamente corriqueiros no estudo de limites que deveriam retomar imagens conceituais evocadas no início da atividade.

5.3. Sobre as relações entre imagem conceitual e definição conceitual em continuidade

A partir da análise da Atividade 2, inferimos que as principais imagens conceituais relacionadas à continuidade em um ponto estão diretamente ligadas à função estar definida nesse ponto. Para a maioria dos alunos, a continuidade em um ponto parece independe da existência dos limites laterais quando a função tende ao ponto, o que retrata uma imagem conceitual desconectada de uma imagem conceitual de limites. Interessante observarmos que os alunos não associaram a continuidade à existência do limite, apesar de conhecerem alguns aspectos conceituais relacionados aos limites, como por exemplo, aqueles que associam a existência do limite em um ponto com os limites laterais. Logo, entendemos que, simplesmente, os alunos não associam continuidade à necessidade da existência dos limites laterais, apenas à definição da função no ponto. Aqui, cabe destacar que, apesar de existirem algumas definições

diferentes de continuidade em livros didáticos, a definição da função no ponto foi uma das (três) condições apresentadas aos alunos para a continuidade da função no referido ponto. Entretanto, esse fato não parece-nos justificar a não verificação das demais condições associadas à existência do limite.

Para a continuidade de uma função, a principal imagem conceitual evocada nos remete a uma visão clássica sobre continuidade: não haver interrupção ou salto na função, ou seja, a possibilidade de se traçar / esboçar o gráfico da função sem interrupções. Novamente, não há qualquer imagem conceitual relativa à existência de limites ou ao valor da função em pontos.

Novamente, nossa atividade permitiu que o aluno descrevesse em palavras os conceitos acima mencionados, ou seja, explicitasse uma definição conceitual. Assim, segundo Tall e Vinner (1981), consideramos que as definições conceituais remetem a imagens conceituais restritas e/ou equivocadas, como no caso da imagem de que “ser contínua é possuir imagem”.

5.4. Sobre as relações entre intuição e rigor em continuidade

A partir da análise da Atividade 2, deparamo-nos com outro descompasso entre a imagem conceitual evocada na continuidade e sua definição formal. Inferimos que os alunos parecem apenas interpretar a continuidade também a partir de uma intuição gráfico-geométrica (REIS, 2001), assim como interpretam os limites; logo, novamente eles se mostram limitados quando têm que transitar entre as representações gráfica e algébrica.

Novamente, podemos identificar um interessante conflito relacionado à definição formal de continuidade. Ao associar a continuidade de uma função no ponto apenas à existência de um valor da função nesse ponto, os alunos recorrem a uma imagem conceitual bastante intuitiva, mas sem “consultar” sua definição formal. Essa situação de sala de aula já havia sido alertada por Vinner (1991), ao descrever o que pode acontecer na solução de um determinado problema ou questão:

[..] a célula da definição conceitual, mesmo se não-vazia, não é consultada durante o processo de resolução do problema. Os hábitos de pensamento cotidianos se sobrepõem e o respondente está inconsciente da necessidade de consultar a definição formal. Não é preciso dizer que, na maioria dos casos, a referência à célula da imagem conceitual será bem sucedida. Esse fato não encoraja as pessoas a se referirem à célula da definição conceitual. (VINNER, 1991, p. 76, em tradução livre)

Entendemos que essa situação é rotineira na sala de aula de Cálculo e parece refletir uma dificuldade de aprendizagem que, talvez, possa estar associada a obstáculos epistemológicos, ou seja, inerentes ao próprio conhecimento, como já havia destacado Iglioni (2002).

Novamente, uma inferência emergente de nossa pesquisa é que a notação rigorosa para continuidade mais uma vez se revelou totalmente sem sentido para os alunos, os quais não conseguiram minimamente identificar, nas definições formais, elementos intuitivos no estudo da continuidade que deveriam retomar imagens conceituais evocadas no início da atividade e também na atividade de limites.

Considerações finais

Cientes que devemos respeitar a autonomia do profissional do Ensino Superior em sala de aula, incluindo a capacidade de repensar sua prática de acordo com a necessidade de seus alunos, ainda assim, a partir dos resultados apresentados em nossa pesquisa, julgamos procedente apresentar algumas considerações que intentam servir como uma fonte de reflexão especificamente para o professor de Cálculo e, de uma forma mais geral, para o professor de Matemática que atua com as diversas disciplinas basilares no Ensino Superior:

- Procure sempre revisitar as imagens conceituais que estão sendo construídas pelos seus alunos, ao longo dos processos de ensino e aprendizagem, propondo atividades que primem pela diversidade de abordagens. Nesse sentido, ainda que acreditemos ser oportuno, em algumas situações, a realização de exercícios de um padrão mais repetitivo, frequentemente apresentados pelos livros didáticos, propomos uma reflexão no sentido de evitá-los, quando possível, estimulando de maneira criativa uma maior transição entre as diversas representações (gráfico-algébrica e algébrico-gráfica), a fim de enriquecer as imagens conceituais evocadas pelos alunos durante os processos de sala de aula;

- Procure fazer com que seus alunos escrevam sobre aquilo que estão entendendo, evidenciando assim suas definições conceituais e estimulando-os a explicar “como” aplicam a teoria na resolução de problemas / exercícios. Isso possibilita ao professor uma maior flexibilidade ao abordar a definição formal, além de incentivar os alunos a consultar a “célula” da definição conceitual envolvida nas atividades e até mesmo

modificá-la quando necessário; por exemplo, em caso de conflitos com a definição formal;

- Valorize a realização de atividades que abordem também a transição algébrico-gráfica como forma de valorizar as diversas vertentes intuitivas presentes na abordagem dos temas e que, tradicionalmente, não são exploradas pelos livros didáticos. Atividades nesse sentido podem ajudar o aluno a compreender a importância de se evocar uma definição conceitual e confrontá-la com suas imagens conceituais, evitando assim, obstáculos na aprendizagem. Exercícios que exploram aspectos construtivos de limites e continuidade podem ser uma grande fonte de inspiração para a valorização de uma intuição profunda, no sentido de compreender os conceitos matemáticos com multiplicidade de significados e propriedades;

- Não exagere nas definições e demonstrações rigorosas, principalmente se essas forem apresentadas de maneira mecanizada e sob um aspecto totalmente procedimental. Se uma demonstração não puder ser significativa para os alunos e, mais importante ainda, ser ilustrada, até mesmo com exemplos numéricos, tal demonstração pode ser muito mais um “exercício de ensino” para o próprio professor do que uma “atividade de aprendizagem” para os alunos. Especificamente, em limites e continuidade, as definições e demonstrações envolvendo a notação ϵ - δ (epsilons e deltas) mostram-se, quase sempre, incapazes de evocar imagens e definições conceituais significativas.

Finalmente, acreditamos que nossa pesquisa não esgota todas as indagações que levantamos ao longo da trajetória investigativa. Por exemplo, há que se investigar como se processa o rigor numa perspectiva “cognitiva” ou ainda, como o aluno constrói ou se apropria de um conceito de forma rigorosa.

Encerramos, então, o presente trabalho lembrando a reflexão de Reis (2009) acerca do chamado “rigor acadêmico” o qual, segundo o autor, é dominante no mundo das publicações e apresentações de trabalhos científicos, mas que não pode ser transposto de uma maneira direta, mecânica ou simplista para o ensino:

Essa transposição, na verdade, deveria proporcionar uma exploração múltipla e flexível dos conceitos, de modo que os mesmos sejam intuitivamente significativos e compreensíveis, tendo um tratamento de validação e demonstração (isto é, rigor) compatível ao contexto de ensino (instituição; Licenciatura ou Bacharelado; conhecimento prévio dos alunos; etc). (REIS, 2009, p. 93)

Assim, esperamos que este trabalho seja uma fonte agradável de leitura para professores de Cálculo que querem e ousam refletir sobre sua prática pedagógica. Que eles encarem uma oportunidade de mudança como uma necessidade do próprio desenvolvimento profissional.

Referências

ABREU, O.H. (2011). *Discutindo algumas relações possíveis entre intuição e rigor e entre imagem conceitual e definição conceitual no ensino de Limites e Continuidade em Cálculo I*. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto.

BARUFI, M.C.B. (1999). *A construção/negociação de significados no curso universitário inicial de Cálculo Diferencial e Integral*. Tese (Doutorado em Educação). Universidade de São Paulo, São Paulo.

CELESTINO, M.R. (2008). *Concepções sobre limite: imbricações entre obstáculos manifestos por alunos do Ensino Superior*. Tese (Doutorado em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.

CORNU, B. (1983). *Apprentissage de la notion de limite: conceptions e obstacles*. Tese (Doutorado em Matemática Pura) Université Scientifique et Medicale de Grenoble, Grenoble.

CURY, H.N. (2009). Pesquisas em análise de erros no ensino superior: retrospectiva e novos resultados. In: FROTA, M.C.R.; NASSER, L. (Orgs.). *Educação Matemática no Ensino Superior: pesquisas e debates*. Recife: SBEM, p. 223-238.

DOMINGOS, A.M.D. (2003). *Compreensão de conceitos matemáticos avançados – A Matemática no início do superior*. Tese (Doutorado em Ciência da Educação). Universidade Nova de Lisboa, Lisboa.

FRESCKI, F.B.; PIGATTO, P. (2009). *Dificuldades na aprendizagem de Cálculo Diferencial e Integral na Educação Tecnológica: proposta de um curso de nivelamento*. In: Simpósio Nacional de Iniciação Científica, I, Curitiba, 2009. Anais... Curitiba: UTFPR, p. 910-917.

FREUDENTHAL, H. (1973). *Mathematical as an Educational Task*. Dordrecht: Reidel.

FROTA, M.C.R. (2001). Duas abordagens distintas da estratégia de resolução de exercícios no estudo de Cálculo. In: LACHINI, J.; LAUDARES, J.B. (Orgs.). *Educação Matemática: a prática educativa sob o olhar de professores de Cálculo*. Belo Horizonte: FUMARC, p. 89-121.

HIEBERT, J.; LEFEVRE, P. (1986). Conceptual and procedural knowledge in mathematics: An introductory analysis. In: HIEBERT, J. (Ed.). *Conceptual and procedural knowledge: the case for Mathematics*. Hillsdale: Lawrence Erlbaum Associates, p. 1-27.

IGLIORI, S.B.C. (2002) A noção de “obstáculo epistemológico” e a Educação Matemática. In: MACHADO, S.D.A. (Org.). *Educação Matemática: uma introdução*. São Paulo: EDUC, p. 89-113.

- MEYER, C. (2003). *Derivada/Reta Tangente: Imagem Conceitual e Definição Conceitual*. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.
- NASSER, L. (2009). Uma pesquisa sobre o desempenho de alunos de cálculo no traçado de gráficos. In: FROTA, M.C.R.; NASSER, L. (Orgs.). *Educação Matemática no Ensino Superior: pesquisas e debates*. Recife: SBEM, p. 43-58.
- ONUCHIC, L.R.; ALLEVATO, N.S.G. (2009). Formação de Professores: mudanças urgentes na Licenciatura em Matemática. In: FROTA, M.C.R.; NASSER, L. (Orgs.). *Educação Matemática no Ensino Superior: pesquisas e debates*. Recife: SBEM, p. 169-187.
- PINTO, M.M.F. (2001). Discutindo a transição dos Cálculos para a Análise. In: LACHINI, J.; LAUDARES, J.B. (Orgs.). *Educação Matemática: a prática educativa sob o olhar de professores de Cálculo*. Belo Horizonte: FUMARC, p. 123-145.
- REIS, F.S. (2001). *A Tensão entre Rigor e Intuição no ensino de Cálculo e Análise: a visão de professores-pesquisadores e autores de livros didáticos*. Tese (Doutorado em Educação). Universidade Estadual de Campinas, Campinas.
- REIS, F.S. (2009). Rigor e intuição no ensino de Cálculo e Análise. In: FROTA, M.C.R.; NASSER, L. (Orgs.). *Educação Matemática no Ensino Superior: pesquisas e debates*. Recife: SBEM, p. 81-97.
- SEMADENI, Z. (2008). Deep intuition as a level in the development of the concept image. In *Educational Studies in Mathematics*, N.1, v.68, p. 1-17.
- TALL, D.O.; VINNER, S. (1981) Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. In *Educational Studies in Mathematics*, N.2, v.12, p. 151-169.
- TALL, D.O. (2004). *Thinking through three worlds of mathematics*. In: Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. Norway, p. 281-288.
- VINNER, S. (1991). The Role of Definitions in the Teaching and Learning of Mathematics. In TALL, D.O. (Ed.). *Advanced Mathematical Thinking*. Londres: Kluwer, p. 65-81.
- ZUCHI, I. (2005). *A abordagem do conceito de limite via seqüência didática: do ambiente lápis papel ao ambiente computacional*. Tese (Doutorado em Engenharia de Produção). Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis.