ISSN 1983-3156

A2
http://dx.doi.org/10.23925/1983-3156.2020v22i4p.646-660

La introducción de los REI en la formación de profesores: un ejemplo de REI-FP

The introduction of REIs in teacher training: an example of REI-FP

Eva Cid[1]
Departamento de Matemáticas, Universidad de Zaragoza, España
https://orcid.org/0000-0002-9018-4629

José M. Muñoz-Escolano[2]
Departamento de Matemáticas, Universidad de Zaragoza, España
https://orcid.org/0000-0002-8713-4591

Noemí Ruiz-Munzón[3]
Escola Superior de Ciències Socials i de l'Empresa-Tecnocampus, Universitat Pompeu Fabra, Barcelona, España
https://orcid.org/0000-0003-0674-5938

Resumen

En este trabajo comentamos el desarrollo de una experiencia piloto para presentar un proceso de estudio en el marco de la formación didáctica inicial de los futuros profesores de Educación Secundaria. Se pretende contribuir con ello a la difusión de dicha metodología en las instituciones educativas. El dispositivo didáctico utilizado es el de un recorrido de estudio e investigación para la formación del profesorado (REI-FP), basado en un recorrido de estudio e investigación (REI) para la introducción escolar de los números negativos en un entorno algebraico, previamente diseñado y experimentado en la Educación Secundaria Obligatoria.

Palabras-clave: Teoría Antropológica de lo Didáctico, Formación de profesores, Números enteros.

Abstract

In this paper, we propose a pilot experience to introduce a study process in the frame of the initial didactic training of the future teachers of Secondary Education. With that we want to

[1] ecid@unizar.es
[2] jmescola@unizar.es
[3] nruiz@tecnocampus.cat

contribute to the diffusion of this methodology in the educational institutions. The didactic device used is that of a study and research path for teacher training (SRP-TT), based on a study and research path (SRP) for the school introduction of negative numbers in an algebraic environment, previously designed and experienced in Lower Secondary Education.

Keywords: Anthropological Theory of Didactics, Teacher training, Whole numbers.

La introducción de los REI en la formación de profesores: un ejemplo de REI-FP

Los REI-FP en la formación inicial del profesorado de matemáticas

Frente a un paradigma didáctico *monumentalista* que presenta el saber matemático como si se tratará de monumentos a visitar, olvidando su razón de ser y privándolo de sentido, la teoría antropológica de los didáctico (TAD) propone un paradigma didáctico de *cuestionamiento del mundo* que propugna una presentación funcional del saber frente a la tradicional presentación esencialmente formal. Esta manera de entender la enseñanza de las matemáticas convierte los procesos de modelización matemática, tanto externa como interna, en el eje que vertebra dicha enseñanza, proporcionando las razones de ser que dan sentido a los objetos matemáticos y poniendo de manifiesto las relaciones que existen entre ellos, en vez de presentarlos como objetos aislados.

Todo esto se concreta en los *recorridos de estudio e investigación* (REI) en los que se plantea a los alumnos un proyecto de modelización matemática a través de una cuestión inicial. El trabajo de la clase a lo largo de varias sesiones da lugar a distintas cuestiones particulares cuyas respuestas exigen la emergencia de diferentes objetos matemáticos que finalmente contribuyen a contestar a la cuestión inicial (Chevallard, 2009). Los saberes aparecen aquí como máquinas productoras de conocimientos útiles para dar respuesta a las cuestiones planteadas (presentación funcional), frente a una presentación en vacío que relega a un segundo plano las cuestiones y las respuestas (Chevallard, 2004).

En estos últimos años la investigación didáctica en el marco de la TAD ha diseñado un número considerable de REI que abarcan distintos ámbitos de la matemática y distintas etapas educativas. Sin embargo, la transferencia de estos resultados al sistema educativo español ha sido muy escasa. Es por eso que nos planteamos la necesidad de introducir los REI en la formación inicial de profesores.

Tal como indica Alicia Ruiz-Olarría (2015), ello exige que los dispositivos didácticos que se utilicen en la formación del profesorado tengan también estructura de REI, lo que denomina *recorrido de estudio e investigación para la formación del profesorado* (REI-FP), y que se inicien con una cuestión viva y crucial para la profesión docente.

A partir de ahí, A. Ruiz-Olarría (2015) describe cinco módulos cuya articulación dará lugar al REI-FP. Son los siguientes:

– *Módulo* M_0*. ¿Cómo enseñar un conocimiento C?* Se parte de una cuestión inicial que forme parte de la problemática de la profesión y se trata de formular unas primeras respuestas, basadas en la revisión de los *media* que usan habitualmente los profesores, que darán lugar a nuevas cuestiones y a una reformulación de la cuestión inicial en términos más precisos.

– *Módulo* M_1*. Vivir un REI.* En este módulo se pide al profesor en formación que viva en posición de alumno un REI, que ha sido diseñado previamente para alumnos de Secundaria

– *Módulo* M_2*. Analizar el REI vivido.* La cuestión que dirige esta fase del REI-FP gira en torno al cuestionamiento matemático-didáctico del REI vivido, tanto en lo que respecta a la praxeología matemática construida como a la organización didáctica del proceso.

– *Módulo* M_3*. Diseñar un REI.* En esta fase el profesor en formación debe diseñar un REI análogo al vivido lo que le conducirá a explicitar los criterios básicos para su construcción.

– *Módulo* M_4*. Gestionar, experimentar y analizar un REI.* La experimentación del REI diseñado con alumnos de secundaria permitirá analizar las dificultades y obstáculos que su puesta en práctica produce y proporcionará criterios para modificar su diseño de cara a nuevas experimentaciones.

En este trabajo pretendemos mostrar una experiencia de implementación de un REI-FP en un curso de formación inicial de profesores de matemáticas de educación secundaria basado en el REI de introducción escolar de los números negativos en un entorno algebraico (Cid & Bolea, 2010; Cid & Ruiz-Munzón, 2011; Cid, Muñoz-Escolano & Ruiz-Munzón, 2019).

El REI de introducción escolar de los números negativos en un entorno algebraico

La introducción escolar de los números negativos se suele hacer en un entorno aritmético y se apoya en modelos concretos basados en la presentación de magnitudes opuestas o relativas. Sin embargo, diversas investigaciones han puesto en duda la pertinencia de dicha introducción, bien porque se constata que la analogía con los modelos concretos puede crear dificultades a una correcta construcción de la estructura algebraica de los números con signo (Gallardo, 1994; Cid, 2002, entre otros muchos), bien porque los estudios epistemológicos muestran que la verdadera razón de ser de los números con signo es el trabajo algebraico (Chevallard, 1988) y que la aritmética no solo no tiene necesidad de ellos, sino que históricamente supuso un obstáculo para su aceptación (Glaeser, 1981; Brousseau, 1983; Schubring, 1986; Cid, 2002, 2015).

Como consecuencia de ello, en Eva Cid y Noemí Ruiz-Munzón (2011) se diseña un REI para la introducción escolar de los números negativos en un entorno algebraico. Los criterios que dirigen la construcción del REI se establecen en Eva Cid y Pilar Bolea (2010), donde se diseña un *modelo epistemológico de referencia* (MER) articulado en torno a varias cuestiones generatrices.

La cuestión generatriz global es: *¿Cómo resolver un problema aritmético en el que alguno de los datos que permiten su resolución es desconocido?* La respuesta a esta cuestión obliga a introducir las letras y a sustituir las soluciones numéricas de los problemas por fórmulas. Como consecuencia, aparece la necesidad de considerar a los sumandos y sustraendos como elementos del cálculo algebraico para terminar interpretándolos como un nuevo conjunto numérico que amplía el de los números naturales.

El desglose de la cuestión generatriz global en varias subcuestiones permite el desarrollo de las técnicas algebraicas de cálculo y el establecimiento de la estructura algebraica de sumandos y sustraendos (convertidos posteriormente en los números enteros) y de los distintos significados de los signos “+” y “–”.

Por otro lado, en Eva Cid et al. (2017) se establece la conexión entre el MER de introducción escolar de los números negativos y el MER de modelización algebraico-funcional definido en Noemí Ruiz-Munzón (2010) y Noemí Ruiz-Munzón et al. (2010, 2011), que continúa una línea de investigación iniciada por Yves Chevallard (1989). Este último MER se establece por contraposición al modelo epistemológico-didáctico del álgebra elemental dominante en el sistema educativo, que suele recibir el nombre de *aritmética generalizada* y se caracteriza por considerar el álgebra como un mero epifenómeno de la aritmética (Gascón, 1994-95; Bolea, 2003).

La integración del MER de introducción escolar de los números negativos en la primera etapa del MER de modelización algebraico-funcional lo convierte en uno de los dispositivos didácticos que permiten afrontar el *paso de la aritmética al álgebra* en la institución escolar.

Condiciones de la experimentación

La implementación del REI-FP se realizó en una asignatura del Máster Universitario en Profesorado de Educación Secundaria (especialidad de Matemáticas), que se imparte en la Universidad de Zaragoza, durante el curso 2016-17. Se trata de un Máster de 60 créditos en el que se da una formación didáctica a graduados en matemáticas, física o ingeniería y es obligatorio cursarlo para poder ejercer como profesor de Educación Secundaria en España.

La asignatura tiene un sesgo claramente teórico por lo que la implementación del REI-FP debe servir también para construir un marco teórico de referencia que pueda ser utilizado en otras asignaturas más cercanas a la práctica docente. Es una asignatura de 4 créditos (4 horas de clase a la semana) que se imparte en el primer semestre durante aproximadamente 10 semanas, lo que supone alrededor de 40 horas de clase. La experiencia piloto se desarrolló durante 13 sesiones de 2 horas de duración.

El número de estudiantes matriculados en la asignatura fue de 18 (10 ingenieros, 2 físicos y 6 matemáticos) y todos, menos uno, asistieron a clase regularmente. Para el trabajo en grupo se organizaron 6 grupos de 3 estudiantes. Cada grupo debía comunicar sus resultados por escrito y posteriormente se ponían en común. Las clases las impartieron dos de los autores de la comunicación que recogieron toda la producción escrita de los estudiantes, tanto individual como en grupo, y se turnaron para tomar notas del desarrollo de las sesiones.

Diseño y desarrollo del REI-FP

Utilizamos el diseño de REI-FP propuesto por A. Ruiz-Olarría (2015), pero introduciendo algunas modificaciones que afectan sobre todo a los módulos M_0 y M_2 y que se comentan más adelante. El módulo M_4 no se pudo desarrollar porque los periodos de prácticas de los estudiantes no coinciden con el momento en que se introduce en los centros escolares los números negativos.

1. Desarrollo de módulo M_0

La experiencia adquirida en la impartición de la asignatura en años anteriores nos hizo ver que a la pregunta de cómo enseñar un determinado contenido matemático los estudiantes del Máster respondían con soluciones muy cercanas a su experiencia como alumnos de secundaria y no veían la necesidad de explorar otras posibilidades.

Nos planteamos entonces redefinir la cuestión generatriz de M_0 en términos de mostrar la necesidad de pasar de un problema docente a un problema didáctico, en el sentido señalado por Josep Gascón (2011). En este caso, el problema docente se formuló de la siguiente manera Q_0: *¿cómo mejorar la enseñanza de los números negativos y de los comienzos del álgebra escolar para que los alumnos cometan menos errores de cálculo y entiendan mejor los conceptos?*, mientras que el problema didáctico se expresó al final de M_0 en los siguientes términos: *¿Cómo elaborar una propuesta de enseñanza de los números enteros que* ponga *de manifiesto la ruptura epistemológica existente entre el quehacer aritmético y el algebraico?*

En consecuencia, las tareas que se plantean en las distintas sesiones del módulo M0 no van encaminadas a que los estudiantes den una primera respuesta al problema docente, sino a que vean la necesidad de la formulación del problema didáctico que se convierte así en la cuestión generatriz *Q*0, a la que habrá que responder después de haber vivido los siguientes módulos.

En la primera sesión, después de presentar la asignatura, se entregó a los estudiantes del Máster un pequeño cuestionario dirigido a alumnos de 1º de Educación Secundaria Obligatoria (ESO). Se pidió que lo contestasen individualmente y se recogieron las respuestas. El cuestionario incluía la realización de algunas operaciones con expresiones algebraicas y la resolución de algunos problemas aritméticos en los que la utilización de números negativos podía dar lugar a un camino operacional más corto.

En la segunda sesión se entregaron las respuestas que algunos alumnos de 1º de ESO (entre 12 y 13 años de edad) habían dado a ese mismo cuestionario y se les planteó por grupos la cuestión Q01: *¿Cuáles han sido los errores cometidos por los niños y cuáles son sus posibles causas?* Una vez acabado el trabajo de los grupos, el profesor explicó las condiciones de realización del cuestionario en 1º de ESO y la frecuencia de respuestas erróneas lo que legitimó el planteamiento del problema docente.

En la tercera sesión se hizo una puesta en común de las respuestas dadas por los grupos a la cuestión *Q*01 y de ahí surgió la cuestión *Q*02: *¿Qué diferencias hay entre el quehacer aritmético y el quehacer algebraico?* A lo largo de esta sesión y de las siguientes, se trabajan distintas respuestas a esta cuestión. En particular, en esta tercera sesión, se comentan tanto las estrategias seguidas por los estudiantes del Máster en la resolución del cuestionario como los errores cometidos por los alumnos de 1º de ESO y las explicaciones que daban los grupos sobre sus causas.

Aunque todos los estudiantes contestaron correctamente, los distintos caminos operacionales seguidos permitieron poner de manifiesto las diferencias existentes entre el quehacer aritmético y el quehacer algebraico.

Por ejemplo, ante el problema aritmético: *Un tren sale de Zaragoza con cierto número de pasajeros. En la primera parada bajan 15 y suben 12; en la segunda parada bajan 38 y suben 42 y en la tercera parada bajan 27 y suben 25. ¿Con cuántos pasajeros llegará el tren a su destino si salió de Zaragoza con 144 pasajeros?*, se obtuvieron, entre otras, las siguientes respuestas:

$$\begin{array}{r}144\\-15\\\hline 129\end{array}\quad\begin{array}{r}129\\+12\\\hline 141\end{array}\qquad\begin{array}{r}141\\-38\\\hline 103\end{array}\quad\begin{array}{r}103\\+42\\\hline 145\end{array}\qquad\begin{array}{r}145\\-27\\\hline 118\end{array}\quad\begin{array}{r}118\\+25\\\hline 143\end{array}$$

Respuesta: $\underline{\underline{143}}$ pasajeros

$144-15+12-38+42-27+25 = 144-3+4-2 = 143$ pasajeros

Las dos respuestas son correctas, pero permiten escenificar algunas de las diferencias entre el quehacer aritmético y el algebraico. En el primer caso, el estudiante sigue un camino operacional entre números naturales caracterizado por realizar las operaciones de una en una y con una escritura vertical. Estamos ante una estrategia de resolución claramente aritmética, mientras que, en el segundo caso, se simboliza en una sola expresión en línea las operaciones a realizar, las distintas fases del cálculo se escriben horizontalmente y ligadas por el signo "=" y, aunque el enunciado del problema se refiere a números naturales, el resolutor no tiene inconveniente en reinterpretarlos como números enteros para simplificar el cálculo, lo que nos coloca en un ámbito claramente algebraico.

Por otra parte, el análisis de los errores de los alumnos de 1º de ESO y sus posibles causas hizo aflorar otras diferencias entre la aritmética y el álgebra (Cid et al., 2019): los distintos significados de los signos operacionales y relacionales y de las letras; la compleja sintaxis de las expresiones algebraicas; las técnicas de cálculo algebraico como técnicas que exigen reflexión y se rigen por un principio de economía frente a las técnicas aritméticas fuertemente algoritmizadas; la *diferencia* entendida como término de comparación numérica frente a la *resta* entendida como resultado de la acción de suprimir; etc. Esto permitió a los grupos elaborar en la cuarta sesión un listado de diferencias entre el quehacer aritmético y algebraico que fue finalmente institucionalizado por el formador.

En la quinta sesión se les pidió un comentario sobre diferentes textos históricos que muestran que los números negativos surgen por necesidades del cálculo algebraico y los obstáculos a los que la comunidad matemática de diferentes épocas históricas se tuvo que enfrentar para asumirlos.

La sexta sesión se dedicó a institucionalizar el corpus teórico aparecido hasta el momento: obstáculo epistemológico o didáctico, razón de ser, ruptura epistemológica, salto informacional, etc., concluyendo que:

– el paso de la aritmética al álgebra supone una ruptura epistemológica, es decir, un cambio fundamental en la manera de entender el trabajo matemático y

– los números negativos se sitúan en el inicio del álgebra escolar y su razón de ser son las necesidades del cálculo algebraico.

Esto permitió formular el problema didáctico, entendido como cuestión generatriz Q_0 a responder en los siguientes módulos.

2. Desarrollo de módulo M_1

En la séptima y octava sesiones se repartió el REI de introducción escolar de los números enteros en un entorno algebraico (Cid, 2015) como respuesta al problema didáctico planteado y se pidió a los estudiantes, organizados en grupo, que vivieran el REI en posición de alumnos de 1º o 2º de ESO (entre 12 y 14 años de edad). Esto generó bastantes dificultades porque muchos estudiantes no eran capaces de imaginar qué sabían y cómo se podían comportar los niños de esa edad cuando resolvían las tareas propuestas. Finalmente, se puso a su disposición los diarios de clase de la experimentación del REI realizada en la ESO que actuaron como *media-medio* y que permitieron el contraste y la validación de la vivencia de los estudiantes del Máster en posición de alumnos de ESO.

3. Desarrollo de módulo M_2

En la novena sesión, para posibilitar el análisis epistemológico, económico y ecológico del REI vivido, se institucionalizaron, además de las ya presentadas en M_0, distintas herramientas didácticas desarrolladas en la TAD o en la teoría de situaciones didácticas: modelización matemática, praxeología, modelo epistemológico de referencia (MER), REI, contrato didáctico, momentos didácticos, transposición didáctica, paradigma del cuestionamiento del mundo, etc.

En la décima sesión se les entregó a los grupos un guion con preguntas a las que tenían que responder para facilitar un análisis del REI que permitiera poner de manifiesto el MER que lo sustenta. Como trabajo para casa se les pidió que leyeran los artículos de E. Cid y P. Bolea (2010) y E. Cid y N. Ruiz-Munzón (2011) y enviaran a través de la plataforma digital tres preguntas o comentarios que les había sugerido su lectura.

Por último, en la undécima sesión, se completó el análisis del REI. Además, la introducción de las nuevas herramientas didácticas y la explicitación del MER permitió ampliar el problema didáctico planteado en M_0 de manera que finalmente quedó formulado de la siguiente manera: *¿Cómo elaborar una propuesta de enseñanza de los números enteros que ponga de manifiesto la ruptura epistemológica existente entre el quehacer aritmético y el algebraico y que permita el desarrollo del álgebra escolar entendida como instrumento de modelización?*

Después de esto, se planteó un trabajo dirigido consistente en que a cada grupo se le entregó un texto escolar de manera que los seis textos elegidos representaran distintas épocas históricas desde finales del siglo XIX hasta nuestros días. Cada grupo realizó un análisis epistemológico, económico y ecológico de la propuesta de enseñanza de los números negativos planteada en el libro. Al cabo de un mes, después de una tutoría de control de cada grupo con alguno de los profesores, expusieron su trabajo en dos sesiones más de clase.

En la realización de estos trabajos los grupos demostraron su capacidad para manejar las herramientas de la TAD con cierta soltura y utilizarlas para el análisis de propuestas didácticas.

4. Desarrollo de módulo M_3

En cuanto al módulo M_3, se pidió a los estudiantes, como trabajo para casa, que diseñaran por su cuenta un REI de introducción de los números negativos. Las respuestas no aportaron nada interesante: o bien reproducían con más o menos detalle el REI que habían estudiado, o planteaban una enseñanza basada en el modelo tradicional que suele encontrarse en los libros de texto. La experiencia resulto fallida por lo que no se realizó ninguna sesión de clase para poner en común las respuestas. También hay que decir que después de tantas sesiones los estudiantes mostraron su cansancio por un desarrollo del REI-FP tan dilatado en el tiempo.

Sin embargo, en el trabajo Fin de Máster, en el que tenían que hacer una propuesta didáctica sobre algún otro contenido matemático, sí que se observó que bastantes estudiantes se esforzaron por dar una respuesta en forma de praxeología y por utilizar la terminología de la TAD para describirla y fundamentarla.

Conclusiones

Los resultados de la experiencia muestran las enormes dificultades existentes para que los futuros profesores analicen su epistemología espontánea, adquirida como consecuencia de los muchos años de permanencia en el sistema educativo en su rol de alumnos y reforzada por su experiencia durante el periodo de prácticas que realizan en el Máster. A pesar de ello, se puede decir que, a través de dicha experiencia, los futuros profesores:

– fueron conocedores de que existe una disciplina, la *didáctica de las matemáticas*, que puede aportar información útil a los profesores de matemáticas,

– se dieron cuenta que las matemáticas escolares no son *transparentes* y deben ser analizadas y reelaboradas y que la epistemología de las matemáticas juega un importante papel en dicho proceso,

– entraron en contacto con el paradigma del cuestionamiento del mundo como alternativa al monumentalismo imperante en el sistema educativo, y

– tomaron conciencia de que el paso de la aritmética al álgebra supone una ruptura epistemológica y de que la razón de ser de los números con signo se encuentra en el álgebra.

Agradecimientos:

Esta investigación se ha desarrollado en el marco del proyecto I+D+i "Propuestas para una enseñanza basada en el paradigma del cuestionamiento del mundo" (Q-mundo): RTI2018-101153-B-C21 del Programa Estatal de I+D+i Orientada a los Retos de la Sociedad.

Referencias

Bolea, P. (2003). *El proceso de algebrización de organizaciones matemáticas escolares (Monografía del Seminario Matemático García de Galdeano, 29)*. Zaragoza, España: Departamento de Matemáticas, Universidad de Zaragoza.

Brousseau, G. (1983). Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 4*(2), 165-198.

Chevallard, Y. (1988). La dialectique entre études locales et théorisation: le cas de l'algèbre dans l'enseignement du second degré. En G. Vergnaud et al. (Eds), *Didactique et acquisition des connaissances scientifiques* (pp. 305-323). Grenoble, Francia: La Penseé Sauvage.

Chevallard, Y. (1989). Le passage de l'arithmétique à l'algébrique dans l'enseignement des mathématiques au collège–Deuxième partie. Perspectives curriculaires: la notion de modelisation. *Petit x, 19*, 45-75.

Chevallard, Y. (2004). Vers une didactique de la codisciplinarité. Notes sur une nouvelle épistémologie scolaire. *Journées de didactique comparée 2004*, Lyon.

http://yves.chevallard.free.fr /spip/spip/article.php3?id_article=45

Chevallard, Y. (2009). La notion de PER: problèmes et avancées. *Conferencia impartida en el IUFM de Toulouse*.

http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/La_notion_de_PER___problemes_et_avancees.pdf

Cid, E. (2002). Los modelos concretos en la enseñanza de los números negativos. En E. Palacián & J. Sancho (Eds.), *Actas de las X Jornadas para el Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas, vol. 2*, pp. 529-542). Zaragoza, España: Instituto de Ciencias de la Educación, Universidad de Zaragoza.

Cid, E. (2015). *Obstáculos epistemológicos en la enseñanza de los números negativos* (Tesis de doctorado). Universidad de Zaragoza. http://www.atd-tad.org/documentos/obstaculos-epistemologicos-en-la-ensenanza-de-los-numeros-negativos-tesis-doctoral/

Cid, E. & Bolea, P. (2010). Diseño de un modelo epistemológico de referencia para introducir los números negativos en un entorno algebraico. En A. Bronner et al. (Eds.), *Diffuser les mathématiques (et les autres savoirs) comme outils de connaissance et d'action* (pp. 575-594). Montpellier, Francia: IUFM de l'académie de Montpellier.

Cid, E., Bosch, M., Gascón, J. & Ruiz-Munzón, N. (2017). Integración de los números negativos en el modelo epistemológico de referencia de la modelización algebraico-funcional. En G. Cirade et al. (Eds.), *Evolutions contemporaines du rapport aux mathématiques et aux autres savoirs à l'école et dans la société* (pp. 325-342). https://citad4.sciencesconf.org

Cid, E., Muñoz-Escolano, J.M. & Ruiz-Munzón, N. (2019). Research on negative numbers in school algebra. En M. Bosch, Y. Chevallard, F.J. García & J. Monaghan (eds.) *Working with the Anthropological Theory of the Didactic in Mathematics Education* (pp. 61-76). New York, NY: Routledge.

Cid, E. & Ruiz-Munzón, N. (2011). Actividades de estudio e investigación para introducir los números negativos en un entorno algebraico. En M. Bosch et al. (Eds.), *Un panorama de la TAD* (pp. 579-604). Bellaterra, España: Centre de Recerca Matemàtica (CRM), Universitat Autònoma de Barcelona.

Gallardo, A. (1994). Negative numbers in algebra. The use of a teaching model. En J.P. Da Ponte & J.F. Matos (Eds.), *Proceedings of the 18th International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 2, pp. 376-383). Lisboa: International Group for the Psychology of Mathematics Education.

Gascón, J. (1994-95). Un nouveau modèle de l'algèbre élémentaire comme alternative à l'« arithmétique généralisée ». *Petit x, 37,* 43-63.

Gascón, J. (2011). Las tres dimensiones fundamentales de un problema didáctico. El caso del álgebra elemental. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, *14*(2), 203-231.

Glaeser, G. (1981). Epistémologie des nombres relatifs. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 2*(3), 303-346.

Ruiz-Munzón, N. (2010). *La introducción del álgebra elemental y su desarrollo hacia la modelización funcional* (Tesis de doctorado). Universitat Autònoma de Barcelona.

Ruiz-Munzón, N., Bosch, M. & Gascón, J. (2010). La algebrización de los programas de cálculo aritmético y la introducción del álgebra en Secundaria. En A. Bronner et al. (Eds.), *Diffuser les mathématiques (et les autres savoirs) comme outils de* *connaissance et d'action* (pp. 655-675). Montpellier, Francia: IUFM de l'académie de Montpellier.

Ruiz-Munzón, N., Bosch, M. & Gascón, J. (2011). Un modelo epistemológico de referencia del álgebra como instrumento de modelización. En M. Bosch et al. (Eds.), *Un panorama de la TAD* (pp. 743-765). Bellaterra, España: Centre de Recerca Matemàtica (CRM), Universitat Autònoma de Barcelona.

Ruiz-Olarría, A. (2015). *La formación matemático-didáctica del profesorado de secundaria. De las matemáticas por enseñar a las matemáticas para la enseñanza* (Tesis de doctorado). Universidad Autónoma de Madrid.

Schubring, G. (1986). Ruptures dans le statut mathématique des nombres négatifs. *Petit x, 12*, 5-32.