Aportes dos processos do Pensamento Matemático Avançado para a reflexão do professor sobre sua "forma" de pensar a Matemática

Contributions of Advanced Mathematical Thinking processes to the teachers' reflection on their "way" of thinking about Mathematics

SILVIA D. A. MACHADO [1]

BARBARA L. BIANCHINI [2]

Resumo

Neste artigo descrevemos parte de uma pesquisa que visou investigar os possíveis aportes do conhecimento sobre os Processos do Pensamento Matemático Avançado – PMA- para a reflexão do professor sobre seu próprio saber. A pesquisa tem as características de um estudo de caso, realizado em três encontros de duas horas cada um, com doze professores de matemática em formação continuada. Os resultados revelam que as discussões, sobre processos do PMA, permitiram aos sujeitos passarem de uma reflexão inicial focada nos procedimentos matemáticos a uma reflexão mais ampla e profunda sobre os próprios saberes.

Palavras-chave*: Formação continuada; Professor de matemática; Processos do Pensamento Matemático Avançado.*

Abstract

In this paper we describe part of a research that aimed to investigate the possible contributions of knowledge about the Processes of Advanced Mathematical Thinking – AMT- to the reflection of teachers on their own knowledge. The research has the characteristics of a case study, conducted in three meetings of two hours each, with twelve in-service mathematics teachers. The results reveal that discussions on AMT processes allowed to move from an initial reflection focused on mathematical procedures to a broader and deeper reflection on their own knowledge.

Keywords*: In-service teachers' education; Mathematics teacher; Processes of Advanced Mathematical Thinking.*

Introdução

A reflexão do professor sobre sua prática é um tema cuja relevância tem obtido a atenção de vários pesquisadores tais como Schön (2000) e Alarcão (1996, 2004). Em concordância com a importância dessa reflexão, temos incorporado na formação continuada do professor de matemática atividades que enfatizam seu modo de pensar e fazer matemático. Para tanto buscamos teorias da Educação Matemática com potencial de contribuir no apoio à reflexão desses professores sobre o próprio saber, no sentido empregado por Charlot (2005):

> [...] não há saber senão em uma relação com o saber. [...] Dito

[1] Pontifícia Universidade Católica de São Paulo – silviaam@pucsp.br

[2] Pontifícia Universidade Católica de São Paulo – barbara@pucsp.br

> de outra maneira: não se pode pensar o saber (ou o "aprender") sem pensar ao mesmo tempo o tipo de relação que se supõe para construir esse saber ou para alcançá-lo. (CHARLOT, 2005, p.43)

Concordamos com Charlot (idem) sobre a necessidade e 'preciosidade' de investigações envolvendo a relação do sujeito com o próprio saber. Para desenvolver uma pesquisa desse tipo com professores de matemática resolvemos explorar os aportes das ideias sobre o Pensamento Matemático Avançado – PMA –. Essas ideias são desenvolvidas e discutidas em livro de 1991 organizado por David Tall, que define tal pensamento como sendo aquele que é requerido em situações (matemáticas) complexas.

Embora alguns pesquisadores como Tall (1991) considerem que o PMA ocorre a partir dos anos finais do Ensino Médio, outros como Dreyfus (1991) e Harel e Sowder (2005) sugerem que ele está presente desde a infância. Por exemplo, para a criança o conceito matemático de número ou do valor posicional do algarismo envolve complexidade, pois a complexidade depende do sujeito que a enfrenta.

Harel e Sowder (idem) inclusive chegam a sugerir que se coloque hífen entre as duas palavras Pensamento-Matemático, para enfatizar que se refere ao pensamento matemático de natureza avançada. E prosseguem afirmando que:

> Essa mudança na ênfase é para argumentar que o crescimento do aluno em relação ao pensamento matemático é um processo em evolução, e que a natureza do pensamento matemático pode ser estudada de modo a conduzir a uma instrução desejada em direção ao pensamento-matemático avançado. (HAREL e SNOWDER, 2005, pp. 27-28).

Nosso Grupo de Pesquisa de Educação Algébrica[3] - GPEA- compartilha a posição de Dreyfus (1991) e de Harel e Snowder (2005) a respeito do PMA. Neste artigo descrevemos parte de uma pesquisa que visou investigar os possíveis aportes do conhecimento sobre os Processos do Pensamento Matemático Avançado, (DREYFUS, 1991) para a reflexão de professores sobre seu próprio saber.

Esse objetivo nos encaminhou a optar por uma pesquisa qualitativa, na modalidade de um estudo de caso conforme definido por André (2005), caso esse caracterizado pelo fato de que os sujeitos da pesquisa pertencem a um mesmo grupo de professores de matemática matriculados em um curso de formação continuada.

Para Dreyfus (1991) a consciência do professor de matemática sobre os processos envolvidos no PMA é essencial para que ele entenda as dificuldades de compreensão de seus alunos, o que está relacionado à reflexão do professor sobre seu saber, isto é, sobre como pensa e faz matemática, permitindo que crie condições propícias para o desenvolvimento dos processos do PMA de seus alunos.

Dreyfus afirma que os processos do PMA que mais provocam, promovem avanços na compreensão e no manejo de situações matemáticas complexas são os de **abstrair e de representar**[4]. Por meio de abstrações e representações, o sujeito pode se deslocar de um nível de detalhe a outro, conseguindo assim manejar a complexidade. Tais processos são indissociáveis e ocorrem dialeticamente.

A abstração *é um processo construtivo de estruturas mentais* a partir de propriedades e relações entre objetos matemáticos. Para que o aluno vivencie esse processo de construção ele precisa atentar às estruturas, que fazem parte do conceito abstrato, deixando de lado as variáveis irrelevantes, o que permite reduzir a complexidade da situação proposta.

O **processo de abstrair** supõe os subprocessos de **generalizar** e **sintetizar**. O processo de generalização é aquele que permite ao sujeito tirar como consequência ou induzir do particular, identificar o que há de comum, expandir o domínio de validade. Enquanto o processo de sintetizar significa combinar ou compor partes de tal forma, que elas formem um todo isto é, um objeto matemático. É importante ressaltar que tais processos são indissociáveis.

O **processo de representar** um conceito é aquele de gerar uma instancia, um espécime, um exemplo, uma imagem dele. Ocorre em registros compartilhados como da escrita, do desenho, da fala, dos gestos e outros.

A função da representação simbólica, seja ela escrita ou falada, geralmente é de facilitar a comunicação do conceito. A representação mental por outro lado, segundo Dreyfus (1991), *se refere a um esquema interno ou a uma estrutura de referencia que uma pessoa usa para interagir com o mundo externo. É o que ocorre na mente de um individuo quando pensa em uma parte específica do mundo externo, e isso pode diferir de uma pessoa a outra.* [5] (p.31).

A visualização é um processo pelo qual as representações mentais podem ser

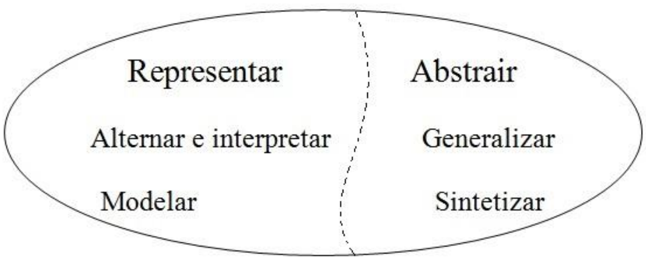
[3] Cerificado pela PUCSP junto ao CNPq.
[4] As palavras em negrito foram destacadas pelas autoras.

construídas, e o ato de gerá-las está relacionado com os sistemas de representação, isto é com artefatos externos concretos. Para que um indivíduo tenha sucesso na matemática, é desejável que ele possua uma rica representação mental dos conceitos. Uma representação é rica se ela tem vários aspectos articulados do conceito. Por outro lado, uma representação é pobre, se possui poucos elementos que permitem a flexibilidade na resolução de problemas.

Não basta ter várias representações de um mesmo conceito, é necessário **alternar e interpretar essas representações**, pois elas precisam estar articuladas corretamente. Isto é, o sujeito precisa possuir condições de transitar de uma representação para outra, sempre que a outra seja mais eficiente para o próximo passo que ele queira dar (p.32). Assim, esse processo de alternar e interpretar as representações constitui um subprocesso do processo de representar. Outro subprocesso de representar é o de **modelar.** Para Dreyfus o termo modelagem se refere tipicamente a encontrar uma representação matemática para um objeto ou processo não matemático**.** Nesse caso significa construir uma estrutura ou teoria matemática, que incorpore as características essenciais do objeto, sistema ou processo a ser descrito (p.34).

A seguir sintetizamos na Figura 1 os processos de abstrair e representar segundo Dreyfus.

Figura 1- Principais processos do PMA



É importante salientar que embora os processos de abstração e de representação sejam os principais processos do PMA, existem diversos outros processos do PMA que ocorrem e interagem em cadeia, dentre os quais se destacam o da descoberta, da intuição, da validação, da prova e da definição.

1. O experimento

[5] Tradução das autoras.

O experimento foi realizado durante um curso de formação continuada de professor de matemática ocorrido no 1º semestre de 2013. O curso constou de 18 aulas, uma por semana, das quais foram utilizadas duas horas de três aulas consecutivas para o experimento. Participaram do experimento doze alunos do curso.

No primeiro encontro, solicitamos aos sujeitos organizados em duplas, que resolvessem quatro situações-problema contextualizadas na matemática e descrevessem os tipos de recursos mentais e representacionais, que empregaram nessas resoluções. No final do 1º encontro, entregamos aos sujeitos cópia do capítulo II de Dreyfus (1991) para que lessem até o próximo encontro, que se realizaria na semana seguinte.

No segundo encontro, discutiu-se o texto de Dreyfus (1991) sobre os principais processos do PMA, quais sejam: os processos de *abstrair* (generalizar e sintetizar) e de *representar* (alternar e interpretar, modelizar), além do processo de validar.

No terceiro encontro, solicitamos que as duplas do primeiro encontro se juntassem novamente, após o que, devolvemos os protocolos com as situações-problema resolvidas e analisadas no primeiro encontro de cada uma dessas duplas. Solicitamos então, que cada par revisse seu protocolo e realizasse uma nova análise da resolução, se julgasse necessário, e da descrição dos recursos mentais e representacionais utilizados, levando em conta os processos do PMA estudados e discutidos.

2. Análise das produções

A seguir descrevemos e analisamos os protocolos de uma das situações-problema propostas.

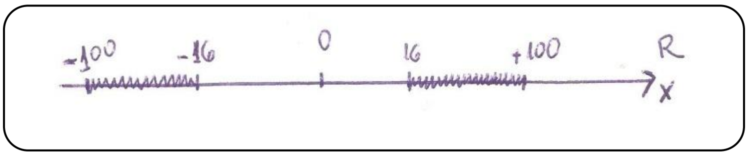
Quadro 1- Atividade 1

Resolvam o seguinte problema (*retirado da p. 133 do livro de Ursini et al (2005)*), observando e refletindo, quais recursos representacionais e mentais utilizaram para tal resolução. Registrem os recursos percebidos.

Dada a expressão $y=x^2$, se quisermos que os valores de y estejam entre 256 e 10000, entre que valores deve estar x?

A **dupla 1**, no primeiro encontro, após proceder a resolução da atividade 1 apresentou a localização de dois intervalos em uma reta designada por ***x***, como segue.

Quadro 2- Transcrição do protocolo do encontro 1 da dupla 1



O par descreveu como recursos mentais e representacionais utilizados o que consta do quadro 3.

Quadro 3 - Transcrição do protocolo do encontro 1 da dupla 1

- $y = x^2$, representação parabólica
- substituição dos valores de y na expressão
- representação gráfica e análise do intervalo em x que satisfaz.

Após apresentar a resolução algébrica, reforçada pelo gráfico da função polinomial de 2º grau, a dupla, sem referência explícita ao fato de que se trata da resposta à questão da atividade, conforme o quadro 2, apresenta os intervalos dos valores em que *x* deve variar. Do ponto de vista matemático, percebe-se que a dupla não sentiu necessidade de expressar se os intervalos são fechados, abertos ou semiabertos e fica a dúvida se o R à direita se refere a R de resposta ou ao conjunto dos números reais. Em relação à descrição dos recursos representacionais e mentais, conforme quadro 3, observa-se que a dupla parece identificar dois dos registros de representação semiótica da função polinomial de 2º grau, após o que, se limita a descrever os procedimentos algébricos, utilizando uma linguagem "telegráfica", na qual é omitido o fato de que *x* é a abscissa do sistema cartesiano plano.

No entanto, no último encontro os elementos da dupla ao reverem seu protocolo do primeiro encontro, acrescentaram a seguinte análise.

Quadro 4 – Transcrição do protocolo do encontro 3 da dupla 1

a) Reconhecer que a expressão $y = x^2$ representa a expressão algébrica de uma função polinomial do 2º grau (variação entre duas variáveis). Associado no processo de aprendizagem ao uso de uma representação única (os processos começam a partir de um caso concreto, uma única representação).

b) Reconhecer que a curva que representa a expressão algébrica no plano cartesiano é uma parábola de concavidade voltada para cima; c) Esboçar o gráfico da parábola que representa a expressão $y = x^2$; d) Reconhecer que o eixo de simetria da parábola é o eixo y. Associados no processo de aprendizagem ao uso de mais de uma representação em paralelo (várias representações do mesmo conceito dependem de forma essencial das relações entre as representações que são formadas).

Nos quatro primeiros itens ocorreram os processos[6] *de* alternar, traduzir, representar.

e) Substituir na expressão $y = x^2$, $y = 256$ e interpretar o resultado $x = \pm 16$; f) substituir na expressão $y = x^2$, $y = 10000$ e interpretar o resultado $x = \pm 100$; g) localizar as coordenadas no plano cartesiano (16, 256), (-16, 256), (100, 10000) e (-100,10000). Associados no processo de aprendizagem ao estabelecimento de ligações entre as representações paralelas (o estabelecimento das ligações da segunda fase constitui a terceira fase, ou seja, as fortes ligações permitem aos alunos mudar de representações, o que os torna conscientes do conceito subjacente e, portanto susceptível de influenciar positivamente a abstração).

h) Perceber que os valores que satisfazem o intervalo $256 \leq y \leq 10000$ pertencem ao intervalo entre $-100 \leq x \leq -16$ e $16 \leq x \leq 100$ no eixo x. Associado no processo de aprendizagem a integração entre representações e mudança flexível entre elas (um processo de integração entre as diversas representações).

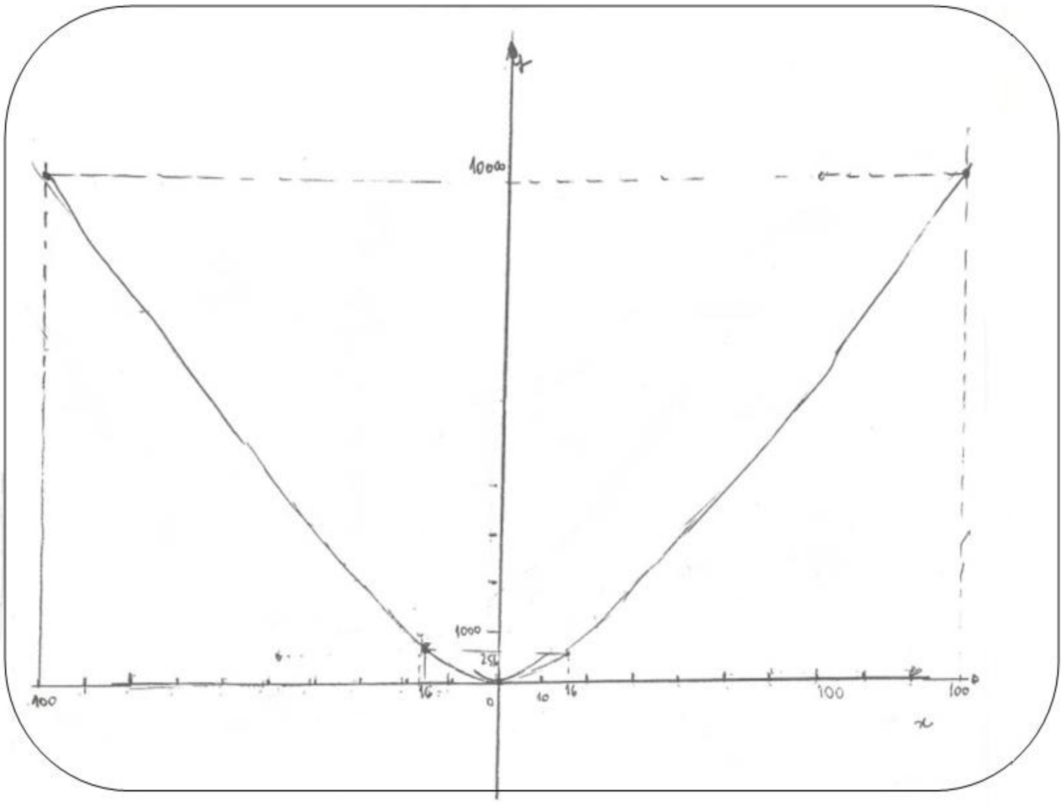
i) *Representação final da função*.

Uma comparação, entre os dois momentos de reflexão sobre os recursos representacionais e mentais utilizados na resolução da atividade, evidencia o aprofundamento da dupla 1 em relação a sua percepção sobre tais recursos. A dupla passou da percepção meramente procedimental (Quadro 3) para uma percepção mais aprofundada, que levou em conta principalmente o processo de representar por meio do estabelecimento da relação deste com os procedimentos algébricos empregados conforme Quadro 4. O fato de não explicitarem, que ocorreu o processo de abstrair, parece indicar que interpretaram os dois processos, o de abstrair e o de representar, como sendo processos independentes um do outro, o que é justificado pelo contato e estudo ainda recente com a compreensão dos processos do PMA.

É interessante notar, que ao rever a resolução feita no primeiro encontro, a dupla sentiu necessidade de complementá-la, pois, no item h do quadro 4, explicitam que interpretaram todos os intervalos indicados anteriormente como sendo fechados.

[6] O que se encontra em itálico aparece no protocolo escrito à mão.

Quadro 5 – Protocolo do encontro 1 da dupla 2



O protocolo da **dupla 2**, conforme Quadro 5, apresenta registros de inequações e do gráfico da função $y = x^2$, isto é, as observações solicitadas se limitaram ao aspecto estritamente matemático, sem recorrer à explicação sobre os recursos utilizados.

Há que comentar a "liberdade" com a notação que a dupla empregou ao passar da inequação $256 < x^2 < 10.000$ para $\sqrt{256} < x < \sqrt{10000}$ e desta para $\pm 16 < x < \pm 100$.

Já no 3º encontro, a dupla 2 apresentou sua análise sobre os recursos empregados na resolução dessa atividade, utilizando frases conforme o Quadro 6 .

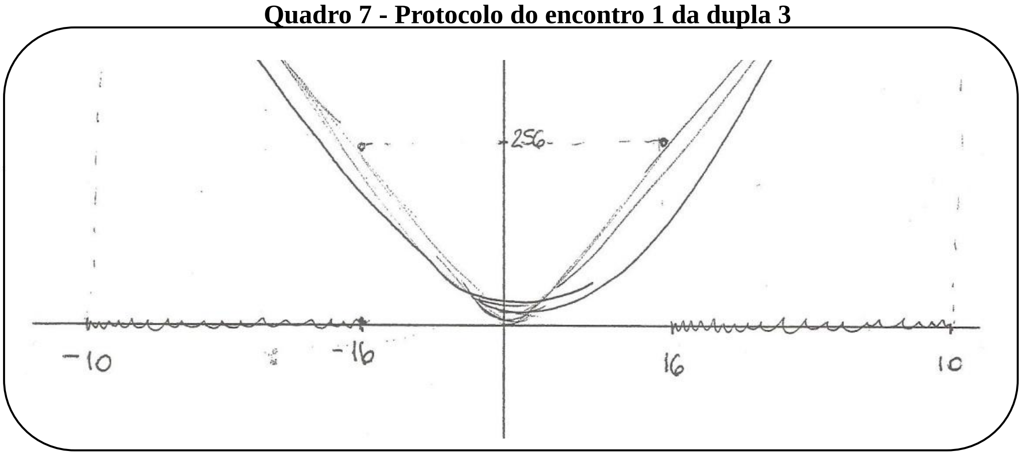
Quadro 6 – Transcrição de frases do protocolo da dupla 2 do 3º encontro

- *[...] leitura e interpretação do que é solicitado...*
- *[...] reflexão de que é uma função polinomial do 2º grau e sua representação gráfica é uma parábola.*
- *Pensou-se sobre quais valores deveria ser calculada a imagem e extraiu-se a raiz quadrada dos números entre 256 e 10000 (sic)...*
- *Fez-se a representação gráfica e houve a inclusão dos valores 256 e 10000*
- *Observou-se a representação gráfica.*
- *Identificação [...] da abstração [...] da representação (resolução gráfica) processos do PMA.*

A linguagem adotada pela dupla 2 mostra certa ambiguidade quanto aos processos do PMA, no entanto é de se notar que os membros da dupla refletiram mais profundamente sobre os recursos utilizados na resolução da atividade. Vale destacar que a dupla se refere à covariação entre as variáveis.

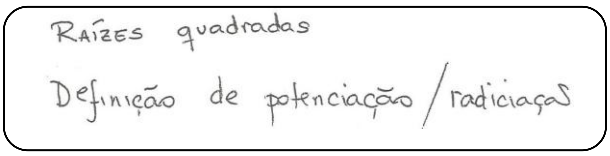
O protocolo da **dupla 3,** produzido no 1º encontro, apresenta um esboço de um gráfico no qual estão registrados no eixo das ordenadas os valores 256 e 10000[7], e no eixo das abscissas o que consta no Quadro 7.

Quadro 7 - Protocolo do encontro 1 da dupla 3



Observa-se que a dupla não percebeu a incoerência da ordenação dos números reais nos intervalos registrados. No entanto, iniciaram uma reflexão sobre os recursos mentais e representacionais, ainda enfocando aspectos puramente procedimentais conforme Quadro 8.

Quadro 8 - Protocolo do encontro 1 da dupla 3


RAÍZES quadradas
Definição de potenciação / radiciaçaS

No terceiro encontro, a dupla 3 apresentou a seguinte análise sobre os recursos representacionais e mentais utilizados para a resolução da mesma atividade, conforme Quadro 9 .

[7] 10000 não consta do quadro 7 pela razão do tamanho exagerado da figura.

Quadro 9 – Transcrição do protocolo do encontro 3 da dupla 3

Primeiramente nos valemos do recurso da **representação**, esboçando o gráfico da função. Embora essa representação não tenha sido tão importante para a resolução do exercício, foi útil no momento da validação.

A utilização de **outra representação** (lei da função: $\mathbf{y=x^2}$) também foi fundamental na resolução, pois indica que o "número **x**" elevado ao quadrado é igual ao "número y". Como o problema forneceu os valores de y, conseguiremos encontrar os valores de x que satisfazem a relação por meio da operação inversa (potenciação inversa da radiciação).

A **abstração** esteve presente, pois tínhamos estruturas mentais construídas, ou seja, conhecíamos as relações e as propriedades dos objetos matemáticos em questão, ou seja, quando nos foi apresentada a lei da função $\mathbf{y=x^2}$, buscamos nas nossas mentes conhecimentos já adquiridos, que seu gráfico seria uma parábola e simétrico em relação ao eixo **y**.

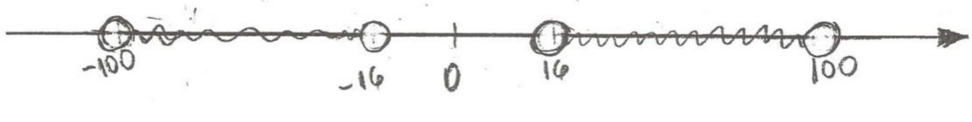
A **generalização** esteve presente no momento em que sabíamos que para uma equação do 2º grau, teríamos duas respostas possíveis, ou seja, $\mathbf{16<x<100}$ ou $\mathbf{-100<x<-16}$.

Ao encontrarmos a solução do exercício, retornamos à representação gráfica e fizemos a **validação** do problema. Nesse momento, foi importante a utilização da representação gráfica.

É evidente o esforço da **dupla 3**, no sentido de expressar os recursos utilizados segundo os processos de abstração e de representação, discutidos no segundo encontro. No entanto, interpretaram de forma idiossincrática o processo de generalização. O que indica, que é preciso maior amadurecimento sobre o assunto tratado. É preciso destacar que a dupla reviu sua "resposta" do 1º encontro, corrigindo-a, no entanto cometeram um equívoco ao afirmar que se tratavam de duas respostas.

O protocolo da **dupla 4** deixa claro que o par recorreu a recursos mentais para a resolução, registrando somente a resposta. Vale observar, que a dupla expressou a resposta tanto por meio da representação na reta, quanto pela representação conjuntivista, conforme Quadro 10.

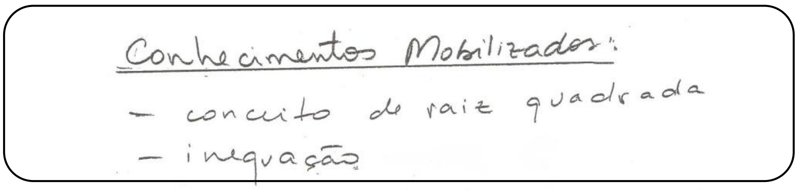
Quadro 10 - Protocolo do encontro 1 da dupla 4



$S = \{x \in \mathbb{R} \,/\, -100 < x < -16$ ou $16 < x < 100\}$

De forma sintética indicaram como recursos, chamados de *conhecimentos mobilizados,* o que consta no Quadro 11.

Quadro 11- Protocolo do encontro 1 da dupla 4


Conhecimentos Mobilizados:
– conceito de raiz quadrada
– inequação

É interessante comparar as reflexões sobre os recursos empregados da dupla 4 nos dois momentos diferentes: primeiro e terceiro encontros.

Quadro 12 - Transcrição dos protocolos dos encontros 1 e 3 da dupla 4

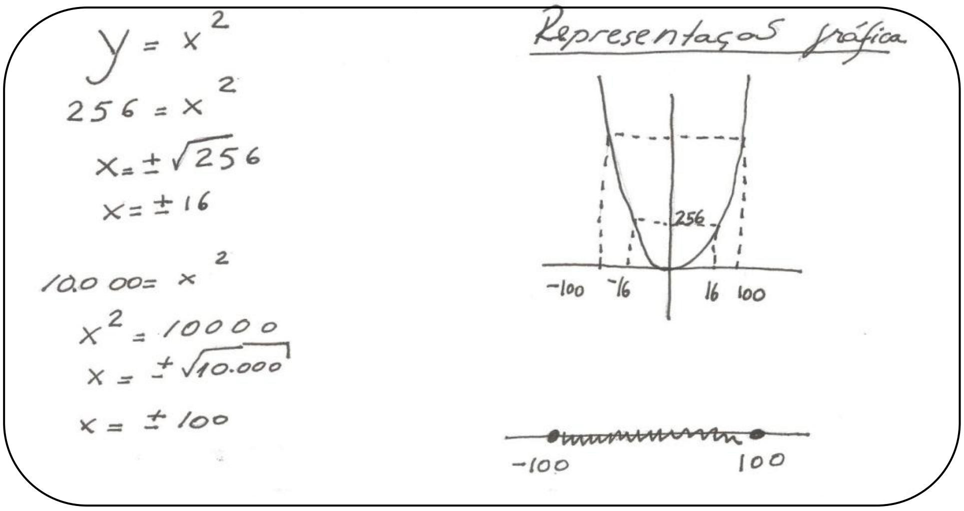
1º encontro	**3º encontro**
- conceito de raiz quadrada - inequação	- Covariação entre x e y. - Representação dos intervalos na reta numérica. - Reconhecer e identificar algo desconhecido por meio de cálculos. - Sintetizar as informações obtidas.

Essa comparação evidencia que no 3º encontro os elementos do par tentaram retomar “o caminho percorrido mentalmente” para chegar à solução. A dupla indica que partiu da percepção de que se trata de uma relação funcional (*covariação entre x e y*), e representa os intervalos na reta real, evidenciando que não considera o registro dos intervalos como solução da situação proposta. Essa ideia é reforçada pela 3ª frase, *Reconhecer e identificar algo desconhecido por meio de cálculos,* o que permite inferir, que a dupla considera como solução somente a resposta formal conjuntivista.

Na realidade interpretamos que a dupla revelou *a capacidade de deslocar a atenção dos próprios objetos para a estrutura de suas propriedades e relações* (DREYFUS, 1991, p.37) que de acordo com esse autor é um dos principais incentivos para a abstração, revelando o ápice desse processo.

O protocolo da **dupla 5** evidencia registro do valor dos extremos dos intervalos de variação da abscissa, conforme Quadro 13 .

Quadro 13 - Protocolo do encontro 1 da dupla 5



No entanto, o par omitiu que x não assume valores no intervalo:]-16 , 16[pois, considerou que *x* varia em todo o intervalo: [-100, 100]. A representação gráfica aparentemente não influiu na resposta da dupla.

Quanto aos recursos utilizados na resolução, a dupla menciona sinteticamente:

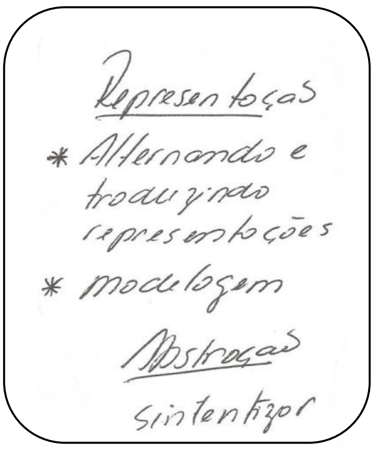
Recursos mentais:

* *Esboçamos o gráfico da expressão* $y = x^2$.

* *Conhecimentos algébricos e gráficos.*

Já no terceiro encontro, a dupla 5 utilizou os termos específicos dos processos do PMA para expressar os recursos mentais e representacionais utilizados na resolução da situação-problema, conforme quadro a seguir.

Quadro 14 - Protocolo do encontro 3 da dupla 5



Nota-se, que em relação ao processo de representação, a dupla entendeu que empregou os subprocessos de alternar e interpretar (*traduzir*) e o de modelar. Quanto ao processo de abstração, a dupla se refere somente ao subprocesso de *sintetizar*. É inconteste que houve um refinamento da reflexão da dupla sobre os recursos usados, do 1º para o 3º encontro, no entanto a reflexão ainda se mostrou um tanto incipiente, exigindo mais aprofundamento.

A **dupla 6** não esteve presente no 1º encontro, participou somente dos dois últimos encontros. No segundo encontro, a dupla teve oportunidade de tomar contato com as ideias sobre processos do PMA, durante a discussão sobre esses processos, e no final desse encontro entregamos para esse par as mesmas atividades realizadas pelos colegas no 1º encontro, solicitando que as realizassem. Na semana entre o 2º e o 3º encontro a dupla pode refletir sobre o texto de Dreyfus (1991) e realizar as atividades propostas. Dessa forma, julgamos interessante investigar o efeito desse estudo sobre a reflexão dos professores dessa dupla.

Quadro 15 - Protocolo do encontro 3 da dupla 6

$16 < x < 100$ ou $-100 < x < -16$

Quanto à reflexão sobre os recursos utilizados para a resolução, a dupla apresentou de forma sintética o que consta do Quadro 16.

Quadro 16 - Protocolo do encontro 3 da dupla 6

-Processos

Representação
Generalização (valores de x em um intervalo)
Sintetização

O protocolo acima permite inferir que a dupla indicou a generalização e a sintetização, sem mencionar o processo de abstração envolvido na resolução da situação-problema proposta. A generalização apontada pela dupla parece ter sido interpretada de forma idiossincrática, pois registraram que a generalização ocorreu em relação *a valores de x* *em um intervalo*!

Considerações Finais

Neste artigo, descrevemos parte de uma pesquisa que visou investigar os possíveis aportes do conhecimento sobre os Processos do PMA para a reflexão do professor sobre seu próprio saber matemático.

Para tanto, em um curso de formação continuada de professores, realizamos um estudo de caso, com doze professores voluntários. A parte empírica teve a duração de três semanas consecutivas, com três encontros de duas horas cada um.

Após a coleta de dados, realizamos uma análise comparativa entre os protocolos do 1º e 3º encontros de cada uma das cinco duplas, e também analisamos o protocolo do 3º encontro da dupla 6.

Os protocolos das cinco duplas do 1º encontro apresentam uma resolução matemática da atividade proposta. Quatro exibem o gráfico da função e o quinto deles registra apenas a solução por meio de duas representações: a dos intervalos na reta real e outra na linguagem conjuntivista. O protocolo da dupla 6 apresenta tão somente a solução.

É preciso lembrar que o trabalho em duplas, em um primeiro momento levou os elementos do par a elaborarem a resolução individualmente, fato constatado por termos recebido dois protocolos por dupla. Provavelmente os pares discutiram suas resoluções, se não de início, no final, para compararem suas respostas. Embora tenhamos recebido dois protocolos por dupla, eles não diferiam no essencial. Somente quatro duplas registraram recursos representacionais e mentais citando seus procedimentos matemáticos.

No segundo encontro, com seis duplas, discutiu-se tanto o que se entendia por PMA, quanto o texto sobre os processos desse pensamento. No terceiro encontro, devolvemos a cada dupla seus protocolos do primeiro encontro, e solicitamos que revissem e repensassem as atividades registradas nos mesmos.

Os protocolos das seis duplas, relativos ao 3º encontro, revelam que as seis duplas referiram que utilizaram o processo de representação com as seguintes especificações: três duplas citaram os subprocesso de interpretar e de alternar, uma dupla citou o subprocesso de modelar em desacordo com a ideia exposta por Dreyfus (1991). Das seis duplas, apenas cinco se referiram ao processo de abstração ou a seus subprocessos: três citaram o subprocesso de sintetização, dois citaram o subprocesso de generalização, embora um deles com um sentido idiossincrático. Nota-se que as duplas tiveram maior dificuldade em identificar o processo da abstração e seus subprocessos, o que nos leva a concluir que devemos dar maior atenção ao processo de abstrair. É importante citar que uma dupla descreveu o processo de validar.

Alguns professores declararam no terceiro encontro que “nunca fizemos uma análise dessa forma sobre uma resolução!”, um deles acrescentou: “mudei minha forma de avaliar uma resolução do aluno”. O que reforça a sugestão de Dreyfus sobre a importância da reflexão do professor sobre seu próprio fazer matemático, para *consciente dos processos do PMA ele possa compreender algumas das dificuldades que seus alunos enfrentam* (DREYFUS, 1991, p.30).

É nítida a diferença da reflexão antes e depois das discussões sobre os processos do PMA, quando se percebe uma evolução nas análises registradas pelas duplas do primeiro ao último encontro, pois passaram de uma reflexão inicial focada nos procedimentos puramente matemáticos a uma reflexão mais profunda, envolvendo os processos do pensamento matemático avançado.

Os resultados desta pesquisa fornecem indícios de que o conhecimento dos processos do PMA propicia o aprofundamento da reflexão do professor sobre seu saber matemático. Essa reflexão, por sua vez, pode levar o professor a criar situações nas quais esses processos podem ser desenvolvidos e reconhecidos por seus alunos. Concluímos, no entanto, ser necessário mais tempo, prática e discussão com professores em formação contínua para a apropriação das ideias sobre os processos do PMA de uma forma mais profunda e ampla.

Finalizamos corroborando frase de Alarcão (2004, p.39) “Termino, recorrendo [...] à convicção de Morin de que é preciso organizar o pensamento para compreender e poder agir. É esta ideia que é preciso introduzir nos paradigmas de formação das pessoas e de funcionamento das instituições”.

Referências

ALARCÃO, I. (2004). *Professores Reflexivos em uma escola reflexiva*. São Paulo: Cortez.

ALARCÃO, I. (1996). (org.) *Formação reflexiva de professores: estratégias de supervisão*. Porto: Porto Editora.

ANDRÉ, M.E.D.A. (2005). *Estudo de caso em pesquisa e avaliação educacional*.

Brasília: Líber.

DREYFUS,T. (1991). Advanced Mathematical Thinking Processes. En: TALL ,D.(Ed..) *Advanced Mathematical Thinking* (pp.25-41). Dordrecht: Kluwer.

CHARLOT, B. (2005). *Relação com o Saber, Formação dos Professores e Globalização.* Porto Alegre: Artes Médicas.

HAREL, G.; SOWEDER, L. (2005) Advanced Mathematical-Thinking at Any Age: Its Nature and its Development. In: *Mathematical Thinking and Learning.* USA: Lawrence Eribaum Associates, Inc, 7(1), 27-50.

SCHÖN, D. A. (2000). *Educando o Profissional Reflexivo: um novo design para o ensino e a aprendizagem.* Trad.Roberto Cataldo Costa. Porto Alegre: Artmed, 256p.

TALL, D. (1991). *Advanced Mathematical Thinking* (pp.25-41). Dordrecht: Kluwer.

URSINI,S & ESCAREÑO, F. & MONTES, D. & TRIGUEROS, M. (2005). *Enseñanza de álgebra elemental: una propuesta alternativa*. Mexico: Trillas.