
La modelación matemática: un proceso para la construcción de relaciones lineales entre dos variables

Sandra Milena Londoño Orrego
Universidad de Antioquia
samydam@gmail.com

Lina María Muñoz Mesa
Universidad de Antioquia
limamu07@gmail.com

Carlos Mario Jaramillo López
Universidad de Antioquia
cama@matematicas.udea.edu.co

Jhony Alexander Villa Ochoa
Universidad de Medellín
jhonyvilla@gmail.com

Grupo de Investigación en Educación Matemática e Historia. U de A – Eafit

Trabajo de Investigación de Maestría (Concluido)- UdeA

Resumen. La presente investigación fue desarrollada en el marco de la Maestría en Educación de la Universidad de Antioquia; en ella, se usó la perspectiva realística de la modelación matemática. El estudio de caso cualitativo fue llevado a cabo con un grupo de nueve estudiantes de once grado de una Institución pública de Medellín, enfocando nuestro objeto de estudio en las maneras cómo construyen relaciones entre dos variables bajo un contexto cotidiano de los participantes. Desde tal perspectiva, se abordó como contexto el Sistema Metro de Medellín, en contraste con otros contextos. En las descripciones y análisis respecto al proceso de modelación matemática resaltamos las temáticas referentes al contexto realístico como punto de partida y a los subprocesos de modelación.

Palabras clave: modelación matemática, modelo, proceso, relaciones lineales, variables.

1. Presentación

Nuestra experiencia docente nos ha permitido observar que las actividades involucradas en los procesos de enseñanza y de aprendizaje, revelan una desarticulación entre las matemáticas escolares y los contextos socioculturales de los estudiantes. En el caso de los procesos algebraicos, es problemático la manipulación sin sentido sobre las expresiones simbólicas. Es común que identifiquemos dificultades en el aprendizaje del álgebra escolar que comprometen un modo espontáneo en la utilización de pasos algebraicos aislados de una significación conceptual y contextual de la variable. Por lo que la forma de enseñar algunos conceptos, en especial el concepto de función, tradicionalmente se ha abordado en forma “mecánica”, es decir, centrado en tareas en las cuales los estudiantes tienen como objetivo, sólo operacionalizar expresiones algebraicas. Al respecto Hoyles, Skovsmose, Kilpatrick, in collaboration with Valero (2005) afirman que no hay duda que una característica de las matemáticas ha sido el desarrollo de los cálculos que permitan la manipulación de símbolos "sin sentido".

Es común que, las tareas en el aula de clase estén direccionadas a la reproducción de procedimientos y transmisión de definiciones con algunas aplicaciones intra-matemáticas. Con lo cual, nos preocupa la desarticulación de los conceptos algebraicos con el entorno del estudiante, en tanto son escasos estos esfuerzos para el uso y la construcción de conceptos en contextos que motiven el estudiante al estudio de fenómenos de variación en el marco social, cultural y cotidiano. Al respecto, Sierpinska (1992) sustenta que los estudiantes deberían estar interesados en la variación y búsqueda de relaciones antes de ser expuestos a las definiciones y ejemplos.

En resumen, precisamos las siguientes problemáticas a partir de nuestra mirada como docentes investigadores:

- Las definiciones formales y la manipulación de símbolos sin sentido predominan las actividades escolares en matemáticas. Y además en las expresiones algebraicas lineales predomina un abordaje estático y sin relación a un contexto de interés para el estudiante.
- La forma de llevar al aula algunos problemas simulados o artificiales despersonalizan la actividad del estudiante, dado que los conceptos algebraicos se presentan desarticulados con la vida fuera de la escuela.

Tanto desde la literatura producida en el campo del álgebra escolar como desde nuestra experiencia docente, quisimos desarrollar una propuesta que considere, en la construcción de nociones matemáticas, diferentes contextos que permitan establecer conexiones entre las matemáticas escolares, otras disciplinas y la misma cotidianidad. En ese sentido, la literatura ha mostrado que es la modelación matemática uno de los caminos más apropiados para cumplir con este fin. Por lo tanto, formulamos la siguiente pregunta abordada en nuestra investigación:

¿De qué manera un proceso de modelación matemática permite a estudiantes del grado once, construir relaciones lineales entre dos variables mediante situaciones en contexto reales?

De esta pregunta de investigación, focalizamos la atención en el siguiente propósito y eje de estudio.

Objetivo. Caracterizar un proceso de construcción de relaciones entre variables mediante situaciones de modelación matemática con estudiantes del grado once.

Objeto de investigación. Un proceso de construcción de relaciones entre dos variables mediante situaciones de modelación en contextos reales.

2. Marco teórico: Modelación Matemática, modelo y contexto realístico

Conforme mencionamos anteriormente, la modelación matemática y las aplicaciones se han consolidado como un dominio de investigación al interior de la Educación Matemática. Sin embargo, como plantean Kaiser y Sriraman (2006) no existe una comprensión homogénea sobre lo que significa la modelación matemática, ni de las maneras como puede implementarse y desarrollarse. Estos autores y posteriormente Kaiser y Schwarz (2010) han presentado una diversidad de perspectivas frente a la modelación matemática, las cuales tienen su fundamento en perspectivas más amplias de la Educación Matemática (i.e., perspectiva realística de la Educación Matemática). Bajo este panorama, encontramos necesario presentar y discutir, de manera explícita, algunas maneras de concebir la modelación matemática y de otros términos asociadas a ellas.

Teniendo en cuenta que, esta investigación pretende indagar por la manera cómo los estudiantes establecen relaciones lineales entre variables involucradas en situaciones propias de sus contextos, quisimos presentar una de las interpretaciones que sobre modelación matemática, ha sido construida en el seno del Grupo de Investigación en Educación Matemática e Historia (UdeA-Eafit). Por lo tanto, asumimos la modelación matemática escolar como:

[...] el proceso de estudio de fenómenos o situaciones que pueden surgir tanto desde los contextos cotidianos, sociales y culturales de los estudiantes como de otras ciencias o disciplinas académicas. Dicho proceso de estudio involucra el uso y la construcción de modelos y otras herramientas matemáticas con las cuales puede ofrecerse una comprensión del fenómeno y resolver el problema (Villa-Ochoa J. A., 2010).

Esta interpretación del proceso de modelación parece escapar a las discusiones presentadas en otras interpretaciones que hacen uso de términos como “realidad” o “representación” para describir dicho proceso (Araújo, 2007, 2009).

Con base en las anteriores consideraciones, resaltamos que, la modelación matemática, integra diversas relaciones dinámicas, las cuales se exteriorizan en prácticas, actividades y procesos intencionados para la estructuración de conceptos, de acuerdo con la necesidad que otorgan los contextos reales de ser interpretados y comprendidos.

Ahora bien, la implementación de la modelación en el aula de clase puede posibilitar la producción de modelos a través de la interpretación y matematización de problemas que surgen de contextos reales, lo que implica, el establecimiento de relaciones matemáticas a la luz de estos contextos. Así, la modelación, requiere de un proceso de construcción de conocimientos matemáticos representados en un modelo particular, el cual se valida cuando describe la situación real a la que pertenece.

Una parte del proceso de modelación, se encuentra en la construcción de modelos matemáticos. Esta construcción se realiza partiendo de fenómenos o situaciones particulares de contextos como los mencionados en el apartado anterior. Blum et al. (2007) llaman al conjunto de estos contextos como “mundo extra-matemático” o “mundo real” que se encuentra en una esfera distinta a la de las matemáticas.

En coherencia con nuestra anterior postura respecto a la modelación como proceso, asumiremos Modelo Matemático como “Un conjunto de símbolos y relaciones matemáticas para explicar, predecir y solucionar algunos aspectos de un fenómeno o situación”. (Villa-Ochoa et al. 2009a)

La razón de construir Modelos Matemáticos basados en relaciones simbólicas radica en que estos puedan ajustarse a una situación de un contexto real. Por lo tanto, los modelos de relaciones lineales entre dos variables se construyen desde una dinámica de modelación, cuyo eje inicial compromete a diversas situaciones en contextos de variación. De este modo, los modelos no son dados a priori por el profesor, éstos son construidos por el estudiante según su modo de relacionarse con la situación. Así, cobra relevancia el proceso como tal y no sólo el resultado matemático.

Por su parte Villa-Ochoa, Bustamante y Berrío (2010) asumen como punto de partida para el proceso de modelación matemática “a un conjunto de situaciones asociadas a los contextos cotidianos, sociales y culturales de los estudiantes y de la escuela” (p. 1089), a las cuales denominan situaciones reales. Con esta denominación, estos autores solo delimitan el punto de partida del proceso de modelación basados en las funciones sociales de las matemáticas escolares, sin que ello agote la noción de realidad. En ese sentido, los autores puntualizan que una noción de realidad como “un sistema compuesto por fenómenos o hechos que pueden observarse desde múltiples dimensiones.” (p. 1089)

Según Blum et al. (2007) la expresión “mundo real” es concebida como todo lo que tiene que ver con naturaleza, sociedad, cultura, incluyendo la vida cotidiana, como también las asignaturas de la escuela y la universidad o las disciplinas científicas diferentes de las matemáticas. De manera particular, desde la modelación entendemos los contextos reales como:

[...] aquellos contextos cotidianos, sociales, culturales, de consumo o de otras ciencias; en los cuales los estudiantes se ven enfrentados a la identificación y manipulación de datos, y a la simplificación y abstracción de cantidades y variables con miras a la construcción del modelo para su resolución. (Villa-Ochoa J. A. et al. 2009b)

Desde esta postura, los contextos no sólo son asumidos desde otras ciencias, sino que, incorporan, lo que comúnmente se podría excluir de las matemáticas, como lo son las prácticas de una comunidad que identifican una cultura propia. En estas prácticas hay de fondo elementos matemáticos, que deberían ser potenciales para la construcción de saberes y significados en las aulas de clase.

La modelación matemática vista como un proceso que relaciona la realidad con las matemáticas puede ser direccionada desde otras ciencias, desde los diferentes contextos que rodean los estudiantes, e incluso, se vienen gestando algunas perspectivas que pretenden incluir los contextos al interior de las matemáticas mismas (Bosch, García, Gascón y Ruiz, 2006a; García, Gascón, Ruiz y Bosch, 2006). Dado que en esta investigación pretendemos acercarnos al estudiante por medio de sus experiencias y los contextos propios de su cotidianidad, encontramos en la *perspectiva realística* varios elementos de gran utilidad para tal propósito. Desde la perspectiva realística, se propone que la modelación debe ser entendida como una actividad para solucionar problemas auténticos y no como desarrollo de la teoría matemática (Kaiser y Sriraman, 2006).

3. Diseño metodológico

Nuestra investigación se realizó bajo el enfoque cualitativo mediante un estudio de casos, puesto que pretendimos caracterizar una manera de modelar relaciones lineales entre dos variables en el momento en que los estudiantes resuelven situaciones en contexto. Esta caracterización nos implicó procesos de descripción, observación, reflexión y análisis sobre las interacciones, experiencias, formas de expresión matemática y acciones grupales e individuales que influenciaron el proceso desarrollado por el grupo de participantes.

La investigación se desarrolló con nueve estudiantes del grado once, quienes construyeron con las investigadoras una relación basada en diálogos, compartir de experiencias,

discusiones en los cuales los estudiantes participaban con confianza y apropiación. Aspectos que son relevantes dentro del proceso mismo de construcción de modelos en situaciones de la vida cotidiana.

El estudio de casos abordado se fundamentó desde la perspectiva de Hays (2004), quien lo centra en examinar, buscar y explorar las nuevas experiencias e interacciones que no han sido comprendidas por las personas, desde una pregunta que focaliza el análisis del investigador. Además este tipo de estudio permite la producción de descripciones e interpretaciones en forma única y reflexiva en un corto período de tiempo. Desde esta mirada, focalizamos este estudio en la caracterización particular y no general, de diversas maneras de relacionar dos variables en el proceso de modelación. Desde la perspectiva de Hays (2004), en la caracterización desarrollada en el estudio predomina su carácter único, por corresponder a procesos propios dependientes de los rasgos de un grupo específico y de los contextos a los que se enfrentaron.

El trabajo de campo de esta investigación se desarrolló en seis momentos durante once sesiones durante un semestre que corresponden a diferentes actividades relacionadas con el proceso de modelación. La información la recolectamos a través de tres fuentes: 10 observaciones directas (grupal), 3 entrevistas semi-estructuradas (grupal) y 5 documentos escritos (individual). Luego realizamos un proceso de categorización emergente y de triangulación de la información.

4. Análisis de datos y conclusiones

La modelación matemática puede verse a partir de diferentes perspectivas y propósitos, nuestro estudio desde una perspectiva realística contribuye a la idea de ocuparse inicialmente de la significación de las nociones matemáticas partiendo de situaciones y problemas en contextos auténticos, propiciando la construcción de modelos con sentido para el estudiante. Luego de esta significación, estas nociones podrían ser trabajadas de manera formal.

El proceso de modelación que se desarrolló en esta investigación evidenció cierto grado de libertad con respecto a las matemáticas que los estudiantes requieren para describir el fenómeno en cuestión. En este sentido, los procedimientos matemáticos para la creación de modelos son usados en función de la situación y no la situación es usada en función de los conceptos matemáticos. Es decir, los conceptos matemáticos que puedan ayudar a producir el modelo matemático no podrán ser forzados a su uso en forma a priori, éstos van resurgiendo y son requeridos durante el proceso. Así que, es posible que estos procedimientos implementados para la construcción de conocimientos escolares pueden aportar a la articulación en red de diferentes nociones numéricas, estadísticas, variacionales, algebraicas, las cuales comúnmente suelen ser separadas y segmentadas.

El modelo se constituye inicialmente de manera retórica, por ser la descripción del contexto su fuente de producción, sin embargo la necesidad de legitimar los argumentos que solucionan el problema conllevan a establecer relaciones matemáticas de naturaleza simbólica, gráfica y tabular. La idea de modelo matemático entonces integra, no sólo la simbolización de una relación entre dos variables, sino también las diferentes representaciones, que en conjunto aportan a una forma de describir una situación particular.

Las expresiones algebraicas por sí solas, aisladas de todo contexto no tienen sentido para el estudiante, observadas como modelos que se construyen en el proceso experimental, conlleva a los estudiantes a realizar una correspondencia con sentido entre el mundo cotidiano y las matemáticas, es decir, las nociones matemáticas son producto de las deducciones, análisis y decisiones que parten de un contexto auténtico y comprensible para el estudiante. Como lo observamos a continuación en dos modelos producidos por los participantes respecto al ahorro y los gastos en el contexto del transporte.

$A = (V_p - V_e)t$ <p> $A =$ Ahorro $V_p =$ Valor pasaje $V_e =$ " " " " estudiantil $t =$ # viajes </p>	$G_T = \# \text{días} \times V_T$ $G_S = \# \text{días} \times V_p$ $A = G_S - G_T$	$G_T =$ Gastos tiquete estudiantil $G_S =$ Gastos sencillo $A =$ Ahorro $V_T =$ Valor Tiquete Estudiantil $V_p =$ Valor Pasaje
---	---	--

Ilustración 1. Modelos propuestos por Jacobson y Lindsay.

Desde las ideas presentadas anteriormente, los modelos que emergen de los contextos explorados directamente por los estudiantes, deben converger en una abstracción y representación simbólica que surge de las diversas formas de matematización individual y grupal.

En resumen, para responder a la pregunta: *¿De qué manera un proceso de modelación matemática permite a estudiantes del grado once, construir relaciones lineales entre dos variables mediante situaciones en contexto reales?* Sintetizamos en cuanto a la influencia del contexto realístico en el proceso de modelación matemática y la construcción de relaciones entre dos variables las siguientes caracterizaciones:

- Articulación de diversos escenarios auténticos con las nociones matemáticas.
- Empoderamiento del estudiante sobre el contexto desde sus experiencias cotidianas.
- Desencadenamiento de estrategias de discusión, críticas y reflexiones en la búsqueda de consensos.

- El contexto como agente motivador en la exploración e implementación de procesos alternativos en la enseñanza y aprendizaje de las nociones matemáticas.
- (Re) significación del uso de la letra en las expresiones algebraicas en contextos particulares.
- Participación directa sobre el fenómeno e interpretaciones a través de diferentes representaciones.
- Producción de modelos retóricos y simbólicos en el desarrollo del proceso de modelación.
- Identificación de variables y sus relaciones mediante los análisis de los fenómenos auténticos de cambio en el proceso de simplificación grupal e individual.
- Descripción de las relaciones entre el contexto mediante cantidades de magnitud.
- Refinamiento del problema en contexto en correspondencia con la evolución de las nociones matemáticas en la construcción del modelo.

Abordar situaciones contextualizadas, como punto de partida en la enseñanza, posibilitaría el desarrollo de capacidades de interpretación y matematización en los estudiantes de forma natural, en cuanto que el carácter cotidiano y la naturaleza práctica de las situaciones hacen parte del modo de vida y de las actividades habituales de las sociedades. Por otra parte, cuando se crean necesidades en los estudiantes relacionadas con la vida fuera de la escuela, los conceptos algebraicos y las herramientas matemáticas entran a jugar un papel de producción diferente si no existiese el interés o la necesidad de resolver un problema.

Referencias bibliográficas

- Araújo, J. L. (2007). Relação entre matemática e realidade em algumas perspectivas de Modelagem Matemática na Educação Matemática. En J. Barbosa, A. Caldeira, & J. Araújo (Edits.), *Modelagem Matemática na Educação Matemática Brasileira: pesquisas e práticas educacionais* (págs. 17-32). Recife: SBEM.
- Araújo, J. L. (2009). Uma Abordagem Sócio-Crítica da Modelagem Matemática: a perspectiva da educação matemática crítica. *ALEXANDRIA Revista de Educação em Ciência e Tecnologia*, 2 (2), 55-68.
- Blum, W., Galbraith, P., Henn, H., & Niss, M. (Edits.). (2007). *Modelling and applications in mathematics education. The 14th ICMI Study*. New York: Springer.
- Blum, W., Leiss, D., Schukajlow, S., Messner, R., & Pekrun, R. (2010). The Role of the Situation Model in Mathematical Modelling—Task Analyses, Student Competencies, and Teacher Interventions. *J Math Didakt*, 31, 119–141.
- Bosch, M., García, F., Gascón, J., & Ruiz, L. (2006a). La modelización matemática y el problema de la articulación de la matemática escolar. Una propuesta desde la teoría antropológica de lo didáctico. *Educación Matemática*, 18 (2), 37-74.
- Hays, P. (2004). Case study research. . En *Foundations for research: Methods of inquiry in education and the social sciences* (págs. 217-234). Mahwah, NJ: LEA.

- Hoyles, C., Skovsmose, O., Kilpatrick, J., & en colaboración con Valero, P. (2005). Meaning in Mathematics Education. En C. Hoyles, O. Skovsmose, J. Kilpatrick, & P. Valero (Edits.), *Meaning in Mathematics Education* (Vol. 37, págs. 1-16). New York: Springer.
- Kaiser, G., & Schwarz, B. (2010). Authentic Modelling Problems in Mathematics Education—Examples and Experiences. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 31 (1), 51-76.
- Kaiser, G., & Sriraman, B. (2006). A global survey of international perspectives on modelling in mathematics education. *Zentralblatt für der Didaktik*, 38 (3), 302-310.
- Sierpiska, A. (1992). On Understanding The Notion of Function. En E. Dubinsky, & G. Harel (Edits.), *The concep of function: Some Aspects of Epistemology and Pedagogy* (C. Delgado G., Trad., Vol. 25, págs. 25-58). Washington, DC: MAA Notes. Mathematical Association of America .
- Villa-Ochoa, J. A. (2010). *Modelación Matemática en el aula de clase. Algunos elementos para su implementación*. Conferencia presentada en el primer seminario de Educación Matemática, Historia y Entomatemáticas, Universidad de Medellín, Medellín.
- Villa-Ochoa, J. A., Bustamante, C., & Berrio, M. (2010). Sentido de realidad en la modelación matemática. En P. Leston (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*. 23, págs. 1087-1096. México D.F: Colegio Mexicano de MATemática Educativa y Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.
- Villa-Ochoa, J. A., Bustamante, C., Berrio, M., Osorio, A., & Ocampo, D. (2009b). El proceso de modelación matemática. Una mirada a la práctica del docente. En P. Lestón (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*. 22, págs. 1443-1451. México: Colegio Mexicano de Matemática Educativa A. C.
- Villa-Ochoa, J. A., Bustamante, C., Berrío, M., Osorio, J., & Ocampo, D. (2009a). Sentido de Realidad y Modelación Matemática: el caso de Alberto. *ALEXANDRIA Revista de Educação em Ciência e Tecnologia*, 2 (2), 159-180.

**Volver al índice
Mesas Temáticas**