EMP Educação Matemática Pesquisa
ISSN 1983-3156
A2
http://dx.doi.org/10.23925/1983-3156.2021v23i1p591-612

Argumentos apresentados por estudantes de cálculo em uma tarefa de natureza exploratória

Arguments presented by students of calculus in an exploratory task

Argumentos presentados por estudiantes de cálculo en una tarea exploratória

André Luis Trevisan[1]
Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR)
https://orcid.org/0000-0001-8732-1912
Eliane Maria de Oliveira Araman[2]
Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR)
https://orcid.org/0000-0002-1808-2599

Resumo

A presente pesquisa tem como objetivo reconhecer conceitos matemáticos que foram utilizados por estudantes de Cálculo Diferencial e Integral na elaboração de argumentos, na resolução de uma tarefa de natureza exploratória envolvendo representações gráficas. Como referencial teórico, recorremos aos estudos relacionados ao raciocínio matemático e à argumentação, aos episódios de resolução de tarefas e à aprendizagem do conceito de função. A pesquisa segue princípios de uma investigação baseada em design. Para produção de dados, utilizamos gravações em áudio e a produção escrita dos estudantes no trabalho com a tarefa, além do diário de campo dos pesquisadores. Apoiados pelo arcabouço teórico, analisamos os argumentos apresentadas por quatro grupos de estudantes durante a discussão da tarefa. Como resultados, destacamos que os estudantes mobilizam alguns processos de raciocínio (identificar padrão, conjecturar, comparar e justificar) ao elaborarem a descrição do gráfico de funções, recorrendo, para tal, a conceitos matemáticos como (de)crescimento de função, variação da taxa de crescimento, concavidade de um gráfico e assíntota horizontal.

[1] andrelt@utfpr.edu.br.
[2] elianearaman@utfpr.edu.br.

Palavras-chave: Ensino de matemática. Ensino de cálculo diferencial e integral. Raciocínio matemático. Argumentação.

Abstract

This research aims to analyse arguments developed by students of the Differential and Integral Calculus subject of a public university in Paraná when solving an exploratory task. The theoretical framework is formed by studies related to mathematical reasoning and argumentation, episodes of solving tasks, and learning the concept of function. The research follows the principles of design research. The data were audio recordings and the written production of students working on the task, and the researchers' field diary. Supported by the theoretical framework, we analysed the arguments presented by four groups of students during the discussion of the task. The result show that students mobilise some reasoning processes (identify pattern, conjecture, compare, and justify) when elaborating the function graph description, using mathematical concepts such as function growth and decrease, rate variation of growth, concavity of a graph, and horizontal asymptote.

Keywords: Mathematics teaching. Teaching Differential and Integral Calculus. Mathematical reasoning. Argumentation.

Resumen

Esta investigación tiene como objetivo analizar los argumentos desarrollados por estudiantes de la asignatura Cálculo Diferencial e Integral de una universidad pública de Paraná al momento de resolver una tarea exploratoria. El marco teórico está formado por estudios relacionados con el razonamiento y la argumentación matemática, episodios de resolución de tareas y aprendizaje del concepto de función. La investigación sigue los principios de la investigación basada en diseño. Los datos fueron grabaciones de audio y la producción escrita de los estudiantes trabajando en la tarea y el diario de campo de los investigadores. Apoyados en el marco teórico, analizamos los argumentos presentados por cuatro grupos de estudiantes durante la discusión de la tarea. El resultado muestra que los estudiantes movilizan algunos procesos de razonamiento (identificar patrón, conjeturar, comparar y justificar) al elaborar la descripción del gráfico de funciones, utilizando conceptos matemáticos como crecimiento y disminución de funciones, tasa de variación de crecimiento, concavidad de una gráfica y asíntota horizontal.

Palabras clave: Enseñanza de las matemáticas. Enseñanza del cálculo diferencial e integral. Razonamiento matemático. Argumentación.

Argumentos Apresentados por Estudantes de Cálculo em uma Tarefa de Natureza Exploratória

O desenvolvimento do raciocínio matemático, associado à elaboração e à compreensão de conceitos, tem-se mostrado necessário enquanto demanda atual do processo de escolarização, como também um desafio frente às práticas tradicionais usuais (Ponte, Mata-Pereira & Henriques, 2012; Mata-Pereira & Ponte, 2018). Esse é um tema de interesse de pesquisa no âmbito da Educação Matemática, com linhas de investigação e estudos centrados na sala de aula, que procuram encontrar formas de apoiar os estudantes na argumentação e demonstração (Lannin, Ellis & Elliot, 2011; Jeannotte & Kieran, 2017).

Assumindo a importância de o estudante exercer um papel ativo para a elaboração do raciocínio, temos investigado, no âmbito da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral (CDI), uma proposta de trabalho com episódios de resolução de tarefas, que se configura como uma opção à aula "usual" de CDI, tanto em seus aspectos metodológicos (Couto, Fonseca & Trevisan, 2017; Trevisan & Mendes, 2018) quanto em sua organização curricular (Trevisan & Mendes, 2017). Nestes estudos, desenvolvemos tarefas de natureza exploratória que possibilitam aos estudantes explorar intuitivamente e organizar matematicamente situações que requerem a mobilização de diferentes conceitos (Ponte, 2005, 2014; Stein & Smith, 2009).

No intuito de compreender processos do raciocínio matemático no trabalho com episódios de resolução de tarefas de em aulas de CDI, neste artigo objetivamos *reconhecer conceitos matemáticos que foram utilizados por estudantes na elaboração de argumentos, na resolução de uma tarefa de natureza exploratória envolvendo representações gráficas*. Tal tarefa, que vai além da simples aplicação de fórmulas ou algoritmos, envolve a descrição do gráfico de duas funções que diferem quanto às taxas de crescimento, e cujos valores, em alguns pontos, são apresentados em uma tabela.

No intuito de alcançar esse objetivo, e assumindo que raciocinar matematicamente implica, assim, "fazer inferências justificadas", utilizando "informação matemática já conhecida para obter, justificadamente, novas conclusões" (Mata-Pereira & Ponte, 2018, p. 782) lançando mão, para tal, de diferentes processos, como a busca por semelhanças e diferentes entre situações, a argumentação, a justificativa e a validação (Jeannotte & Kieran, 2017), buscamos reconhecer conceitos do CDI ao qual os estudantes recorreram ao elaborar argumentos e justificativas, e compreender os processos de raciocínio que mobilizam ao resolverem essa tarefa de natureza exploratória.

O artigo está assim organizado: nas duas próximas seções, apresentamos o referencial teórico adotado, incluindo estudos acerca do raciocínio matemático e da argumentação, dos episódios de resolução de tarefas em aulas de CDI e da aprendizagem do conceito de função; na continuidade, apresentamos o contexto em que o estudo foi realizado e os procedimentos metodológicos assumidos. A seguir, apoiados pelo arcabouço teórico, analisamos os argumentos apresentadas por quatro grupos de estudantes durante a discussão da tarefa. Por fim, discutimos os resultados e tecemos algumas considerações, destacando conceitos e processos de raciocínio que os estudantes mobilizam ao elaborarem a descrição do gráfico de funções.

Raciocínio matemático e argumentação

Muitos estudos destacam o desenvolvimento do raciocínio como elemento de extrema importância nas aulas de Matemática. Mata-Pereira e Ponte (2018, p. 782), por exemplo, dizem que esse "é um dos grandes objetivos da matemática escolar". Jeannotte e Kieran (2017) citam vários documentos curriculares ao redor do mundo que destacam o desenvolvimento do raciocínio matemático por parte dos estudantes como um importante objetivo do processo de escolarização. Esse desenvolvimento, porém, não se dá pela memorização de conceitos, de representações ou de procedimentos rotineiros, mas a partir do trabalho com tarefas que requeiram e estimulem esse raciocínio, promovendo uma efetiva compreensão de conceitos. Essa compreensão envolve não apenas o conhecimento de uma definição, mas a percepção da conexão entre conceitos e de sua utilização para resolver problemas (Ponte, Mata-Pereira & Henriques, 2012).

Com relação à definição de raciocínio matemático, encontramos em Jeannotte e Kieran (2017, p. 7) o "raciocínio matemático como um processo de comunicação com outros ou consigo mesmo que permite inferir enunciados matemáticos a partir de outros enunciados matemáticos". Para Morais, Serrazina e Ponte (2018, p. 555), o raciocínio matemático é "um conjunto de processos pelos quais novo conhecimento é obtido a partir de conhecimentos prévios". De modo semelhante, Mata-Pereira e Ponte (2018, p. 783) entendem que "raciocinar matematicamente consiste em fazer inferências justificadas, ou seja, utilizar informação matemática já conhecida para obter, justificadamente, novas conclusões". Mata-Pereira e Ponte (2017, p. 2) destacam ainda que o raciocínio matemático consiste em "fazer inferências justificadas [cujos] processos incluem formular questões e estratégias de resolução, formular e testar generalizações e outras conjecturas, e justificá-las".

No que tange à promoção do raciocínio em aulas de Matemática, Ponte e Quaresma (2016) destacam que as tarefas propostas aos estudantes proporcionam situações frutíferas para aprender e relacionar representações matemáticas e discutir sua adequação em uma determinada situação, desenvolver novos conceitos, conexões e procedimentos matemáticos. Autores como Ellis (2011) e Ponte, Mata-Pereira e Henriques (2012) destacam os momentos de discussões coletivas envolvendo estudantes e/ou professor e estudantes, como potencializadores da argumentação, por meio da formulação e validação de conjecturas e elaboração de justificativas.

Jeanotte e Kieran (2017) discutem, no âmbito dos aspectos processuais do raciocínio matemático, aqueles relacionados com a busca por similaridades e diferenças entre situações (como conjecturar, comparar, validar e generalizar), e outros relacionados com a validação. Esse segundo conjunto de processos implica em uma mudança no valor epistêmico de uma narrativa matemática, sendo incluídas as justificativas, a prova e a prova formal. Apesar da relevância de todos esses processos no desenvolvimento do raciocínio matemático dos alunos, destacamos, de forma especial, a elaboração de justificativas que se relaciona à explicação de uma conjectura inicialmente elaborada, apresentando motivos (argumentos) para alterar o valor epistêmico primeiramente de “provável para mais provável”, e em seguida para verdadeiro ou falso.

Para Mata-Pereira e Ponte (2017) consideram que as justificativas devem lidar com conceitos, propriedades e ideias matemáticas previamente aceitas. Segundo Lo, Grant e Flowers (2008), o propósito de uma justificativa é fornecer um argumento convincente sobre a validade de determinado método. Por sua vez, Araman, Serrazina e Ponte (2019) afirmam que justificar está relacionado com “a identificação de relações que permitem entender por que uma afirmação pode ser verdadeira ou falsa” (p. 468).

Respaldados nos autores supracitados, assumimos neste trabalho o processo de justificar como intimamente relacionado ao “investigar o porquê” e à elaboração de argumentos pelos estudantes “para se convencerem a si próprios e aos outros porque é que uma afirmação particular é verdadeira” (Lannin, Ellis & Elliot, 2011, p. 35).

O trabalho com episódios de resolução de tarefas em aulas de CDI

O trabalho com tarefas (Ponte, 2005, 2014; Stein & Smith, 2009) oferece oportunidades aos estudantes para elaborar conceitos matemáticos, não “apenas por memorização e associação de palavras, mas pelo surgimento de um problema como ponto de partida de uma proposição, de uma atividade inquisidora ao sujeito da experiência” (Laudares, 2013, p. 4). Nessa direção, o desenvolvimento dos diferentes processos de raciocínio matemático e “o trabalho com conceitos requer a criação de um espaço de trabalho pela ‘atividade’, mobilizando os estudantes para ação, substituindo a passividade da pedagogia tradicional da aula verticalizada do vetor professor → aluno” (Laudares, 2013, p. 5).

No âmbito da Matemática, o termo “tarefa” usualmente refere-se aos exercícios, problemas, investigações e explorações aos projetos em que os estudantes se envolvem e que lhes fornecem os contextos necessários para o desenvolvimento do raciocínio matemático (Ponte, 2005; Mata-Pereira & Ponte, 2018). Ponte (2014, p.16), destaca que uma tarefa “pode ter ou não potencialidades em termos de conceitos e processos matemáticos, que pode ajudar a mobilizar”, dando “lugar a atividades diversas, conforme o modo como for proposta, a forma de organização do trabalho dos estudantes, o ambiente de aprendizagem, e a sua própria capacidade e experiência anterior” (p. 17).

O trabalho com tarefas em aulas de Matemática toma como pressuposto que o conhecimento matemático é dinâmico e elaborado por meio de relações, justificativas, análise e validações estabelecidas pelos estudantes, e não como um conjunto “pronto e acabado” (Freudenthal, 1973) de conceitos e técnicas. Os estudantes devem ser incentivados a justificar seus pensamentos por meio da exploração de situações, organizando argumentos e elaborando justificativas.

No âmbito do CDI, temos investigado tarefas com potencial para abordar conceitos e procedimentos desenvolvidos no âmbito de ambientes de ensino e aprendizagem em condições reais de ensino (Couto, Fonseca & Trevisan, 2017; Trevisan & Mendes, 2017, 2018). Tal proposta vai de encontro às práticas usualmente presentes nas aulas do Ensino Superior, “pautadas em um rigor imposto pela apresentação dos conceitos e pela resolução de listas de exercícios, ‘[...] de caráter puramente algébrico e mecânico, sem levar em conta o significado de tais conceitos’ (Richit, 2010, p. 27)” (Ribeiro & Paulin, 2020, p. 70).

Organizamos nosso ambiente de ensino e de aprendizagem em episódios (momentos) de resolução de tarefas em que, antes da apresentação de uma definição formal, os estudantes são convidados a explorar ideias matemáticas de forma intuitiva, e suas estratégias são tomadas como ponto de partida para a sistematização de conceitos, possibilitando que os estudantes se reconheçam como autônomos e responsáveis por sua aprendizagem (Trevisan & Mendes, 2018). Evidenciamos potencialidades do trabalho colaborativo em tarefas desenvolvidas tanto ambientes presenciais quanto virtuais de CDI, analisando tarefas desenvolvidas por estudantes trabalhando em grupos (Borssoi, Trevisan & Elias, 2017), destacando que o Ambiente Virtual de Ensino e Aprendizagem e, em particular, a ferramenta *wiki* associada a uma tarefa de natureza exploratória, mostrou-se um ambiente propício para o compartilhamento de ideias, bem como para a interação dos alunos e destes com o docente.

Apesar dos resultados promissores do trabalho com episódios de resolução de tarefas em salas de aulas regulares de CDI, pouco ainda sabemos a respeito do desenvolvimento do raciocínio matemático dos estudantes nesse tipo de trabalho, de modo que o presente artigo procura trazer contribuições nesse sentido.

Aspectos relacionados à aprendizagem do conceito de função

O estudo de funções é um tema central no desenvolvimento histórico da Matemática enquanto ciência, e está presente tanto nos currículos de Matemática da Educação Básica quanto em disciplinas de CDI. Para Garcia (2009, p. 46), o conceito de função "é primário (depende apenas das noções intuitivas de relação, univocidade e conjunto), central, estruturante (participa e está nos fundamentos de todas as áreas) e articulador (espécie de elo conectando a Matemática internamente e a Matemática com as outras ciências)",

É fundamental que, nos processos de ensino e de aprendizagem, os estudantes trabalhem com os diferentes significados atribuídos a esse conceito, por meio do uso de suas diferentes representações (verbal, numérica, gráfica e algébrica), com "o potencial de fazer com que o processo de aprendizagem da Álgebra, em particular das Funções, seja significativo e efectivo" (Gafanhoto & Canavarro, 2011, p. 5). Bisognin, Bisognin e Cury (2010) destacam, entretanto, uma predominância da representação algébrica, juntamente com a dificuldade dos estudantes em articulá-la com outras representações (linguagem natural, tabular e gráfica).

Mestre (2014, p. 71) aponta que a racionar a respeito de uma função envolve “prestar atenção às quantidades que variam e [...] focar-se na relação entre essas quantidades”. A autora destaca duas formas de abordagem de relações no conceito de função: a covariação entre quantidades (análise coordenada das variações de duas grandezas interdependentes) e a correspondência entre quantidades. Raciocinar covariacionalmente implica na “capacidade de analisar, de maneira coordenada, as mudanças que ocorrem em duas variáveis interdependentes” (Orfali, 2017, p. 27), ou ainda conceber “duas quantidades que variam simultaneamente, de modo que existe uma relação invariante entre seus valores que tem a propriedade de que, na concepção da pessoa, cada valor de uma quantidade determina exatamente um valor do outro” (Thompson & Carlson, 2017, p. 144).

Uma perspectiva de covariação na construção de relações quantitativas pode subsidiar uma concepção de função mais flexível, baseada em ideias como variação, aproximação e proporcionalidade, fundamentais à compreensão de conceitos do CDI. Para Frank (2017), a promoção do raciocínio covariacional envolve o desenvolvimento das seguintes habilidades: (i) constituir quantidades envolvidas na situação (reconhecer atributos de uma situação passíveis de medição); (ii) raciocinar sobre o processo de medição dessas quantidades; (iii) imaginar medidas de quantidades variando continuamente; (iv) coordenar duas quantidades que variam juntas, reconhecendo: quais quantidades se relacionam, a direção de (de)crescimento, a existência de taxas de variação e eventuais mudanças na taxa de crescimento.

Procedimentos metodológicos

A investigação que deu origem a este artigo assume uma perspectiva qualitativa de cunho interpretativo (Bogdan & Biklen, 1994), com princípios de uma Investigação Baseada em Design (Ponte et al., 2016). O desenho de uma experiência de ensino organizada a partir do trabalho com as tarefas em aulas de CDI contemplou o desenvolvimento de ciclos de planejamento e de aplicação dessas tarefas, e a investigação sobre tais processos em salas de aulas regulares. Assim, a tarefa aqui apresentada já havia sido redesenhada e reaplicada a partir de evidências coletadas em turmas anteriores, a partir de um processo cíclico envolvendo reflexões para o aprimoramento de seu enunciado (Ramos, Trevisan & Mendes, 2019).

Os participantes da pesquisa foram estudantes de cursos superiores de Engenharia de uma universidade federal do estado do Paraná, que cursaram a disciplina CDI 1 no segundo semestre de 2017, sob responsabilidade do primeiro autor. A tarefa selecionada tem natureza exploratória (Ponte, 2005) – Figura 1, e os 30 estudantes da turma estavam organizados em grupos com três ou quatro integrantes para sua resolução. Em um primeiro momento, os grupos trabalharam de forma autônoma, sem intervenção do professor (nosso foco de análise neste artigo); na continuidade, houve uma discussão coletiva, mediada pela professora partir das resoluções dos estudantes, havendo a sistematização de conceitos associados à representação gráfica de funções de uma variável real, como por exemplo variáveis dependente e independente, domínio, imagem, escala, (de)crescimento e concavidade.

Assim, a tarefa em análise (juntamente com outras, que foram propostas logo no início do curso, momento de "retomada" do conceito de função) buscou mobilizar nos estudantes a capacidade de analisar, de maneira coordenada, as mudanças que ocorrem em duas variáveis interdependentes, articulando diferentes representações e utilizando informalmente os conceitos acima listados.

Ao solicitar que os estudantes descrevessem o gráfico a uma pessoa que não o esteja vendo, nosso objetivo foi reconhecer conceitos que seriam mobilizados na elaboração dessa descrição, e os argumentos por eles apresentados para elaborá-la. Embora ambas as funções presentes na tarefa sejam crescentes, $f(x)$ cresce a uma taxa decrescente (sendo, portanto, seu gráfico côncavo para baixo – Figura 2a), enquanto $g(x)$ cresce a uma taxa crescente (com gráfico côncavo para cima – Figura 2b).

Figura 1.

Tarefa exploratória (Dados da pesquisa, 2017)

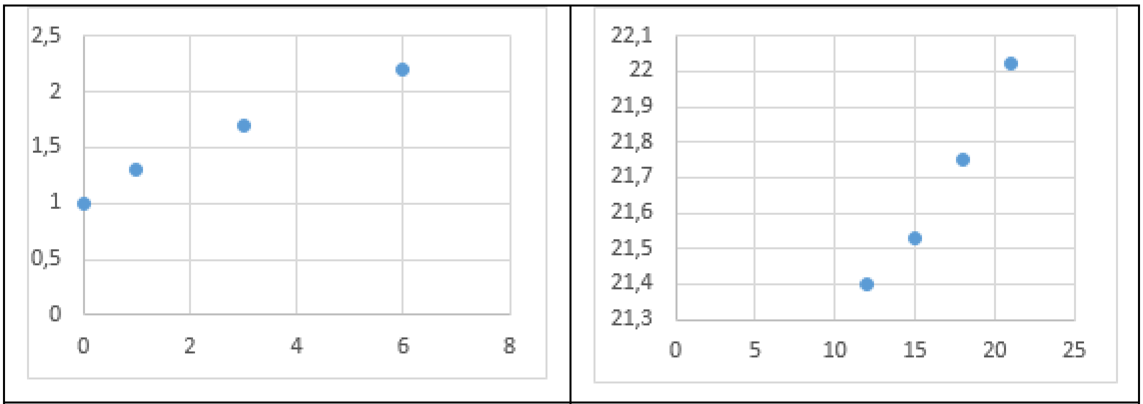
Como você descreveria a uma pessoa que não esteja vendo o gráfico de cada uma das funções descritas por meio das tabelas abaixo?

x	0	1	3	6
$f(x)$	1	1,3	1,7	2,2

x	12	15	18	21
$h(x)$	21,40	21,53	21,75	22,02

Figura 2.

Gráficos $f(x)$ e $g(x)$, respectivamente



(a) (b)

Para produção de dados utilizamos gravações em áudio e a produção escrita dos estudantes no trabalho com essa tarefa, além do diário de campo dos pesquisadores. Todos os 8 grupos presentes naquele encontro e que resolveram a tarefa foram capazes de mobilizar diferentes conceitos na elaboração da descrição do gráfico processos de raciocínio, estabelecendo algum tipo de conjectura e buscando elementos para validá-la ou refutá-la. Entretanto, em diversos desses grupos as falas foram monopolizadas por apenas um estudante, com uma discussão bastante sucinta, sem que conjecturas fossem confrontadas pelos demais integrantes do grupo e fossem reformuladas. Assim, na intenção de reconhecer uma maior variedade de processos de raciocínio que foram mobilizados, bem como evidenciar o papel das tarefas escolhidas e das discussões matemáticas nesse contexto, tomou-se por critério para escolha dos grupos aqueles na qual houve um maior envolvimento dos estudantes na "apresentação, justificação, argumentação e negociação de significados" (Rodrigues, Menezes & Ponte, 2018, p. 399)

Em especial, trazemos aqui recortes da narrativa apresentada pelos integrantes (A1, A2, ...) de quatro grupos (G1 a G4) como síntese da discussão realizada entre eles. Nosso objetivo, ao analisar essas narrativas, é investigar os argumentos elaborados pelos estudantes ao descreverem o gráfico de cada uma das funções. Em especial, inspirados em Frank (2017), procuramos evidenciar, nos argumentos apresentados pelos estudantes, a habilidade de analisar duas quantidades que variam juntas, reconhecendo (ou não) dos seguintes aspectos: (a) a direção de (de)crescimento; (b) a existência de taxas de variação diferentes entre os valores da tabela para as duas funções; (c) a relação entre essa taxa de variação e a concavidade do gráfico das funções; (d) a existência de assíntota horizontal no gráfico de $f(x)$.

Apresentação dos dados

Os dados estão apresentados na sequência por ordem dos grupos. Primeiro apresentamos a narrativa que sintetiza as discussões realizadas por G1, em seguida pelo grupo G2 e assim sucessivamente.

Grupo 1 (G1):

> **A1:** Aqui [o gráfico de $f(x)$] é uma curva crescente que se estabiliza em um valor de y, ou seja [tem um] limite horizontal, ele vai ter um valor aqui que vai se estabilizar... Aí no segundo gráfico a gente colocou que é uma curva crescente dentro dos valores tabelados.
>
> **A2:** É desconhecido como a função $g(x)$ se comporta quando x tende a infinito porque a gente não sabe se ela vai continuar assim, se vai ser infinito mesmo ou se vai [estabilizar – ideia sugerida pelo movimento das mãos]... Assim, quando ela continua crescendo sem ser pra finito, né!? Mas daí não sabe se vai para o infinito, se é um pico aqui... tipo quando se tem uma assíntota vertical e depois desse valor ela começa, sabe? (Diálogo entre integrantes do grupo 1, 2017).

A fala de A1 evidencia que o grupo reconhece a direção de crescimento de ambas as funções (é uma curva crescente), bem como a existência de assíntota horizontal no gráfico de $f(x)$ ("se estabiliza em um valor de y, ou seja [tem um] limite horizontal, ele vai ter um valor aqui que vai se estabilizar").

A2, por sua vez, elabora uma conjectura ao enfatizar que nada se pode afirmar sobre o comportamento infinito de $g(x)$ pois, segundo ele, não se sabe se "ela continua crescendo" ou se em algum momento seu gráfico terá um ponto crítico (um pico). Ao apontar que não se sabe se "ela continua crescendo sem ser pra finito", o estudante possivelmente está se referindo a uma mudança na concavidade do gráfico de $g(x)$. Implicitamente, tal conjectura evidencia que ele compreende que, para a formação de uma assíntota horizontal, é necessário algum tipo de mudança no padrão de crescimento dos valores da função. No entanto, apesar de ele não validar essa conjectura, sua fala apresenta elementos que permitem essa afirmação.

Grupo 2 (G2):

No caso de G2, o reconhecimento de existência de taxas de variação diferentes entre os valores das tabelas que representam as duas funções fica evidenciado em sua fala, conforme transcrição a seguir.

> **A1:** A gente explicou as características do gráfico como uma representação, para ele entender como fica no desenho. E aí a gente explicou que um tem o crescimento mais rápido que o outro.
> **A2:** O primeiro cresce mais lento e o segundo é mais rápido e o que vai mudar é só essa inclinação da reta. (Diálogo entre integrantes do grupo 2, 2017).

Os argumentos apresentados por eles indicam reconhecerem que ambas as funções são crescentes, e explicitam que uma delas "tem o crescimento mais rápido" que a outra. Mais especificamente, a taxa de crescimento de $f(x)$ é "mais lenta", se comparada à taxa de crescimento de $g(x)$. Evidenciam que há uma mudança na inclinação da reta, porém sem explicitar que estão se referindo, no caso, às retas tangentes ao gráfico de cada uma das funções.

Grupo 3 (G3):

G3 propõe utilizar o movimento das mãos como estratégia para representar a variação dos valores da tabela, como ilustrado na Figura 3.

Figura 3.

Movimento das mãos do estudante de G3 (Dados da pesquisa, 2017)

O trecho transcrito a seguir refere-se ao modo como descreveram o gráfico de $f(x)$.

A1: Aí, tipo, conforme esse eixo vertical [referindo-se ao eixo y] vai aumentando, o eixo horizontal [referindo-se ao eixo x] vai aumentado também. Só que seria assim, enquanto sua mão esquerda sobe tanto, sua mão direita vai andar tanto. Pensei nisso, a gente debateu.
A2: só que daí teria que definir, né!? Só que eu vi que não tem muito padrão, né!? De 0 vai para 1, depois 3 e 6. Aqui dobrou. Mas do 1 para o 3, assim, não sei qual que é a lógica.
Pesquisador: Se fosse para você movimentar a mão desse cara, enquanto o vertical cresce, o horizontal também cresce. Se fosse pra você movimentar, movimentaria sempre a mesma quantidade?
A1: é diferente, né, mas aí eu vi que não tem muito padrão.
A2: vai acabar formando uma curva com concavidade para baixo.
A1: eu posso aproximar por uma reta, porque está uma curva bem leve. Mas em ambos os casos no [eixo] x vai andar mais que no [eixo] y. No [eixo] y cresce zero vírgula alguma coisa, no [eixo] x vai crescendo 2, 3, 4....
A2: isso que ela falou é importante, porque daí a gente não consegue estabelecer uma taxa de variação padrão, mas a proporção é que o eixo x vai andar mais que o eixo y. Você vai falar para ele assim, ó: você vai juntar as duas mãos. A mão direita você vai movimentar rápido para a direita enquanto a mão esquerda você vai levantar devagar. Né, aí perfeito, você tá aqui enquanto essa tá aqui (Diálogo entre integrantes do grupo 3 e o pesquisador, 2017).

O grupo reconhece que $f(x)$ é crescente, e recorre, inicialmente, ao processo de identificação de padrão (no modo como ocorre esse crescimento) para apoiar seus argumentos. Para tal, analisa apenas as variações absolutas da variável independente. No caso, observa que, quando o valor de x muda de 1 para 2, a variação é de 1 unidade. Depois, quando muda de 3 para 6, a variação é de 3 unidades. Esse olhar sobre as variações absolutas de cada uma das variáveis é retomado ao longo do diálogo (“no x vai crescendo 2, 3, 4...” e “no y cresce zero vírgula alguma coisa”).

Possivelmente, estejam se referindo a essas variações absolutas ao mencionarem que “a gente não consegue estabelecer uma taxa de variação padrão”, e que “o eixo x vai andar mais que o eixo y”. Com o movimento simultâneo das duas mãos para representar essas variações, concluem que “a mão direita você vai movimentar rápido para a direita enquanto a mão esquerda você vai se levantar devagar”, sugerindo a formação de um gráfico côncavo para baixo.

Grupo 4 (G4):

G4 também utiliza o recurso do movimento das mãos, de modo similar ao que foi sugerido por G3. A seguir, a transcrição do diálogo com o pesquisador:

> **A1:** A gente fez por valores, fez os gráficos e observou os gráficos como dava para explicar... a gente falou que era uma curva de crescimento e para representar para um cego a gente pegaria a mão dele levaria no ponto de início, no ponto final. Explicaria olha aqui no ponto de início começou com tal valor. E daí o valor de x cresceu um padrão e o valor y cresceu em outro padrão, só que esses padrões são proporcionais e formam essa curva. O crescimento de [valores de] x é mais rápido que o crescimento de [valores de] y. A gente explicou como é a extensão, se uma cresce mais rápido e outra cresce mais lentamente, mais ou menos assim.
> **Pesquisador:** Aqui [referindo-se ao movimento das mãos feito por A1, enquanto falava] os dois ficaram meio que com concavidade voltada para cima, é isso?
> **A1:** Sim
> **A2:** Realmente é guiar a mão dele e ele falando: olha, teve um crescimento assim, pouco acentuado.
> **A1:** Colocar a mão dele tipo: aqui é o início do gráfico, ele começou com tais valores e a partir daí ele foi crescendo com essa cara dessa curva aqui você vai. Você vai dar uma curva fazer ele dar uma curva maior com a mão. Aqui a curva vai crescer mais rápido... eu acho que ele sentiria que esse crescimento é mais rápido que esse, daí você explicaria. Você explicaria porque o crescimento é mais rápido que o outro. Taxa de variação de x em relação a y. E do outro x em relação ao outro y. (Diálogo entre integrantes do grupo 4 e o pesquisador, 2017).

O grupo reconhece se tratar de gráficos crescentes (ao utilizar a expressão curva de crescimento), e constrói sua argumentação baseada na marcação de pontos feita no papel (a gente fez por valores, fez os gráficos). Assim como G3, nesse grupo os estudantes também recorrem à identificação de um padrão para analisar de forma independente as variações absolutas das variáveis independente e dependente para cada das funções (o valor de x cresceu um padrão e o valor y cresceu em outro padrão). Mobilizam também ações de comparação entre as taxas de crescimento (absoluto) das variáveis (o crescimento de x é mais rápido que o crescimento de y).

Entretanto, o movimento realizado com as mãos por A1 foi similar para ambas as funções, sugerindo a formação de gráficos côncavos para cima. Embora o professor tenha chamado a atenção para esse fato (os dois ficaram meio que com concavidade voltada para cima), o grupo não foi capaz de reconhecer esse fato, retificando a descrição já apresentada. Embora A1 utilize a expressão "taxa de variação de x em relação a y", não evidencia compreender seu significado, bem como sua relação com a concavidade dos gráficos, deixando sua justificativa carente de apoio.

Discussões e considerações finais

Procuramos neste artigo evidenciar conceitos matemáticos mobilizados na resolução de uma tarefa envolvendo representações gráficas de funções, focando nos argumentos elaboradores por grupos de estudantes que cursam CDI. Mais especificamente, a partir dos argumentos apresentados para analisar duas quantidades que variam juntas, esses grupos de estudantes poderiam (ou não) reconhecer os seguintes aspectos: (a) a direção de (de) crescimento; (b) a existência de taxas de variação diferentes entre os valores da tabela para as duas funções; (c) a relação entre essa taxa de variação e a concavidade do gráfico das funções; (d) a existência de assíntota horizontal no gráfico de $f(x)$.

A direção de crescimento das funções $f(x)$ e $g(x)$ parece ter sido facilmente observada pelos quatro grupos analisados. Já a existência de assíntota horizontal no gráfico de $f(x)$ foi explicitada apenas nas falas de G1 e G2, embora o movimento simultâneo das mãos realizado por G3 evidenciou que esse grupo reconheceu a tendência do gráfico de $f(x)$ estabilizar-se. Já no caso de G4, o movimento das mãos realizado para representar os gráficos tanto de $f(x)$ quanto $g(x)$ sugere gráficos côncavos para cima, não deixando evidente o reconhecimento da existência de uma assíntota horizontal no gráfico de $f(x)$.

No que tange às variações das variáveis, esse olhar aparece de forma explícita apenas nas narrativas de G3 e G4, sem, contudo, evidenciar uma compreensão do conceito de taxa de variação. Esses grupos analisaram, de forma independente, as variações nos valores da variável x e da variável y, procurando reconhecer algum tipo de padrão nessas variações (sem, contudo, realizarem o cálculo dessas taxas de variação). Consequentemente, não foram capazes de estabelecer uma relação entre as taxas de variação e a concavidade do gráfico das funções. No caso de G3, a formação de um gráfico côncavo para baixo é associada ao fato das variações absolutas da variável y serem menores que as variações absolutas da variável x.

Reconhecemos assim que a elaboração dos argumentos pelos diferentes grupos envolveu, não necessariamente um conhecimento formal de uma definição de função, mas o reconhecimento de diferentes aspectos associados a esse conceito, a percepção da conexão entre aspectos e de sua utilização para resolver a tarefa proposta (Ponte, Mata-Pereira & Henriques, 2012). Identificamos, durante as discussões, as tentativas dos grupos em lidar com conceitos, propriedades e ideias matemáticas previamente aceitas (Mata-Pereira & Ponte, 2017), no intuito de fornecer justificativas convincentes sobre a validade de seus argumentos (Lo, Grant & Flowers, 2008). Tal entendimento vai ao encontro do que é definido por vários autores sobre raciocínio matemático (Lannin, Ellis & Elliot, 2011; Jeannotte & Kieran, 2017) uma vez que os alunos recorreram a alguns conhecimentos matemáticos que já possuíam para produzir novos conhecimentos.

De modo geral, entendemos que a tarefa proposta oportunizou possibilidades de explorar relações quantitativas entre as variáveis, "prestando atenção" a essas quantidades e na relação entre elas (Mestre, 2014). As narrativas construídas evidenciam um movimento no sentido de analisar de forma coordenada as mudanças que ocorrem em duas variáveis interdependentes (Orfali; 2017; Thompson & Carlson, 2017), sem que, entretanto, fossem capazes de explicitamente relacionar essas mudanças com a concavidade do gráfico da função.

O ambiente de ensino e de aprendizagem que se constitui a partir do trabalho com a tarefa possibilitou que os estudantes relacionassem diferentes representações matemáticas (Quarema & Ponte, 2016), mais especificamente verbal, tabular e gráfica (Garcia; 2009; Gafanhoto & Canavarro, 2011), desenvolvendo a linguagem e o raciocínio matemáticos. Em especial, a solicitação de "descrever o gráfico" mostrou-se pouco familiar aos estudantes, que em geral estão habituados a, a partir da expressão algébrica, calcular valores da função em pontos particulares do domínio para, em seguida, plotá-los no plano (Bisognin, Bisognin & Cury, 2010). Ao invés de uma linguagem matemática simbólica ou aplicação de fórmulas e algoritmos, a tarefa levou as estudantes a utilizarem, em suas narrativas, de linguagem natural, como meio para construir argumentos explicativos do formato do gráfico das funções.

As discussões oportunizadas no trabalho em pequenos grupos possibilitou aos estudantes formular e validar conjecturas, identificar padrão, comparar e justificar (Ellis, 2001; Ponte, Mata-Pereira & Henriques, 2012; Jeannotte & Kieran, 2017). Embora os argumentos apresentados por eles não contemplassem todos os aspectos desejados, a tarefa mobilizou nos estudantes a necessidade de elaborar argumentos para explicar as variações observadas nas tabelas, apresentando motivos (conhecimentos matemáticos) que apoiassem suas explicações, conforme defendem Lannin, Ellis e Elliot (2011). Dessa forma, as justificativas elaboradas por eles deram-se a partir da mobilização de diversas relações matemáticas, conceitos e propriedades previamente aceitas que possibilitaram a eles apresentar razões para si mesmos e para os outros que sustentassem sua forma de pensar (Araman, Serrazina & Ponte, 2019), evidenciando que a tarefa proposta, bem como o encaminhamento pedagógico feito pelo professor, contribuíram para o desenvolvimento do raciocínio matemático desses alunos (Mata-Pereira & Ponte, 2018) .

Referências

Araman, E. M. O., Serrazina, M. L., & Ponte, J. P. (2019). “Eu perguntei se o cinco não tem metade”: ações de uma professora dos primeiros anos que apoiam o raciocínio matemático. *Educação Matemática Pesquisa*, 21(2), 466-490. https://doi.org/10.23925/1983-3156.2018v21i2p466-490 .

Bisognin, E., Bisognin, V., & Cury, H. N. (2010). Conhecimentos de professores da educação básica sobre o conceito de função. *Anais do Encontro Nacional de Educação Matemática*. Salvador, Brasil, 10.

Bogdan, R., Biklen, S. (1994). *Investigação Qualitativa em Educação*: uma introdução à teoria e aos métodos. Porto Alegre, Porto Editora.

Borssoi, A. H.; Trevisan, A. L., & Elias, H. R. (2017). Percursos de aprendizagem de alunos ao resolverem uma tarefa de Cálculo Diferencial e Integral. *Vidya*, 37(2), 459-477.

Couto, A. F., Fonseca, M. O. S., & Trevisan, A. L. (2017). Aulas de Cálculo Diferencial e Integral organizadas a partir de episódios de resolução de tarefas: um convite à insubordinação criativa. *Revista de Ensino de Ciências e Matemática*, 4, 50-61. https://doi.org/10.26843/rencima.v8i4.1493.

Ellis, A. B. (2011). Generalizing-Promoting Actions: How Classroom Collaborations Can Support Students' Mathematical Generalizations. *Journal for Research in Mathematics Education*, 42(4), 308-345. 10.5951/jresematheduc.42.4.0308.

Frank, K. M. (2017). *Examining the Development of Students’ Covariational Reasoning in the Context of Graphing* [Dissertation, Doctor of Philosophy, Arizona State University]. https://eric.ed.gov/?id=ED578714.

Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an Educational Task*. Dordrecht, Reidel Publishing Company.

Gafanhoto, A., & Canavarro, A. P. (2011). Representações múltiplas de funções em ambiente com Geogebra: um estudo sobre o seu uso por alunos de 9.º ano. In Martinho, M. H., Ferreira, R., Vale, I., Ponte, J. P. (eds.): *Ensino e Aprendizagem da Álgebra - Anais do EIEM* 201. Póvoa de Varzim, SPIEM (pp.125-148).

Garcia, V.C. (2009). Função: o professor conhece este conceito? *Vidya*, 29(2), 43-52.

Jeannotte, D., & Kieran, C. (2017). A conceptual model of mathematical reasoning for school mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 96(1), 1-16. https://doi.org/10.1007/s10649-017-9761-8.

Lannin, J., Ellis, A. B., & Elliot, R. (2011). *Developing essential understanding of mathematics reasoning for teaching mathematics in prekindergarten-grade 8*. Reston, VA, National Council of Teachers of Mathematics.

Laudares, J. B. (2013). O conceito e a definição em Matemática: aprendizagem e compreensão. *Anais do Encontro Nacional de Educação Matemática*, Curitiba, 11.

Lo, J. J., Grant, T. J, & Flowers, J. (2008). Challenges in deepening prospective teachers' understanding of multiplication through justification. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 11(1), 5-22. https://doi.org/10.1007/s10857-007-9056-6.

Mata-Pereira, J., & Ponte, J. P. (2017). Enhancing students' mathematical reasoning in the classroom: teacher actions facilitating generalization and justification. *Educational Studies in Mathematics*, 96(2), 169-186. https://doi.org/10.1007/s10649-017-9773-4.

Mata-Pereira, J., & Ponte, J. P. (2018). Promover o Raciocínio Matemático dos Alunos: uma investigação baseada em design. *Bolema*, 32(62), 781-801. http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v32n62a02.

Mestre, C. M. M. V. (2014). O desenvolvimento do pensamento algébrico de alunos do 4.º ano de escolaridade: uma experiência de ensino. [Tese de Doutorado em Educação, Universidade de Lisboa]. https://repositorio.ul.pt/jspui/handle/10451/15481.

Morais, C., Serrazina, L., & Ponte, J. P. (2018). Mathematical Reasoning Fostered by (Fostering) Transformations of Rational Number Representations. *Acta Scientiae*, 20(4), 552-570. https://doi.org/10.17648/acta.scientiae.v20iss4id3892.

Orfali, F. (2017). A conciliação das ideias do Cálculo com o currículo da Educação Básica: o raciocínio covariacional. [Tese de Doutorado em Educação, Universidade de São Paulo]. https://www.teses.usp.br/teses/disponiveis/48/48134/tde-05112018-161520/pt-br.php .

Ponte, J. P. (2005) Gestão curricular em Matemática. In GTI (ed.): *O professor e o desenvolvimento curricular*. Lisboa (pp.11-34).

Ponte J. P. (2014). Tarefas no ensino e na aprendizagem da Matemática. In Ponte, J. P. (org.): *Práticas profissionais dos professores de matemática*. Lisboa, Instituto de Educação da Universidade de Lisboa (pp.13-27).

Ponte, J. P., Mata-Pereira, J., & Henriques, A. (2012). O raciocínio matemático nos alunos do ensino básico e do ensino superior. *Praxis Educativa*, 7(2), 355-377. https://www.redalyc.org/pdf/894/89424874004.pdf.

Ponte, J. P., Carvalho, R., Mata-Pereira, J. & Quaresma, M. (2016). Investigação baseada em design para compreender e melhorar as práticas educativas. *Quadrante*, 25(2), 77-98.

Ponte, J. P., & Quaresma, M. (2016). Teachers' professional practice conducting mathematical discussions. *Educational Studies in Mathematics*, 93, 51–66. https://doi.org/10.1007/s10649-016-9681-z

Ramos, N. S., Trevisan, A. L., & Mendes, M. T. (2019). Delineamento de tarefas de cálculo diferencial e integral envolvendo sequências numéricas: análise de um processo. *Alexandria*, 12, 27-49. https://doi.org/10.5007/1982-5153.2019v12n2p27.

Ribeiro, A. J., & Paulin, J. F. V. (2020). A Teaching Experience through the use of Tasks: Limits and possibilities for learning Mathematics in a university context. *Acta Scientiae,* 22, 67-85. https://doi.org/10.17648/acta.scientiae.5411.

Rodrigues, C., Menezes, L. & Ponte, J. P. (2018). Práticas de Discussão em Sala de Aula de Matemática: os casos de dois professores. *Bolema*, 12 (61), 398-418. http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v32n61a05 .

Stein, M.H. & Smith, M.S. (2009). Tarefas matemáticas como quadro para reflexão. *Educação e Matemática*, 105, 22-28. http://www.apm.pt/files/_EM105_pp022-028_hq_4ba7184610502.pdf .

Thompson, P. W. & Carlson, M. P. (2017). Variation, covariation, and functions: Foundational ways of thinking mathematically. In Cai, J. (ed.): *Compendium for research in mathematics education*. Reston, VA, National Council of Teachers of Mathematics (pp.421-456).

Trevisan, A. L. & Mendes, M. T. (2017). Integral antes de derivada? Derivada antes de integral? Limite, no final? Uma proposta para organizar um curso de Cálculo. *Educação Matemática Pesquisa*, 19(3), 353-373. https://doi.org/10.23925/1983-3156.2017v19i3p353-373 .

Trevisan, A. L. & Mendes, M. T. (2018). Ambientes de ensino e aprendizagem de Cálculo Diferencial e Integral organizados a partir de episódios de resolução de tarefas: uma proposta. *Revista Brasileira de Ensino e Tecnologia*, 11(1), 209-227. https://periodicos.utfpr.edu.br/rbect/article/view/5702 .

Recebido em: 13/12/2020

Aprovado em: 09/03/2021

Agradecimentos

Os autores agradecem à Fundação Araucária e ao CNPq pelo apoio ao desenvolvimento da pesquisa.