

## Artigo Teórico



# Funções Trigonométricas Seno e Cosseno: Das Representações Semióticas à Formação dos Conceitos

Neiva Ignês Grandó<sup>11</sup>  
Roberto Preussler<sup>12</sup>

### Resumo

O uso de *softwares*, nas aprendizagens em matemática, instiga outras formas de aprendizado e exige posturas diferenciadas dos educadores. Este artigo apresenta resultados de uma pesquisa desenvolvida com alunos do segundo ano do ensino médio, de uma escola da rede pública de São Luiz Gonzaga/RS. Investigou-se o processo de apropriação de significados dos conceitos das funções trigonométricas seno e cosseno no ciclo trigonométrico e suas representações gráficas, usando os *softwares* Cabri-Géomètre II e Graphmatica. Para isso, elaborou-se uma proposta pedagógica composta de uma sequência de atividades que levaram os sujeitos a interagirem com os *softwares* e entre si. A pesquisa fundamentou-se na teoria histórico-cultural e na teoria dos registros de representação semiótica. Observou-se que os alunos constroem suas aprendizagens nas interações, buscando solução para os desafios propostos nas atividades. Foi possível observar também que os *softwares* tornaram-se instrumentos motivacionais e auxiliaram na construção de um sistema de representações que permitiu aos alunos relacionar os conceitos e apropriar-se dos seus significados.

**Pavras-chave:** Prática pedagógica. Funções trigonométricas. Apropriação de conceitos. *Softwares* dinâmicos.

### Introdução

Mudanças nas formas de aprendizagem, nas técnicas utilizadas, nas questões epistemológicas e metodológicas integram as mais diversas pautas acadêmicas e se constituem desafios aos educadores. Atualmente se observa uma vasta e crescente produção acadêmica que discute temas da educação matemática, como a formação de professores e as práticas pedagógicas com a utilização de recursos didáticos. Fiorentini (2003) destaca que há necessidade de intensificar a consistência investigativa e teórica sobre as práticas de sala de aula. O autor questiona o fato de sabermos pouco a respeito de transformar esses

<sup>11</sup>Mestre em Psicologia Cognitiva – UFPE, Doutora e Pós-Doutora em Educação – UFSC. Professora do Programa de Pós-graduação em Educação e do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade de Passo Fundo – Passo Fundo/RS. Líder do Grupo de Pesquisa Teoria Histórico-cultural e Educação Matemática/CNPq. E-mail: [neiva@upf.br](mailto:neiva@upf.br).

<sup>12</sup>Mestre em Educação e Doutorando em Educação pela Universidade de Passo Fundo – Passo Fundo/RS. Professor de Educação Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Farroupilha – Campus Santa Rosa. Líder do grupo de pesquisa: Processos de Formação e Ensino-aprendizagem em Matemática/CNPq. E-mail: [roberto.preussler@iffarroupilha.edu.br](mailto:roberto.preussler@iffarroupilha.edu.br).

discursos ou propostas em práticas pedagógicas. Entende-se, com isso, que há necessidade de mais pesquisas que aproximem as propostas acadêmicas da sala de aula da educação básica. Esta pesquisa apresenta resultados de uma experiência sobre o processo de formação dos conceitos das funções trigonométricas seno e cosseno no ciclo trigonométrico e suas representações gráficas, destacando como as diferentes formas de representação contribuem para a formação dos conceitos matemáticos.

A proposta de sala de aula foi composta por uma sequência didática de 16 atividades: nove com o software Cabri-Géomètre II, quatro com o software Graphmatica e três avaliações. Foram necessários, aproximadamente, dois meses de aula para se desenvolver tais atividades, normalmente em dois ou três períodos semanais, em uma turma de 27 alunos do 2º ano do ensino médio.

No início de cada atividade, orientava-se o trabalho dos grupos, pois, no planejamento delas, primou-se pela autonomia dos alunos. Nos momentos em que a ajuda do professor era solicitada, sempre que possível, devolvia-se outra pergunta que orientasse o grupo numa análise diferente, relacionada à questão. Com isso, procurava-se valorizar a ação e o pensamento dos alunos, como sujeitos individuais e singulares, permitindo interações próprias e diferentes entre os grupos.

Ao final de cada atividade, num diálogo coletivo, eram reunidas as discussões e construções dos grupos para sintetizar, na ótica da matemática, os significados dos conceitos construídos. Quando percebiam-se construções dúbias ou equivocadas, promovia-se um debate sobre as questões, formando novas sínteses mentais. Naqueles momentos, sempre se procurou valorizar a forma de pensamento de algum grupo que direcionasse uma reflexão coerente, construindo o conceito correto. Para que fosse possível identificar o pensamento conceitual dos sujeitos, a experiência foi registrada nas fichas da atividade, em áudio e vídeo.

### **Fundamentos teóricos**

A utilização de *softwares* educacionais na educação matemática possibilita construir e representar dinamicamente a situação do objeto em estudo. Para Bernard, Ortega Junior e

Tavares (2000) os *softwares* consentem movimentar de várias formas as construções geométricas, mantendo-se invariantes as propriedades matemáticas. Para os autores, as atividades de matemática que utilizam ambientes informatizados têm servido de elemento motivacional aos alunos e contribuído para ampliar o desenvolvimento do raciocínio lógico. As experiências de Gravina e Santarosa (1998) mostram que as representações dinâmicas possibilitadas pelos *softwares* de matemática permitem, com o seu sistema de representação, ampliar o caráter estático do conhecimento matemático, o qual, muitas vezes, dificulta a construção do significado, tornando o objeto matemático um conjunto de símbolos, palavras ou desenhos a ser memorizado. Nesse sentido, as autoras afirmam:

A instância física de um sistema de representações afeta substancialmente a construção de conceitos e teoremas. As novas tecnologias oferecem instâncias físicas em que a representação passa a ter um caráter dinâmico, e isto tem reflexos nos processos cognitivos, particularmente no que diz respeito às concretizações mentais. (GRAVINA; SANTAROSA, 1998, p. 10)

Para as autoras, a vantagem dos ambientes informatizados é “a possibilidade de realizar grande variedade de experimentos em pouco tempo, diferente da manipulação concreta” (p. 9). Elas consideram que nesses experimentos está a primazia da ação do aluno, favorecendo o processo de investigação e abstração, com a consequente construção de conceitos e relações.

Acredita-se que a utilização de recursos da informática contribui significativamente para qualificar as aprendizagens em matemática. Entretanto, isso implica na necessária aproximação das propostas acadêmicas às práticas de sala de aula. Para isso, torna-se indispensável ao professor compreender a inserção e a utilização desses recursos aplicados ao ensino da matemática.

Nesse contexto, reflexões teóricas que orientam os processos de ensino e de aprendizagem constituem-se importantes aliados do professor. Conforme Vygotsky (1993), os processos de aprendizado e de desenvolvimento ocorrem principalmente em situações de interação, nas quais as relações interpessoais são responsáveis por fornecer os elementos da cultura, que, internalizados, vão constituindo o sujeito psicológico.

Nas interações, o uso do computador como instrumento mediador permite uma “relação” não direta do sujeito com o objeto de conhecimento. Vygotsky (1993) entende

que “relação” é “aquilo” que acontece quando o sujeito desenvolve ação sobre o objeto, ou que toda ação é implicada de uma relação entre partes; uma relação cognitiva deve ser reflexiva e intencional. O autor atribui expressiva importância às atividades de aprendizagem para a promoção do desenvolvimento, salientando que a relação entre aprendizagem e desenvolvimento “não é uma relação de identidade, mas uma relação muito mais complexa” (VIGOTSKY, 1991, p. 94). Na proposta da pesquisa, foram consideradas as interações em que, por meio do diálogo, a reflexão e a intencionalidade dos sujeitos fossem possíveis, vivenciando um relacionamento na zona de desenvolvimento proximal que “é, pois, o domínio psicológico em constante transformação” (OLIVEIRA, 1997, p. 60).

Outro suporte para as interpretações sobre o processo de formação dos conceitos propostos vem da teoria dos registros de representação semiótica, da qual se destaca o pressuposto de que

a compreensão em matemática está intimamente ligada ao fato de dispor ao menos de dois registros de representação diferentes. Essa é a única possibilidade de que se dispõe para não confundir o conteúdo de uma representação com o objeto representado. (DUVAL, 2003, p. 22)

Além disso, para o autor, “é a articulação entre os registros que constitui uma condição de acesso à compreensão em matemática” (p. 22). Ele afirma que há dois tipos de transformações semióticas: os tratamentos e as conversões. Os tratamentos constituem transformações em um mesmo registro, e as conversões são transformações que exigem a mudança de registro.

Nas figuras 1, 2 e 3, no item a seguir, é possível observar a conversão do registro de representação semiótica que os alunos realizaram. O registro semiótico que receberam para manipular no software foi representado por uma imagem na figura 1. Esse foi convertido para a linguagem algébrica apresentada na figura 2. Nesse caso, a conversão do registro é da imagem para a linguagem algébrica. Outra conversão de registro semiótico pode ser observada na figura 3, quando as representações da imagem do gráfico foram convertidas para a linguagem escrita em sua forma natural. Nos dois exemplos citados, está presente a conversão na transformação do registro semiótico. Para os tratamentos não há mudança na forma de registro, o que pode ser observado nas figuras 2 e 3, quando são descritas as

variações da função na linguagem natural.

Nesta pesquisa, a escolha dos *softwares* propiciou desenvolver atividades que requerem dos alunos registros de representações diferentes, organizadas de forma a exigir transformações de registros que ocorreram, principalmente, da representação algébrica de uma função para a gráfica e, em várias situações, ainda, com a escrita natural.

### As representações semióticas e o processo de formação dos conceitos

A seguir, apresentam-se e discutem-se alguns registros das interações que permitiram observar o modo como os diferentes registros de representação influenciaram na apropriação do significado dos conceitos das funções trigonométricas seno e cosseno. Na atividade proposta, os sujeitos deveriam apropriar-se do significado do conceito de função trigonométrica cosseno como sendo a medida do cateto adjacente projetada sobre o eixo da abscissa (ver figura 1) e algumas características inerentes ao mesmo.

A atividade foi dividida em questões. Nessas considerou-se outros conceitos já apropriados nas atividades anteriores como subordinados constituintes do sistema a integrar os novos conceitos a serem apropriados (VYGOTSKY, 1993). As interações aconteceram quando os alunos manipularam o arquivo dinâmico do software da figura 1, a seguir:

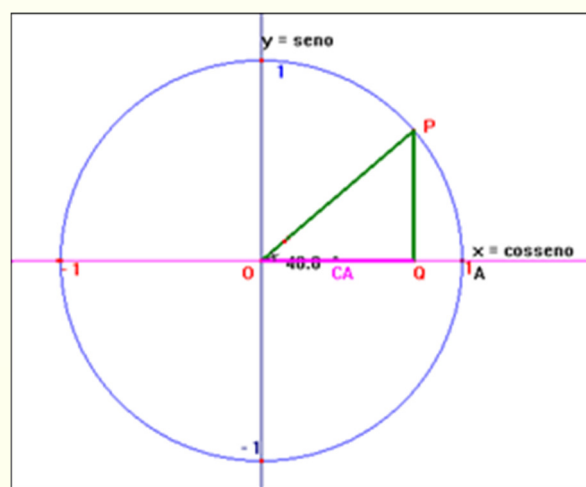


Figura 1 – Arquivo dinâmico utilizado na atividade para apropriação do conceito da função cosseno com o software Cabri-Géomètre II.  
Fonte: dados da pesquisa.

**FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS SENO E COSSENO: DAS REPRESENTAÇÕES SEMIÓTICAS À FORMAÇÃO DOS CONCEITOS**

---

Ao manipular o arquivo, foi possível observar que a dupla se apropriou do significado do conceito da função cosseno, quando afirmou que: “O cosseno continua sendo igual ao cateto adjacente ou  $\overline{OQ}^{13}$ ”. Em seguida, eles deveriam definir o valor do cos  $225^\circ$  e  $330^\circ$ , não marcados no arquivo que receberam (figura 1). Para esta resposta, esperava-se que eles transpusessem o significado do cosseno de  $45^\circ$  para outros ângulos no ciclo trigonométrico. Para exemplificar, apresentamos parte do diálogo produzido por uma das duplas<sup>14</sup>:

- A<sub>2</sub> – Ah, lembra que aqui é 270 (indicam a figura 1 na tela do computador), aqui não tem 225! 270 como é que eu vou fazer?
- A<sub>1</sub> – É foi isso que ele disse ó, assim ó.
- A<sub>2</sub> – Se for solicitado para calcular o valor do cosseno de 225, qual a medida que você poderia atribuir ao cosseno sem calcular, apenas movimentando a figura? (O aluno relê a questão).
- A<sub>2</sub> – Ah, mas é o ângulo, não é! O ângulo de 270. Ah, mas aqui zera. Aqui é 270 né. 270! 270! Aqui é 180, né. Que medida você atribuiu, sem calcular, apenas.
- A<sub>1</sub> – Não sei como que é! Eu não sei por que aqui zera, ó, vai ficar 180 aqui. Ô professor! Olha isso aqui. Eu não sei, eu vou adivinhar que aqui é 225?
- P – Não. Não é.
- P – Tá! Mas e se você não conseguisse marcar o 225 ali, o que vocês iriam concluir para o valor do cosseno de  $225^\circ$ ?
- A<sub>1</sub> – É o cateto adjacente, a medida aqui.
- A<sub>2</sub> – Tá, então escreve isso aqui.
- P – Só isso!
- [...]
- A<sub>2</sub> – Tá meu, o de 330 também a mesma coisa.
- A<sub>1</sub> – Também!
- A<sub>2</sub> – Quanto que deu o seno de 330?
- A<sub>1</sub> – Olha, 330 vai entrar no quarto quadrante lá, vai ou não? A gente já respondeu isso.
- A<sub>2</sub> – Tá, independente do ângulo, o cosseno vai ser sempre igual ao cateto adjacente.
- A<sub>1</sub> – Independente do ângulo, independente do quadrante, independente da circunferência.

No diálogo, observa-se que os sujeitos apropriaram-se do significado do conceito da função cosseno. Embora os ângulos de  $225^\circ$  e  $330^\circ$  não tivessem sido apresentados no ciclo trigonométrico (Figura 1), os alunos interagiram produzindo afirmações, relacionando vários conceitos integrantes do sistema: a divisão dos quadrantes, a localização dos respectivos ângulos e a relação com a função seno, estudada anteriormente.

---

<sup>13</sup> $\overline{OQ}$  representa a medida do cateto adjacente visível na figura 1.

<sup>14</sup>Para referenciar as falas, utilizamos a letra maiúscula A e o número subscrito 1 e 2 para indicar os alunos. Quando a letra for P, indica a fala do professor. A fala dos participantes foi transcrita, com poucas correções.

**FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS SENO E COSSENO: DAS REPRESENTAÇÕES SEMIÓTICAS À FORMAÇÃO DOS CONCEITOS**

As figuras 2, 3 e 4, a seguir, permitem identificar as transformações dos objetos matemáticos entre as diferentes formas de registro. Na atividade proposta, os alunos deveriam reconstruir, na tabela ao lado da figura do ciclo trigonométrico (Figura 2), as características da função seno e representá-las no gráfico (Figura 3).

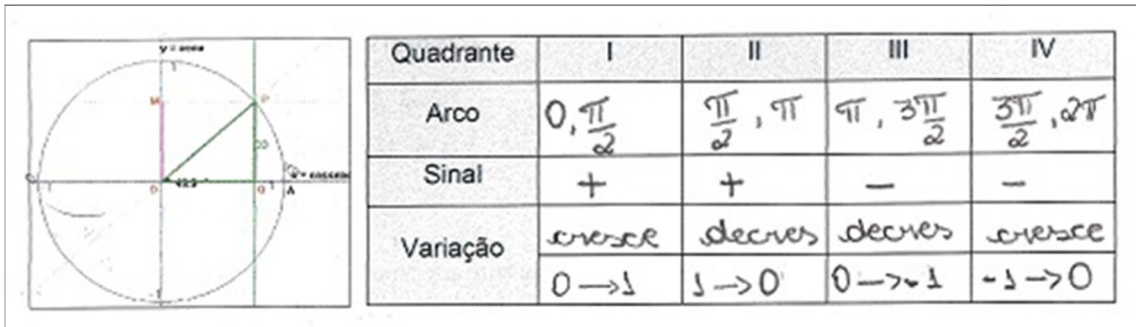


Figura 2 – Conversão do registro de representação do ciclo trigonométrico para linguagem algébrica e natural.  
Fonte: Dados da pesquisa.

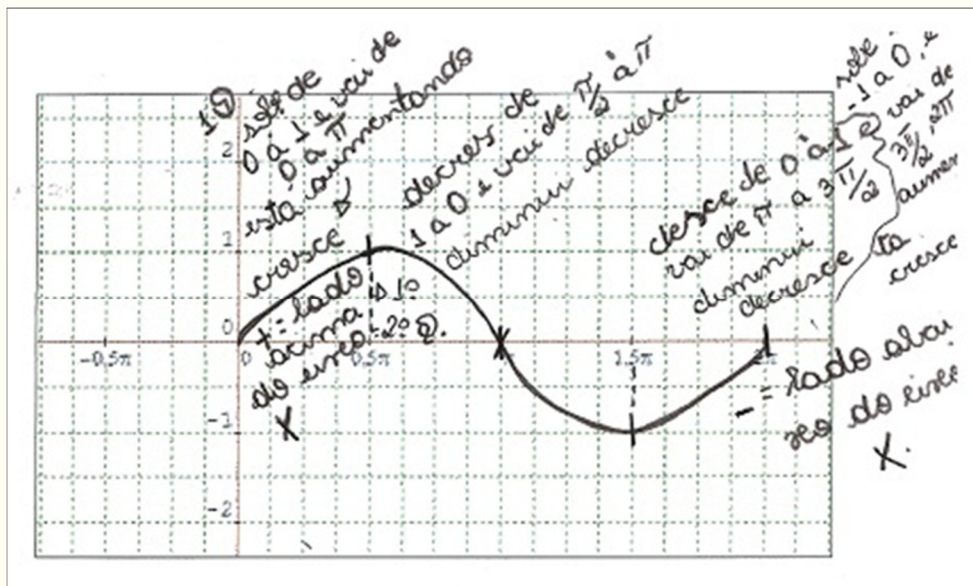


Figura 3 – Conversão dos registros de representação semióticos da tabela (figura 2) para o gráfico.  
Fonte: Dados da pesquisa.

As figuras 2 e 3 apresentam o resultado do diálogo e do pensamento dos alunos. Os registros permitem observar os conceitos apropriados numa atividade de conversão da fala como expressão da linguagem, para linguagem algébrica na figura 2 e para o registro gráfico da figura 3. Como síntese das transformações anteriores, os alunos utilizaram-se da linguagem escrita para caracterizar os elementos da equação geral dada.

**FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS SENO E COSSENO: DAS REPRESENTAÇÕES SEMIÓTICAS À FORMAÇÃO DOS CONCEITOS**

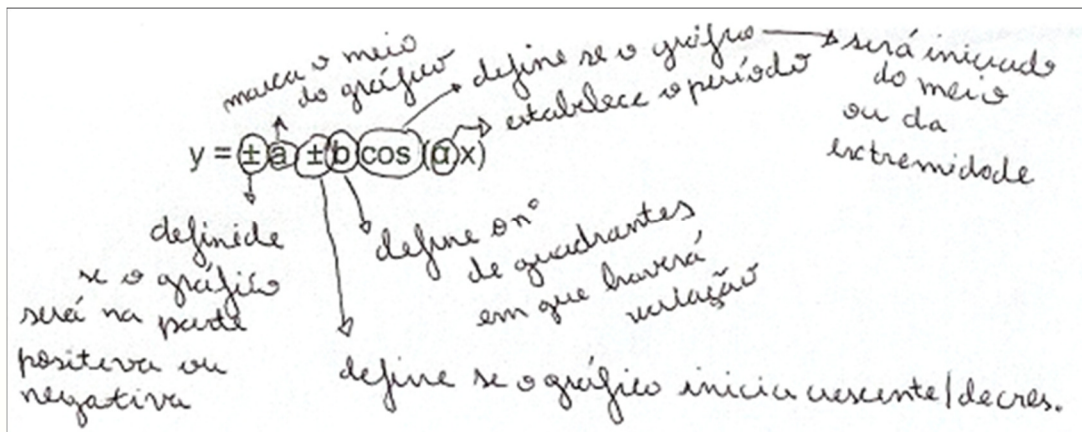


Figura 4 – Síntese das transformações dos objetos matemáticos  
Fonte: Dados da pesquisa.

As respostas apresentadas nos registros das duplas – figuras 2, 3 e 4 – e, as observadas nas outras atividades, não apresentadas neste relato, evidenciam a apropriação dos significados dos conceitos matemáticos e, em especial, a forma particular que os sujeitos organizam para aprender interagindo. Nas interações foram discutidos os conceitos, usando a fala como forma de expressão do pensamento. Para Vigotsky (1991), o uso da linguagem ganha corpo por meio da fala, permitindo aos alunos inter-relacionar os conceitos do sistema necessários à apropriação do significado do conceito supraordenado.

Nas interações, ao se defrontarem com as atividades, os alunos eram desafiados a buscar solução para as situações e construir um sistema de representações que lhes permitisse relacionar os conceitos e, assim, apropriavam-se de seus significados. Na medida em que adquiriam confiança no diálogo com o colega, os alunos criavam seus próprios meios de aprendizagem e, com isso, desenvolviam-se intelectualmente.

### Considerações finais

A prática pedagógica é cada vez mais potencializada com o uso de tecnologias de informação e comunicação, a exemplo de *softwares* educacionais. Nesse contexto, além de uma visão geral da complexidade da sociedade e da escola atual, a atividade profissional do educador matemático não pode prescindir do conhecimento sobre como pode se dar a aprendizagem, sobre os objetos matemáticos e sobre os recursos didáticos possíveis de serem utilizados em sala de aula.

Desta forma, os pressupostos da teoria dos registros de representação semiótica



articulados com os pressupostos da teoria histórico-cultural foram fundamentais, tanto para a elaboração e desenvolvimento da sequência didática como para a análise do processo como um todo. Por sua vez, os *softwares* constituíram-se em recursos didáticos decisivos para as representações e transformações semióticas, revelando o processo de atribuição de sentido em relação ao conjunto de conceitos matemáticos, que compõem as funções trigonométricas que estavam sendo estudadas.

Assim, valorizaram-se as interações entre os alunos e, desses, com os recursos didáticos, possibilitando a ampliação de conhecimentos e o desenvolvimento da autonomia na atividade de estudo. Com isso, motivando e auxiliando na construção de um sistema de representações que permitiu aos alunos relacionar os conceitos e apropriar-se dos seus significados.

### Referências

BERNARD, Jorge; TAVARES, Rui Alberto Ecke; ORTEGA JUNIOR, Rubens Robles. O ensino de ciências exatas utilizando representações dinâmicas. In: WORKSHOP DE INFORMÁTICA NA EDUCAÇÃO DA UNIVERSIDADE DE PASSO FUNDO. **Anais**. Passo Fundo: Universidade de Passo Fundo, 2000. p. 77-83.

DUVAL, Raymond. Registro de representação semiótica e o funcionamento cognitivo da compreensão em matemática. In: MACHADO, Sílvio Dias Alcântara (Org.). **Aprendizagem em matemática: registros de representação semiótica**. São Paulo: Papirus, 2003. p. 11-34.

FIorentini, Dario. Em buscas de novos caminhos e de outros olhares na formação de professores de matemática. In: \_\_\_\_\_. **Formação de professores de matemática: explorando novos caminhos com outros olhares**. Campinas: Mercado de Letras, 2003.

GRAVINA, Maria Alice; SANTAROSA, Maria Lucila. **A aprendizagem de matemática em ambientes informatizados**. Disponível em: <[http://www2.mat.ufrgs.br/edumatec/artigos/artigos\\_index.php](http://www2.mat.ufrgs.br/edumatec/artigos/artigos_index.php)>. Acesso em: 10 nov. 2013.

OLIVEIRA, Marta Kohl de. **Vygotsky: aprendizagem e desenvolvimento um processo sócio-histórico**. São Paulo: Scipione, 1997.

VIGOTSKY, Lev Semenovitch. **A formação social da mente: o desenvolvimento dos processos psicológicos superiores**. 4. ed. Trad. de José Cipolla Neto, Luis Silveira Menna Barreto e Solange Castro Afeche. São Paulo: Martins Fontes, 1991.

\_\_\_\_\_. **Pensamento e linguagem**. Trad. de Jeferson Luiz Camargo. São Paulo: Martins Fontes, 1993.



**Veja mais em [www.sbembrasil.org.br](http://www.sbembrasil.org.br)**