

## La enseñanza inicial de la demostración: un manual para docentes

*Jorge Enrique Galeano Cano\**  
*Diana Marcela Lourido Guerrero\*\**  
*Carlos Melán Jaramillo\*\*\**

### RESUMEN

Este trabajo pretende identificar, en la investigación desarrollada por Ponce de León (2007), elementos que permitan sentar las bases para crear un manual dirigido a docentes, que comunique las reflexiones y resultados de dicha investigación y al mismo tiempo brinde elementos curriculares y didácticos en torno a la enseñanza de la demostración. Así, el marco teórico se inscribe principalmente

en los trabajos de Duval y su grupo (1993, 2004 a, 2004 b). Por otro lado, es establecen las condiciones de construcción del manual, en términos de consideraciones generales sobre un autor denominado como experto.

**Palabras clave:** perspectiva semiótica-cognitiva, demostración, razonamiento deductivo, recurso pedagógico, figuras geométricas.

---

\* Universidad del Valle. Dirección electrónica: jogalean69@hotmail.com

\*\* Universidad del Valle. Dirección electrónica: dianalourido@yahoo.com

\*\*\* Universidad del Valle. Dirección electrónica: cmj617@hotmail.com

## PRESENTACIÓN

Este trabajo plantea, como primera apuesta para la enseñanza de la demostración, introducir los procesos demostrativos en geometría, pues esta favorece el trabajo con distintos registros de representación semiótica, a saber: registro figural, la lengua natural y el lenguaje simbólico. La geometría se encuentra así dotada de una particularidad que permite el desarrollo de actividades de conversión, es decir, el paso de un registro a otro. En otras palabras, explotar las potencialidades de la geometría, descubriendo el rol que juegan las figuras y el discurso en lengua natural, se constituyen en un elemento necesario en aras de acceder a la demostración. De otra parte se encuentra el análisis sobre las características propias de la demostración, esto es, identificar la relación entre demostración y razonamiento deductivo; la comprensión de este último, es una exigencia cognitiva que implica específicamente saber cómo opera, qué propósito tiene, en qué fundamenta su validez y qué tipo de razonamientos produce .

Con respecto al rol desempeñado por las figuras en la comprensión del razonamiento deductivo, una vez que se entienda la potencia de hacer énfasis en la conversión de un registro a otro, se tiene que del tipo de aprehensión que se haga sobre las figuras se desprende un tipo particular de geometría, bien sea de acción o la que se conoce como geometría discursiva, que según esta perspectiva es la deseable, pues en ella tiene lugar la demostración. A su vez, llegar a esta geometría discursiva involucra un cambio en las reglas de juego, en el cual la validez de los hechos parta de la deducción y no de lo observable; tal cambio implica el tránsito entre las diferentes formas de aprehender las figuras. En síntesis, el papel que juegan las figuras permite dilucidar la idea de que la validación que se espera en matemáticas debe ser discursiva y no experimental.

Ahora bien, al retomar las consideraciones teóricas explicitadas por Ponce de León (2007), se hace necesario precisar qué del análisis sobre las exigencias cognitivas implicadas en la demostración es susceptible de presentar y ampliar en un manual para docentes, además de cómo hacer que estas reflexiones sienten las bases para constituir una propuesta curricular y didáctica.

## MARCO TEÓRICO

En cuanto a la demostración, si se establece que la demostración requiere usar la lengua natural, además de vincular un tratamiento figural y, a su vez, movilizar un tipo de razonamiento específico, se hace necesario deter-

minar cuáles son las exigencias cognitivas subyacentes a cada una de estas operaciones.

Ahora bien, cuando se tiene en cuenta la naturaleza de las matemáticas se desprende un análisis que da cuenta del razonamiento por medio de las proposiciones que lo componen, haciendo énfasis en que el tipo de razonamiento subyacente a la demostración es la deducción. De esta manera, se establece que los valores que intervienen en la comprensión del sentido de las proposiciones presentes en el razonamiento deductivo son el valor lógico y el valor epistémico. El valor lógico alude al hecho de que la proposición sea verdadera, falsa o indeterminada; este valor resulta de procedimientos específicos de verificación o de prueba y no depende solo de la comprensión de su contenido. En cuanto al valor epistémico, se reconocen dos tipos: valor epistémico semántico, el cual tiene ver con la comprensión de las proposiciones basándose únicamente en su contenido y el valor epistémico teórico, el cual responde a la organización del marco teórico en el cual una proposición es enunciada (Duval, 2004b). Considerar el razonamiento como un recorrido discursivo implica el hecho de que las proposiciones enunciadas en él no pueden ser separadas de su contexto de enunciación, pues es en virtud de este contexto que se tipifican los valores epistémicos, más aún, el mismo determina el valor lógico de las proposiciones.

Tomando como referencia los distintos análisis sobre el funcionamiento del razonamiento deductivo, Duval y Egret (1993) realizaron una propuesta para la enseñanza inicial de la demostración. Dicha propuesta está compuesta por tres etapas:

*Primera etapa.* Esta vincula un uso especializado de la lengua natural, además de un tratamiento pertinente de las figuras a partir de tres momentos: construcción y exploración de figuras, formulación de conjeturas y la distinción del antecedente y el consecuente del tercer enunciado.

En el primer momento se propone que al establecer la posibilidad intrínseca de convertir todas las proposiciones que intervienen en una demostración en el registro de sus representaciones figurales, se hace evidente el soporte intuitivo que proporcionan las figuras, pues aportan más de lo que dicen los enunciados, al permitir explorar, anticipar y formular conjeturas. De ahí que, se inicie por describir el soporte intuitivo de una figura y cuál puede ser su aporte heurístico en la resolución a un problema de geométrico, distinguiendo para tal fin, el tipo de aprehensión sobre la figura, a saber, perceptiva, operatoria y discursiva, definidas por Duval (2004). En este sentido, con respecto

a las figuras se tiene que a cada tipo de aprehensión figural le corresponde un modo particular de hacer geometría y, por tanto, de acercarse a la demostración, de tal suerte que deba privilegiarse la aprehensión discursiva de entre todas, pues es, justo ahí, donde la demostración tiene lugar. De otra parte, la aprehensión discursiva, da cuenta de la relación indisoluble entre demostración en geometría y las figuras.

En el segundo momento, formulación de conjeturas, se reconoce que la conjetura aparece como un estatus teórico en el nivel local (paso de razonamiento) y toma un lugar preponderante ya que el reconocimiento de estas marca el inicio de la distinción entre el contenido y el estatus de una proposición, debido a que dicho reconocimiento implica –de parte del estudiante– entender que no basta con lo observado en un figura para aceptar o no la formulación de una propiedad o el establecimiento de un resultado. Entonces, la posibilidad de formular conjeturas, de reconocer su lugar en un recorrido discursivo y en la solución de un problema es un aspecto central en el aprendizaje del funcionamiento de los razonamientos deductivos. Se necesita, por lo tanto, de un acercamiento a las conjeturas, a su formulación por parte de los estudiantes en el marco de un trabajo de exploración y búsqueda consciente; en este sentido Larios ha propuesto una definición de estas:

[...] una situación más "experimental", donde el individuo, puesto en una situación en particular, observa los hechos, los analiza, compara, encuentra un patrón y hace una afirmación, para posteriormente encontrar argumentos que la sustenten. Tales argumentos están relacionados íntimamente con las experiencias previas al momento de hacer la afirmación, además de que esta, hasta antes de proporcionar argumentos deductivos (es decir una demostración), es una conjetura [...]. Es importante recalcar que no se puede probar conscientemente algo si antes no fue conjeturado. (Larios, 2001, p. 50).

Este trabajo de búsqueda y formulación de la conjetura ha de distinguirse, como se señala más adelante, con el trabajo de búsqueda de los argumentos que la sustentan; son dos procesos distintos aunque necesariamente relacionados.

El tercer momento de esta etapa tiene que ver con el análisis lógico, en términos de la naturaleza bipartita de los enunciados en matemáticas, particularmente de la estructura si-entonces del tercer enunciado. Esto es, reconocer que tanto el antecedente como el consecuente son proposiciones, además que el antecedente corresponde a la(s) premisa(s), mientras que el consecuente corresponde a la conclusión. Se comprende así que el tercer

enunciado es otra proposición cuya operatividad está ligada a la articulación entre el antecedente y el consecuente.

*Segunda etapa.* Aquí se busca identificar los procedimientos heurísticos asociados a la resolución de un problema en geometría; además, permite caracterizar la dinámica de una clase que permita la discusión. En este sentido, esta etapa se divide en dos momentos:

El primer momento, discusión y búsqueda de propiedades, delimita lo que se requiere para que un estudiante acceda a la demostración, esto es, trata de establecer, entre las distintas formas en las que dicho estudiante aborda un problema geométrico, aquella en la cual la demostración tiene lugar. En ese sentido, Balacheff (2000) caracteriza tres tipos de situaciones inducidas por las actividades sugeridas a los estudiantes: la esfera de práctica, las situaciones de decisión y las situaciones de validación. En el primer tipo se trabaja de forma mecánica aplicando los conocimientos adquiridos, lo cual no genera nuevos conocimientos; en el segundo tipo se construyen conjeturas con el fin de diseñar estrategias que lleven a la resolución de una situación problema y en el último tipo el estudiante socializa sus explicaciones acerca de una afirmación, lo cual se aproxima a la demostración. Balacheff (2000) distingue dos tipos de pruebas que le permiten al estudiante convencer y convencerse acerca de una conjetura; estas se conocen como las formas pragmática e intelectual de abordar un problema geométrico.

El segundo momento, puesta en común, se inicia al señalar que un primer diagnóstico acerca de cuáles podrían ser los orígenes de la dificultad para enseñar y aprender la demostración en matemáticas ha sido formulado en términos de la naturaleza del contrato didáctico que emerge naturalmente de las posiciones del alumno y el docente con respecto a los saberes en juego. Dado que el docente es el garante de la legitimidad y de la validez epistemológica de lo que se construye en la clase, eso parecería implicar que el alumno se vería privado de un acceso auténtico a una problemática de la verdad y de la prueba. La superación de esta dificultad inherente a los sistemas didácticos puede ser investigada en situaciones que permiten la devolución a los alumnos de la responsabilidad matemática sobre sus producciones, lo que significa la desaparición del docente de los procesos de toma de decisión durante la resolución de un problema en favor de un esfuerzo de construcción de medios autónomos de prueba por parte de los alumnos.

*Tercera etapa.* Esta última etapa apunta a la comprensión y puesta en escena del funcionamiento del razonamiento deductivo, a través de dos

momentos: la construcción de grafos proposicionales y redacción de la demostración. Lo que se pretende establecer en esta etapa es la diferenciación entre valor epistémico teórico y valor epistémico semántico de una proposición. Partiendo de este principio fundamental, el alumno descubre y comprende el funcionamiento del razonamiento deductivo pasando por un registro no discursivo: los grafos proposicionales.

El primer momento propone que un grafo ha de definirse como un registro no discursivo que privilegia la aprehensión sinóptica o vista global de las proposiciones que intervienen en la demostración, al organizarlas de acuerdo con su estatus operatorio. Es así como los grafos proposicionales aparecen en esta perspectiva de trabajo en la enseñanza de la demostración como un registro de representación que apoya la comprensión de aquello que es objeto de análisis en un razonamiento. Su uso se basa en el hecho de que para comprender lo que una representación discursiva presenta (enunciado en lengua natural) es necesario el paso por una representación no discursiva (Duval, 2004b). La construcción de dichos grafos se rige por las siguientes reglas: de una hipótesis parte una flecha (no llega), del y al tercer enunciado parten y llegan flechas, y llega una flecha a la conclusión, siempre y cuando sea la conclusión final, en el caso contrario, parte una flecha.

El segundo momento, redacción de la demostración, es necesario, dado que permite que los valores epistémicos teóricos se diferencien de los valores epistémicos semánticos y que estos últimos ya no se asimilen a los valores de verdad; la redacción en lengua natural de la demostración se presenta como una traducción del grafo, privilegiando actitudes proposicionales que marcan el estatus operatorio de las proposiciones.

Para lograr que la propuesta didáctica planteada anteriormente se pueda aplicar en el aula se establece como intención primordial construir un manual para uso de docentes en ejercicio, el cual deberá funcionar como vínculo entre las investigaciones aquí retomadas y la práctica escolar.

## **METODOLOGÍA DEL TALLER**

Se propone que el taller se realice en dos sesiones. La primera sesión se dividirá en dos partes: una que presente los elementos teóricos de esta investigación que tienen que ver con los propósitos y la metodología que se utilizó; el tiempo para esta parte será de 25 a 30min. En la segunda parte se presentará la propuesta de Duval-Egret (1993), pues en torno a esta, se gira la reflexión del trabajo. Dado que esta propuesta se divide en tres etapas,

para cada una de ellas se propondrá una actividad para que la desarrollen los participantes (60 min).

La segunda sesión se dividirá en cuatro momentos: análisis de los elementos teóricos a partir de las respuestas dadas por los participantes (20-25min); reflexión y debate sobre dichas respuestas, explicitando cómo se articulan curricularmente desde los Estándares, las etapas propuestas con los niveles de escolaridad (35-40min); presentación del manual como opción para llevar al aula esta propuesta sobre la enseñanza de la demostración con el respectivo debate (20-25), y, por último evaluación de la actividad por parte de los participantes (10-15 min).

### REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Balacheff, Nicolas. (2000). Procesos de prueba en los alumnos de matemáticas. Una empresa docente. Bogotá: Universidad de los Andes.
- Duval, R. & Egret M. (1993) Introduction à la démonstration et apprentissage du raisonnement déductif. Lille: IREM 12.
- Duval, Raymond. (2004b) Semiosis y pensamiento humano, Registros semióticos y aprendizajes intelectuales. Santiago de Cali: Peter Lang.
- Larios Osorio, Victor. (2001). Demostraciones y conjeturas en la escuela media. Revista electrónica de Didáctica de las Matemáticas, 3, 45-55. Obtenido en la red mundial en octubre de 2001: <http://www.uaq.mx/matematicas/redm/art/a0703.pdf>
- Ministerio de Educación Nacional. (2006). Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas. En MEN, Estándares Básicos de Competencias en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas. Bogotá: MEN.
- Ponce de León, Pilar. (2007). Enseñanza inicial de la demostración matemática en la educación básica desde una perspectiva cognitiva. Santiago de Cali: Grupo de Educación Matemática, Universidad del Valle.