http://dx.doi.org/10.5007/1981-1322.2016v11nespp162

Crises e Incompletudes, Multi-histórias Matemáticas

Crises and incompleteness, Mathematical Multi-stories

Isabel Cafezeiro
isabel@dcc.ic.uff.br

Ricardo Kubrusly
risk@hcte.ufrj.br

Ivan da Costa Marques
imarques@ufrj.br

Narrira Lemos de Souza
narrira.ufg@gmail.com

Sicleidi Valente dos Santos Britto
sicleidi@gmail.com

Resumo

Este texto considera episódios referidos como crises da matemática e, seguindo também os cantos da Ilíada e suas narrações de crises, aborda a compreensão de conceitos matemáticos sob pontos de vista diversos. A partir daí, questiona a abordagem da matemática como uma história única e linear, e argumenta pela abordagem de multi-histórias, ou seja, a convivência de reconstruções mesmo que conflitantes, tendo em vista que cada reconstrução traz, além das concepções históricas e matemáticas da época considerada, as concepções vigentes no tempo-espaço do relato. O conjunto destas multi-histórias ampliam as possibilidades de compreensão de conceitos porque deixam à vista uma rede de relacionamentos que participam das formulações e conceitos matemáticos.

Palavras-chave: Matemáticas; Multi-histórias; Crises.

Abstract

This paper considers episodes of mathematical crisis, and following the poetry verses of the Iliad and their narrations of crises, addresses the understanding of mathematical concepts under different points of view. From there, this paper questions the mathematical approach as a single and linear history, and argues for the multi-story approach, ie the coexistence of even conflicting reconstructions, considering that each reconstruction brings, beyond historical and mathematical concepts from the time considered, the views prevailing in the space-time of the report. All these multi-stories expand the possibilities of understandings of concepts because they bring light to a network of relationships that participate in the mathematical formulations and concepts.

Keywords: Mathematics; Multi-stories; Crisis.

> Canta, ó deusa, a cólera de Aquiles, o Pelida
> (mortífera! Que tantas dores trouxe aos Aqueus
> e tantas almas valentes de heróis lançou no Hades,
> ficando seus corpos como presas para cães e aves
> de rapina enquanto se cumpria a vontade de Zeus),
> desde o momento em que primeiro se desentenderam
> o Atrida, soberano dos homens, e o divino Aquiles.
> Canto I, Ilíada

Considerando que a formação do conhecimento moderno está sempre a nos conduzir a um modo de pensamento totalizador e dirigido por padrões, ressaltamos aqui algumas questões que nos parecem importantes para a compreensão do que hoje se costuma chamar *a matemática*: um corpo de conhecimentos cuja origem remonta dos tempos dos povos egípcios e babilônios e cujo desenvolvimento situou-se no entorno do Mar Mediterrâneo, estendendo-se nos últimos séculos para alguns países centrais da Europa, ou extra-Europa, como os Estados Unidos. Ou seja, nos referimos aqui à *matemática legitimada*, hoje praticada nos mais prestigiados centros e institutos avançados de produção de conhecimento matemático do mundo.

O que nos leva a esta reflexão é o percurso histórico usualmente referido por "crise dos fundamentos da matemática", um período de controvérsias que se inicia em meados do século XIX e tem nos Teoremas de Gödel, de 1931, um momento de grande visibilidade (CAFEZEIRO; HEAUSLER; CUKIERMAN; MARQUES, 2010). Buscamos fazer aqui uma abordagem da *crise* em seu caráter produtivo, ou seja, enquanto geradora de um espaço multi-histórias. Para isso, partimos do episódio desencadeado por *Crises*, na Ilíada, canto I, e nos amparamos em diversos momentos de controvérsias que se seguem nos demais cantos que compõem o poema[1]: No décimo ano da Guerra de Troia, o arrogante Agamenon (no trecho transcrito acima, o Atrida, filho de Atreu), Rei de Micenas e grande comandante grego, recebe como prêmio de guerra uma moça chamada Criseida. Aquiles, o grande guerreiro grego, (no trecho transcrito acima, o Pelida, filho de Peleu), também recebe prêmio: a moça Briseida. Mas Crises, pai de Criseida, reclama a volta da filha, oferecendo em troca um resgate. Agamenon recusa o resgate e insulta Crises. Como sacerdote de Apolo, Crises recorre ao Deus, pedindo que interfira. Apolo atende e lança sobre os aqueus (gregos antigos) uma peste de modo a forçar Agamenon a devolver a moça. Nisso, Aquiles, preocupado com os estragos da peste, consulta o vidente Calcas, que então lhe conta sobre a ira de Apolo e lhe indica a urgência de devolver Criseida. Começa então, em plena guerra de Troia, uma contenda entre os gregos Aquiles e Agamenon: para devolver Criseida, Agamenon reivindica Briseida. Aquiles perde Briseida e raivoso, abandona a guerra, colocando a Grécia em risco. Recorre então à sua mãe, Tétis, que pede a Zeus que interceda, fazendo os troianos vencerem para forçar o entendimento entre Agamenon e Aquiles.

A crise desencadeada neste episódio da troca das moças é parte de uma intrincada rede

[1] Cabe aqui um agradecimento muito especial ao Professor Titular Emérito da Faculdade de Letras da UFRJ Edwaldo Cafezeiro, não somente pela ajuda na leitura e interpretação da Ilíada, como também pela ideia inspiradora de abordar a crise a partir deste poema.

de interesses cuja compreensão demanda o conhecimento de questões referentes à dinâmica daquela sociedade naquele tempo. Assim também, a crise da fundamentação da matemática não se resumiu em uma questão isolada, em uma traquinagem da matemática. A Incompletude de Gödel configurou mais uma dentre muitas evidências que se desenrolaram a partir da segunda metade do século XIX, de que a racionalidade moderna já não mais dava conta de expressar questões que se apresentavam aos matemáticos em seu espaço-tempo, como por exemplo, a compreensão da representação e do potencial da linguagem. Tomamos aqui o cuidado de ressaltar que estas não eram preocupações exclusivas dos matemáticos na Europa da década de 1930, mas também se faziam presentes em campos distintos, como nas artes, como verificamos na obra de Artaud (GADELHA et al, 2016). Está aí uma evidência de que compreender a crise dos fundamentos vai bem além de abordar as questões matemáticas que intrigavam a comunidade de matemáticos. É necessário considerar a conjuntura, ou seja, abordar momento, local e dinâmica daquela sociedade.

As questões que vinham sendo apresentadas por matemáticos aderentes à ordem legitimada e que buscavam o fortalecimento desta mesma ordem despertaram para aquela comunidade a necessidade de uma nova formulação de conceitos que permitissem operar em terrenos que antes não eram considerados pertencentes ao escopo da matemática. De forma bem ampla, eram questões que exibiam grande aderência com leituras subjetivas, proximidade com coisas mundanas, fronteiras percebidas como inexatas, ou necessidades de expressões não capturadas pelo modo dicotômico e totalizador da época, que se expressavam matematicamente em paradoxos e problemas em aberto.

Os chamados "movimentos de fundamentação da matemática" já vinham, desde o final do século XIX, buscando um tratamento considerado suficientemente rigoroso para lidar com estas coisas que emergiam nas mentes dos matemáticos e que ainda não se mostravam resolvidas do ponto de vista matemático. Havia uma grande expectativa de que a matemática resolveria qualquer questão do seu próprio escopo, como o grande matemático David Hilbert deixava claro:

> Um exemplo do tipo de questões fundamentais é a tese de que todo problema matemático é solucionável. Estamos todos convencidos de que realmente é assim. Na verdade, uma das principais atrações em enfrentar um problema matemático é sempre ouvir este grito dentro de nós: Existe um problema, encontre a resposta; você pode encontrá-la pelo pensamento puro, pois não há *ignorabimus* em matemática. (HILBERT, 1925, s.p., trad. nossa)

Entretanto, Kurt Gödel, em 1931, trabalhando com uma versão do paradoxo do mentiroso, demonstrou a incompletude da matemática: a impossibilidade de um sistema formal suficientemente expressivo provar a totalidade de enunciados que ele mesmo é capaz de expressar. Como reação ao Teorema de Gödel, os propositores dos movimentos de fundamentação lançaram mão de recursos na própria racionalidade matemática para construir justificativas e mecanismos visando resolver as controvérsias e garantir o privilegiado lugar matemático como rainha das ciências.

Mas se a crise não residiu propriamente nas construções matemáticas, não foi tampouco uma questão externa à matemática. A crise configurou-se no encontro de tudo isso: na expectativa sedimentada ao longo de muitos séculos de que a matemática ocuparia o lugar de um saber totalizador, regulador da certeza e da verdade. É como na Ilíada: a crise não se resolveu por completo nem no terreno dos homens, nem tampouco por ação dos Deuses. A contenda entre Agamenon e Aquiles se desenrolou no encontro cruzado, uma cena onde o capricho dos Deuses causava desfechos decisivos, mas era também decisivamente motivada pelos caprichos dos humanos. Sob o consentimento de Zeus, ou a despeito da ordem de não interferir, os Deuses tomaram partido e interferiram na guerra sangrenta. A crise dissolveu-se com a morte de Pátroclo, amante de Aquiles. Muito debilitado pela perda do amigo, Aquiles reconciliou-se com Agamenon, recebendo Briseida de volta e pondo fim àquela contenda.

Queremos ressaltar que a crise traz à luz um espaço de hibridismo (encontro de diferentes). Entretanto, na cena matemática do século XX, em meio ao furacão da década de 30, Paul Bernays, assistente e colaborador de David Hilbert, defendeu que "[A]s ciências matemáticas estão crescendo em total segurança e harmonia. As ideias de Dedekind, Poincaré e Hilbert foram sistematicamente desenvolvidas com grande sucesso, sem qualquer conflito nos resultados. É apenas do ponto de vista filosófico que objeções foram levantadas." (BERNAYS, 2016, p. 2, trad. nossa). Buscando garantir um território limpo e seguro para a matemática, Bernays encaixotava e isolava as controvérsias no domínio da filosofia. Foi uma contribuição para assegurar o território da matemática legitimada, e situar na condição de invisibilidade (enquanto matemática) qualquer abordagem que escapasse a esse modo de pensar. Hoje acompanham esses argumentos de afirmação da disciplinaridade as declaradas antipatias às traduções dos resultados matemáticos para domínios não formais. Por exemplo[2], com relação aos teoremas de Gödel, um certo autor toma para si a tarefa de identificar o que

[2] Outros autores que criticam as interpretações da Incompletude consideradas "fora do campo da matemáticas" são bem conhecidos. Feferman, por exemplo, no campo da computação, defende o que seria "o verdadeiro entendimento" dos teoremas de Gödel (FEFERMAN, 2016, p.10, trad. nossa), e critica abordagens de outros matemáticos, filósofos e pós-modernistas. Os cientistas Sokal e Brickmont também tomaram para si o papel de guardiões do pensamento hegemônico e da verdade fixada, fazendo críticas severas ao que consideraram abusos reiterados no campo da física e da matemática: "Nosso objetivo não é, portanto, zombar dos críticos literários que cometem erros ao citar a relatividade ou o teorema de Gödel, mas defender os cânones da racionalidade e honestidade intelectual que são (ou deveriam ser) comuns a todas as disciplinas acadêmicas." (SOKAL; BRICKMONT, 1999, p. 7, trad, nossa)

seriam “abusos” dos Teoremas de Gödel e afirma: “Muitas referências aos teoremas da incompletude fora do campo da lógica formal são obviamente absurdas e parecem basear-se em grosseiros mal-entendidos ou algum processo de livre associação” (FRANZÉN, 2005, p. 2, trad. nossa). É um duplo movimento de demarcação de território: um campo onde só transitam matemáticos, e do qual não se admite apropriações por outros domínios. Um movimento de limpeza e purificação, que ofusca o intrincamento, o hibridismo.

Mas se alguns insistem que a matemática seja identificada com certeza, com o que é determinado, exato, puro (não híbrido) e cujas questões podem ser decididas inequivocamente, este universo que quer se manter seguro de suas verdades só pode ser extremamente rarefeito, já que seus elementos são enumeráveis, isto é, correspondem bi-univocamente aos números inteiros. Por exemplo, a maioria da infinidade de números reais entre 1 e 2 não é calculável já que somente uma infinidade pouco densa deles, restrita aos inteiros e aos racionais, é enumerável. E nenhum procedimento computacional poderá jamais completar a expressão de um irracional, como a raiz quadrada de 2. É aceitável que qualquer cômputo seja uma aproximação imperfeita de seu valor ‘irracional’. Mas existe alguma maneira sistemática de distinguir entre aqueles cômputos que chegam a um resultado determinado daqueles que vão adiante para sempre? Sabemos que a resposta contemporânea a esta pergunta é ‘não’.[3] Decorre daí que não é possível construir um método sistemático para separar os cômputos que dão uma resposta daqueles que nunca param. Isto significa que uma série de questões aparentemente simples sobre os cômputos não são com certeza determinadas, exatas, puras (não híbridas) e possam ser univocamente decididas sem que haja uma convenção (um acordo social) sobre elas. Donald MacKenzie fez um primoroso estudo empírico em que mostra como esta certeza estava ausente e não pode ser evocada para resolver controvérsias na implementação da aritmética de números fracionários (ponto ou vírgula flutuante) nos computadores, controvérsias que foram resolvidas por convenção nas últimas décadas do século XX. (MACKENZIE, 1996)

Foi dito aqui que a reconciliação de Aquiles e Agamenon pôs fim àquela contenda. Restaurou a normalidade que, naquele contexto, era a continuação da guerra de Tróia que já se alongava por dez anos. No entanto, a morte de Pátroclo, desencadeou nova crise dirigindo a

[3] Formalmente, “Seja a lista de todos os programas de computador em ordem alfabética. Seja P_x o x-ésimo programa nesta lista e seja $P_x(y)$ o cômputo executado por P_x com entrada y. Consideremos os seguintes questões: (a) Decidir, para qualquer x, se P_x calcula uma função constante; (b) Decidir, para quaisquer x e y, se y está no contradomínio de P_x; (c) Decidir, para quaisquer x, y e z, se $P_x (y) = z$; (d) Decidir, para quaisquer x e y dados, se $P_x = P_y$; (e) Decidir, para qualquer x, se P_x tem contradomínio infinito. .... (g) Para qualquer n dado, decidir, para qualquer y, se y está no contradomínio de P_n. **Teorema**: Os problemas (a), (b), (c), (d) e (e) são recursivamente insolúveis. O problema(g) pode ou não ser recursivamente insolúvel dependendo da escolha de n.” (ROGERS, 1967, p.33).

ira de Aquiles a Heitor, este último, co-responsável (junto com Euforbo) pela morte de Pátroclo. Da mesma forma, já dissemos que a crise dos fundamentos não encontrou soluções nos programas de fundamentação da matemática, porém, o reconhecimento daquela conjuntura como uma situação problemática contribuiu para abrir espaço a novas concepções que poderiam se radicalizar a ponto de pôr em cheque convicções firmemente assentadas. Foi uma abertura para o surgimento de novas expressões de propostas matemáticas que ainda hoje não estão bem digeridas pelos matemáticos legitimistas[4].

Chamando de *crise* os momentos de tensão, ou resistência à aceitação de novas ideias, podemos verificar ao longo do processo histórico de construção da matemática hegemônica (legitimada) que, assim como a crise dos fundamentos do início do século XX, diversas outras *crises* da matemática não se resolveram nas justificativas racionais do próprio campo de conhecimento, mas abriram espaço a novas concepções que renovaram o campo. Daí, estendemos o termo “incompletude” para indicar situações em que a expressão de um conhecimento não seja capaz de abraçar a totalidade das coisas mencionáveis no próprio campo, e que ele pretende explicar. Crises e incompletudes são, aqui para nós, a mesma coisa: situações em que a linguagem aceita por um coletivo evidencia a sua impossibilidade de abraçar ideias novas, e entra em conflito com a expectativa de completude, totalidade. Da crise, nasce um outro cenário que, de alguma forma acomoda o novo, e força a reordenação do que já estava estabelecido. Na Ilíada, a reconciliação entre Aquiles e Agamenon, dá início a uma nova batalha. Com o consentimento de Zeus, os Deuses se dividem e lutam em apoio aos gregos (Hera, Atena, Posêidon e Hefestos) ou troianos (Ares, Apolo, Ártemis, Afrodite e Xanto). Enfraquecido pela morte de Pátroclo, mas fortalecido por Atena, Aquiles mata Heitor e exibe seu cadáver sobre o túmulo de Pátroclo. Diante da tristeza do pai (o rei Príamo) Zeus interfere: pede a Tétis que converse com Aquiles para que ele devolva o corpo de Heitor a seu pai. Assim termina a Ilíada, começa a Odisséia, um relato não mais centrado nas batalhas da guerra, mas nas aventuras de Ulisses, e no drama de sua esposa Penélope. Neste outro poema, as intrincadas tramas que conformam as crises se fazem presentes no tear de Penélope. São redes heterogêneas e altamente instáveis, mas que, apenas provisoriamente alcançam estabilidade: desmancham-se à noite, refazem-se de dia, dando tempo a Ulisses para que volte à sua casa.

> ‘Jovens Pretendentes! Visto que morreu o divino Ulisses,

[4] Como uma fonte de exemplos de propostas de matemáticas que confrontaram com a matemática legitimada indicamos o livro de Tymoczko (1998), publicado ao final da década de 1970 como resultado de um seminário agregando matemáticos e filósofos “frustrados pela inabilidade da tradicional formulação filosófica em articular a experiência dos matemáticos”. (TYMOCZKO, 1999, p ix, prefácio, trad. nossa).

> tende paciência (embora me cobiceis como esposa) até terminar
> esta veste – pois não quereria ter fiado a lã em vão,
> uma mortalha para o herói Laertes, para quando o atinja
> o destino deletério da morte irresistível,
> para que entre o povo nenhuma mulher me lance a censura
> de que jaz sem mortalha quem tantos haveres granjeou'
>
> Assim falou e nossos corações grandiosos consentiram.
> Daí por diante trabalhava de dia ao grande tear,
> Mas desfazia a trama à luz das tochas.
> Deste modo, durante três anos enganou os Aqueus.
> Canto II, Odisséia

Pitágoras e os irracionais

Conta-se que no século 5 a.C., um discípulo de Pitágoras, Hipaso de Metaponto, percebeu que a comparação entre os lados iguais e o desigual de um triângulo isósceles não poderia ser expressa por uma razão. Evidenciou-se ali uma *incompletude*: uma medida que não era um número! A expectativa entre os pitagóricos, era que a essência de todas as coisas do mundo fossem números (naturais), e portanto, tal evidência desencadeou uma *crise.* Na impossibilidade de encontrar na matemática um desfecho para a crise, a solução parecia ter sido encontrada no silêncio: havia entre os pitagóricos uma regra que estabelecia a não divulgação das questões trabalhadas no grupo. Hipaso de Metaponto descumpriu a regra. Para o que se seguiu, há diversas versões envolvendo a morte de Hipaso. Uma versão conta que ele morreu por afogamento, por ordem de Pitágoras (SINGH, 1997, p. 69), outra afirma que ele teria sido banido do grupo e simbolicamente enterrado em um túmulo fictício (BOYER, 1999, p. 49). Mas a incompletude teria mostrado aqui o seu lado fértil: abriu caminho para a construção dos irracionais.

Há controvérsias: alguns autores rejeitam a associação entre a visão *filosófica* dos pitagóricos de que "tudo é um número" e a prática de associar números a segmentos ou áreas. Eles argumentam que o conceito pitagórico de *razão* remetia a subtrações sucessivas, um procedimento que não coloca a incomensurabilidade em conflito com os fundamentos da matemática daquele momento. Questionam também o episódio da morte em decorrência à quebra do silêncio, apontando reconstruções conflitantes. Daí, concluem que a percepção dos incomensuráveis não desencadeou nenhum estranhamento na matemática grega e nem causou a morte do discípulo, e que

> uma leitura mais apurada dos testemunhos mais antigos e das reconstruções racionais modernas coloca a história de uma crise dos incomensuráveis mais como uma criação historiográfica posterior do que como um relato fidedigno – tanto quanto isso é possível para a história – daquilo que aconteceu." (GONÇALVES; POSSANI, 2010, p. 21).

Antes, o historiador W. Knorr, especializado na matemática da Grécia antiga, já tinha situado a crise como uma "ficção moderna":

> Quando Tannery e Hasse e Scholz saltam à conclusão de que o incomensurável foi um contra-exemplo para o método geométrico Pitagórico, eles já estão, portanto, assumindo as teses da crise fundação. O lógico e o filósofo, e seguindo-se a eles, o historiador, devem reconhecer que tal resultado é paradoxal. E que isto *deveria* provocar uma crise nas fundações de um determinado campo da matemática. (KNORR, 2001, p.128, grifo do autor, trad. nossa).

Referindo-se principalmente à obra de P. Tannery de 1887, *La géométrie grécque*, Knorr argumentou que a construção moderna da crise grega por Tannery estava amparada em seus próprios esforços de busca por uma formulação lógica para o cálculo infinitesimal (KNORR, 2001, p.127), ou seja, completamente embalada nas discussões preliminares sobre a fundamentação da matemática da primeira metade do século XX. Assim, para valorizar seus próprios mecanismos, a modernidade inventa crises.

Euclides e o quinto postulado

A expressão demasiadamente complexa do quinto postulado de Euclides, em comparação à extrema simplicidade dos quatro anteriores levantou suspeitas de que Euclides haveria pensado neste enunciado como um teorema, e, percebendo a impossibilidade de prova a partir das definições, noções comuns e quatro demais postulados, teria optado por inserir este enunciado como o quinto postulado. Com isso, iniciou-se um debate que perdurou por muitos séculos sobre a possibilidade de dedução daquele enunciado, tornando incômoda a aceitação do enunciado como postulado:

> Euclides [...] sabia, ou logo percebeu, que a questão da unicidade das paralelas era, ou seria, polêmica, pois implicava a existência do ponto de encontro de duas quaisquer retas concorrentes, mesmo que este se encontrasse além dos limites do factível. Pode-se afirmar a existência de algo que não pode ser realizado dentro do universo inteiro? Esta era uma questão bastante delicada. Por outro lado, a veracidade do quinto postulado, jamais foi questionada, pelo menos até meados do século XIX. Era claro, que as nossas duas retas acabariam por se encontrar, num ponto teórico, que não precisava ser construído, pois tinha a sua existência garantida dentro do nosso pensamento. O que preocupava o velho Euclides, não era portanto a veracidade do seu quinto postulado, mas sua praticidade. Não era tão simples quanto os outros postulados que nunca geraram questões filosóficas, eram essencialmente auto-evidentes e nunca remeteram nossos pensamentos para o infinito.
>
> Estabeleceu-se então um consenso de que embora houvesse algum problema com o quinto postulado, sua veracidade era inquestionável. Tratava-se, muito provavelmente, não de um verdadeiro postulado, mas sim de um teorema, e como tal deveria ser demonstrado dentro da própria geometria, utilizando-se é claro, apenas a matemática gerada pelos quatro primeiros postulados. Nesta tarefa, a de provar o quinto postulado de Euclides, envolveram-se milhares de matemáticos durante mais de dois mil anos. Provas e mais provas iam surgindo, ficavam por um tempo com a fama e a glória de terem resolvido o maior desafio matemático que até então aparecera, para depois serem derrubadas, uma a uma, pela mente precisa e impiedosa da própria matemática. (KUBRUSLY, 2000, s.p.)

Também como uma incompletude, esta *crise* não residiu propriamente nas construções matemáticas, mas na expectativa de que toda a matemática daquele tempo-espaço fosse alcançada a partir das definições, noções comuns e postulados. Euclides (assim como Gödel viria a propor[5] cerca de 2000 anos mais tarde, já na crise da década de 1930) optou por transformar o enunciado im-provável em postulado. Novamente, a *crise* mostrou o seu lado produtivo, desencadeou o surgimento de geometrias não-Euclideanas, que desconsideram o enunciado imposto por Euclides de que, dada uma reta e um ponto fora dela, há apenas uma reta paralela à inicial que passa pelo ponto considerado:

> Há duas maneiras de negar a unicidade das paralelas no quinto postulado de Euclides: uma é supor que por qualquer ponto fora de uma reta dada, é possível passar pelo menos duas paralelas a esta reta; a outra é supor que nenhuma paralela é possível, isto é, que o espaço não admite paralelas. No primeiro caso, obteremos as chamadas geometrias hiperbólicas, no segundo, o espaço sem paralelas que é chamado de Geometria Elíptica. (KUBRUSLY, 2000, s.p.)

A invenção das Geometrias Não-Euclidianas não invalidou a Geometria Euclidiana. No que diz respeito às geometrias, a cena matemática dos dias de hoje é um espaço de multi-histórias matemáticas. De fato, a matemática contemporânea sugere que sempre se pode encontrar uma ordem, que com o aumento das escalas não se escapa das estruturas, e que a aparência de desordem é realmente uma questão de escala dos referenciais. Vejamos um exemplo ligado à teoria de Ramsey.

Se você escrever os números de 1 a 17 em qualquer sequência, sempre será possível extrair 5 números que formam uma sequência crescente ou uma sequência decrescente (uma estrutura, uma ordem) indo da esquerda para a direita ou da direita para a esquerda (os números extraídos para formar a sequência não precisam ser consecutivos, pode haver saltos). Mas isto não acontecerá necessariamente se você escrever somente 16 números. Por exemplo, não é possível extrair de

13 14 15 16 9 10 11 12 5 6 7 8 1 2 3 4

uma sequência de 5 números em ordem crescente ou decrescente indo da esquerda para a direita ou da direita para a esquerda. Mas esta situação muda se adicionarmos o número 17 em qualquer lugar da sequência original. Considere

13 14 17 15 16 9 10 11 12 5 6 7 8 1 2 3 4

[5] Em sua tese de doutorado, o matemático AlanTuring se utilizou de um procedimento matemático que afirmou ter sido sugerido por Gödel (1965). Consiste na inserção de uma sentença não derivável a partir de um Sistema como um axioma no próprio sistema: “Os bem conhecidos teoremas de Gödel mostram que todo Sistema de lógica é em certo sentido incompleto, mas ao mesmo tempo, isso indica meios pelos quais a partir de um sistema de lógica L um outro Sistema mais completo L’ pode ser obtido. Repetindo o processo alcançamos a sequencia L, L1 = L’, L2 = L1’ , L3 = L2’,. . . de lógicas, cada uma mais completa do que a precedente. (TURING, 1938, p.1, trad. nossa)

Com efeito, agora muitas sequências podem ser extraídas. Da mesma forma se escrevermos 101 números em qualquer ordem será sempre possível extrair uma sequência crescente ou decrescente de 11 números. Este resultado pode ser generalizado:

Teorema: De uma sequência de comprimento de $n^2 + 1$ números será sempre possível extrair uma sequência crescente ou decrescente de comprimento $n + 1$. Isto não acontece para sequências de comprimento n^2.

A teoria de Ramsey sugere que se pode encontrar uma forma matemática dada (pelo menos duas paralelas; nenhuma paralela) se o universo for suficientemente ampliado. Ou, colocado diferentemente, que universos suficientemente grandes sempre podem conter dadas histórias, formas ou processos de ordenamento (provisionais, parciais, rarefeitos). Ou ainda, que é sempre possível destacar muitas histórias de um universo que seja suficientemente amplo. Ela sugere que um universo contratual suficientemente aumentado garantirá a presença de uma dada configuração de relações entre os agentes. Em suma, a teoria de Ramsey sugere algo que está bem estabelecido no campo dos chamados *Science Studies*: *os tipos de ordem que podem ser encontrados ou construídos dependem de e mudam com o escopo e a escala.* Portanto a matemática tem um também um potencial subversivo ao indicar que outras ordens podem ser feitas: se o universo relacional aumenta, então outras ordens, ordens mais desejáveis por um número maior de pessoas, poderiam entrar em cena com novas entidades (sujeitos, objetos e instituições) (DA COSTA MARQUES, 2008).

George Cantor e os infinitos

Uma questão de "dignidade do intelecto humano". É como Hilbert (1925, s.p., trad. nossa) situa, em seu discurso de 1925, a urgência de decifrar o infinito: "Desde tempos imemoriais, o infinito provocou emoções mais do que qualquer outra questão. Dificilmente qualquer outra ideia estimulou a mente tão frutiferamente" (HILBERT, 1925, s.p., trad. nossa). Boyer (1999, p.394), e também Gazalé (2000, p.270) falam de "horror infiniti". O último autor remete à Aristóteles: "Infinito não é perfeição. É privação. Ausência de limite" (GAZALÉ, 2000, p.270, trad. nossa). Já na antiguidade, Zenão de Eléia, explorando a ideia do infinito, havia concluído que o movimento é uma ilusão (GAZALÉ, 2000, p.269). O conflito com a experiência vivida fez da história do infinito uma história de paradoxos. Séculos mais tarde, o paradoxo de Galileu mostrou também o conflito com a nossa intuição, pois é muito estranho pensar que o conjunto dos números inteiros tem a mesma quantidade de elementos que a dos quadrados perfeitos, uma vez que o primeiro conjunto tem infinitos números a mais que o segundo (isto é, todos aqueles que não são quadrados perfeitos). A noção do infinito traz em si uma natureza contraditória à nossa intuição e à nossa experiência com conjuntos finitos, onde o todo é sempre maior que as suas partes. Por causa disso, nos Diálogos sobre duas Novas Ciências, na fala de Salviati, Galileu apenas reconheceu que o infinito se comporta de maneira diferente do finito: "deste engenhoso argumento se conclui que *os atributos igual, maior e menor não têm sentido para quantidades infinitas, mas somente para quantidades finitas*" (GALILEI, 1638, p. 15, adapt. nossa). Em tempos de inquisição, Galileu decidiu que o melhor a fazer seria evitar as provocações do infinito.

Foi apenas no final do século XIX que o infinito, enquanto totalidade (o infinito atual) foi definido e matematizado por Georg Cantor. Segundo ele, o infinito atual pode manifestar-se sob três formas distintas: O infinito absoluto, o transfinito como concretude e o infinito em abstrato. O infinito absoluto reflete a infinitude de Deus ou de seus atributos, o que não podemos estudar. O transfinito como concretude se manifesta na qualidade da totalidade das criaturas de Deus. E o infinito em abstrato, o infinito que a matemática pode tratar, é a teoria de números transfinitos, por ele desenvolvida, que segundo David Hilbert (1925) seria "o mais refinado produto do gênio matemático". Cantor, muito religioso, acreditava que sua teoria lhe fora revelada por Deus, e junto com Dedekind, reportou ao mundo a revelação divina traduzida em suas construções matemáticas:

> Cantor e Richard Dedekind definem o infinito positivamente pela primeira vez. Até então, o infinito era definido como o que não era finito. A partir de então, uma coleção é infinita quando ela tem o mesmo tamanho de uma parte própria dela mesmo. Ou seja, o que todos enxergaram como paradoxo, para Cantor e Dedekind era o que caracterizava as coleções infinitas. Uma das características mais interessantes das obras de Cantor é a naturalidade com que o infinito é tratado. Assim como, naturalmente, contamos os conjuntos finitos, Cantor passa a contar os conjuntos infinitos. E comparando o conjunto dos números naturais com o conjunto dos racionais, prova que eles têm o mesmo tamanho. Isto porque conseguimos estabelecer uma relação de um para um (bijetiva) entre os dois conjuntos. O fato de existirem infinitos números racionais entre quaisquer dois números naturais subsequentes (por exemplo, entre 0 e 1) nos leva a intuir que existem mais números racionais do que naturais. Mas, ele demonstrou matematicamente que nossa intuição nos engana! Depois, ao comparar o conjunto dos números naturais com o conjunto dos números reais, demonstrou que o segundo era maior que o primeiro. E que, portanto, havia infinitos de tamanhos diferentes, isto é, um infinito maior que o outro. (BRITTO, 2013)

As traquinagens do infinito surpreenderam Cantor: "Vejo, mas não acredito!" (GOUVÊA, 2011, p.207, trad. nossa), expressou em carta a Dedekind ao perceber a bijeção entre os pontos do intervalo entre zero e um, e o produto cartesiano de muitas ocorrências deste mesmo intervalo. Para alguns autores, Cantor, estupefato, duvidou de suas próprias provas, o que consistiria uma evidência de que a racionalidade matemática conduz a mente humana à descoberta de verdades inesperadas, coisas que estão no mundo mas as mentes não se dão conta, a não ser quando "bem conduzidas" pelo raciocínio matemático: "é certo que

Georg Cantor não poderia ter previsto um resultado do qual ele mesmo diz: 'Vejo, mas eu não acredito'." (HADAMARD, 1945, p. 61–62 *apud* GOUVÊA, 2011, p. 199, trad. nossa)

Mas Gouvêa (2011), fez uma releitura das cartas e apresentou uma outra compreensão deste mesmo episódio:

> (...) a famosa frase não fornece um exemplo de um matemático tendo dificuldades em convencer-se de seu próprio teorema. Cantor, de fato, estava confiante (überzeugt!) de que o seu teorema era verdade, como ele mesmo diz. (...) Ele sabia que seu teorema seria um resultado radicalmente novo e surpreendente e portanto era necessário ter uma prova suficientemente sólida. Por causa do erro anterior, Cantor tinha motivos para se preocupar com a correção de seu argumento, necessitando da confirmação por seu amigo. (GOUVÊA, 2011, p.207 trad. nossa)

Considerando o tom respeitoso com que Cantor, nos seus 27 anos, se dirigia ao quadragenário Dedekind, e ainda mais, o reconhecimento fortalecido pela percepção de Dedekind de um erro em carta anterior, Gouvêa argumenta:

> Cantor estava, de fato, em uma posição muito semelhante ao de um estudante que propõe um argumento, mas que sabe que a prova é o que convence seu professor. Embora não mais um estudante, ele sabia que a prova é o que iria convencer os outros e que, em Dedekind, ele tinha a pessoa perfeita para achar um possível erro. Daí, ele viu, mas antes da confirmação de seu amigo, ele não acreditou. (GOUVÊA, 2011, p.207, trad. nossa)

Essa outra história destitui da matemática o papel de reveladora das verdades do mundo e guia da "boa razão". Reposiciona a matemática como forma de expressão humana. Segundo esta concepção, as verdades já não estão mais espalhadas no mundo aguardando para serem descobertas pelos matemáticos, elas são construídas pelos humanos. Da mesma forma, destitui das provas o papel de garantia da verdade. Reposiciona as provas como instrumento de comunicação entre os matemáticos de forma a favorecer o convencimento a respeito de uma construção. Percebendo a importância de considerar a dinâmica social que este reconto traz à tona, Gouvêa conclui:

> O registro da conversa matemática entre Cantor e Dedekind nos lembra da importância dessa interação no desenvolvimento da matemática. A prova matemática é, antes de tudo, uma espécie de desafio lançado contra um adversário idealizado, um adversário cético, relutante em ser convencido. Muitas vezes, este adversário é um colega ou colaborador, o primeiro leitor e primeiro crítico. Uma prova não é uma prova antes que um leitor, preferencialmente um competente, diga que sim. Até lá, vemos, mas não devemos acreditar. (GOUVÊA, 2011, p. 208, trad. nossa)

Multi-histórias matemáticas

Um acontecimento, no mesmo momento em que se efetiva, também se dissolve, cedendo espaço a reconstruções (representações, narrativas). Estas, mesmo quando amparadas nos rastros materiais que perduraram, não são exatas: a representação nunca alcança seu objeto, *incompletude*! Assim, entendendo que o “fato” não se consuma de uma única maneira, optamos por abraçar as muitas narrativas, mesmo que conflitantes. Estas verdades, por vezes contraditórias, nos indicam que ao voltar os olhos ao tempo passado para fazer a reconstrução de um acontecimento, *sempre* incutimos neste reconto a história do tempo presente. Daí vemos que uma narrativa histórica, embora pretenda aparentar a linearidade da linha do tempo, *nunca* é linear, pois incorpora elementos do espaço-tempo de cada narrativa que participou da sua reconstrução. Isto acontece porque as reconstruções atendem a certos regimes de enunciação: a palavra dita sempre carrega as características do local e tempo onde é enunciada. Mais do que isso, a palavra só é dita porque há nesse local e tempo uma necessidade de produção de um corpo de verdades para fortalecer uma determinada configuração de poder: “A verdade é deste mundo; ela é produzida nele graças a múltiplas coerções e nele produz efeitos regulamentados de poder.” (FOUCAULT, 2013, p.52)

Os episódios aqui narrados, tanto quanto suas contestações, nos conduzem a uma abordagem da matemática visceralmente imersa na compreensão de uma configuração de poder. Não há “crise nos fundamentos da matemática”, nem “crise da matemática pitagórica”, nem “crise da geometria” e nem “crise na compreensão do infinito”. A crise está no encontro da matemática com as demandas da vida de cada momento, portanto e não se compreende como uma questão localizada em uma disciplina particular. Precisa ser entendida como um dispositivo, uma rede heterogênea e instável de relações onde se articulam poder, saber e efeitos de verdade, e que permite compreender a matemática como um campo de saber que se reconhece como articulador da verdade. (FOUCAULT, 2013, p.365).

É onde, também, nas restritas redes dessa matemática, como entidade, que a materialidade se sobrepõe ao erro humano: a bomba atômica – eis o cálculo correto, apenas o botão não deveria existir; as dicotomias políticas, as crises econômicas, as guerras, são elementos heterogêneos que, embora permeados pela matemática, supostamente, nada tem a ver com conhecimento, mas tudo com poder. Ainda, esses elementos poderiam ser, eles mesmo, matemáticos e, ao mesmo tempo, computadores, com tendões humanos, como os foram Norbert Wiener e Oswald Veblen, trabalhando em problemas matemáticos na I Guerra Mundial. (EDWARDS, 1995, p.53).

A compreensão das questões que se faziam presentes em cada época demandavam a construção de novos conceitos, os modos de pensamento vigentes já não mais davam conta de elaborar as situações emergentes. Afirmar a crise significa perceber a necessidade da construção de um novo conceito. Recusar a crise indica uma insistência em preservar a ordem vigente porque uma situação de crise tem sempre o seu lado produtivo. Isolar a crise em um certo domínio é uma estratégia para desmerecer qualquer tentativa de construção do novo que venha abalar a situação hegemônica.

Percebendo então as *crises* na matemática como intrincadas redes das quais fazem parte, além das construções matemáticas, coisas diversas de um certo tempo e lugar, e a incompletude como a impossibilidade da matemática resolver a crise em seus próprios termos; e também, reconhecendo que a *crise* é fértil, ou seja, que abre um espaço para a produção do novo, levantamos duas questões a partir das quais nos será possível passar falar de *matemáticas,* e portanto, considerar outras possibilidades de produção que se distanciam das práticas da matemática hegemônica e dos grandes centros universais de produção de saber.

A primeira questão é que a matemática é uma construção das pessoas em seus mundos, como decorrência das demandas do seu viver e da sua necessidade de compreender o seu tempo e o seu lugar, bem como da necessidade de conformação da sua própria identidade e da percepção de si próprio e de seu coletivo como sujeitos de seu mundo.

A segunda questão é reconhecer um percurso em direção ao fortalecimento da matemática legitimada como uma forma de saber distinta das demais, um conhecimento supostamente universal e neutro. Isto atribui um carácter inquestionável a qualquer argumento construído em bases ditas matemáticas e privilegia os sujeitos matemáticos, bem como as entidades que aderem à matemática (através de estatísticas, indicadores, etc).

Esta segunda questão se fortalece na negação da primeira: para assegurar uma certa configuração de poder em torno da matemática é necessário tornar imperceptíveis os vínculos com questões do tempo-espaço, omitir as ligações com os problemas que motivaram as construções matemáticas e enunciar a matemática de maneira esquemática de modo que se pareça limpa, clara, objetiva, exata, precisa, como um corpo de conhecimentos configurado de maneira que às pessoas caiba apenas a descoberta e nunca a invenção.

> Eu não tenho dúvida nenhuma de que a nossa presença no mundo, implicou indiscutivelmente a invenção do mundo (FREIRE, s.p.,2014)

Referências

BERNAYS, P. **Platonism in mathematics.** 1935. Bernays Project, texto 13. Disponível em: <http://www.phil.cmu.edu/projects/bernays/Pdf/platonism.pdf.> Acesso em: 01 maio 2016.

BOYER, C. **História da Matemática.** Editora Edgard Blücher LTDA, 1999.

BRITTO, S., A Justificação Finitista da Noção de Infinito Atual por Hilbert, In: CONGRESSO INTERAMERICANO DE FILOSOFIA, 17., 2013, Salvador, **Anais do XVII Congresso Interamericano de Filosofia**, Salvador: UFBA, 2013, p. 1-22.

CAFEZEIRO, I., HEAUSLER, E. H., CUKIERMAN, H., MARQUES, I. Recontando a Computabilidade. Revista Brasileira de História da Ciência*,* vol 3, 2010. pp. 231-251.

DA COSTA MARQUES, I. Metáforas matemáticas e enquadramentos políticos. In: CARVALHO, L. *et al* (Ed.). **História e Tecnologia no Ensino da Matemática** - Vol. II. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna Ltda., v.II, 2008. p.241-268.

EDWARDS, P. N. **The Closed World:** Computers and the Politics of Discourse in Cold War America. Cambridge, MA: MIT Press, forthcoming, 1995.

FEFERMAN, S. **Incompleteness:** The Proof and Paradox of Kurt Gödel, by Rebecca Goldstein. Disponível em: <http://math.stanford.edu/~feferman/papers/lrb.pdf.> Acesso em: 01 maio 2016.

FOUCAULT, M. **Microfísica do Poder**, São Paulo: Editora Graal, 2013.

FRANZÉN, T. **Gödel's Theorem:** na incomplete guide to its use and abuse. Massachusetts: A K Peters, 2005.

FREIRE, P. **Paulo Freire: entrevista [jul. 1996]**. Entrevistadores: D'Ambrosio, U., Mendonça, M. C., São Paulo: Casio Calculators. Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=245kJbsO4tE. Acesso em: 01 maio 2016. Entrevista concedida para a abertura do 8th Congress on Mathematical Education.

GADELHA, C., CAFEZEIRO, I., CHAITIN, V. O trágico e a cena contemporânea: por um encontro artístico-matemático. **Revista Coletânea**, no prelo, 2016.

GALILEI, G. **Discorsi e Dimostrazioni Matematiche intorno a due nuove scienze attenenti alla mecanica & i movimenti locali,** 1638. Disponível em: <http://www.fmboschetto.it/didattica/DimostrazioniMatematiche.pdf>. Acesso em: 01 maio 2016.

GAZALÉ, M. **Number, from Ahmes to Cantor**. New Jersey: Princeton University Press, 2000.

GÖDEL, K. On formally undecidable propositions of Principia Mathematica and related systems. In: DAVIS, M. (Ed), **The Undecidable:** Basic Papers on Undecidable Propositions, Unsolvable Problems and Computable Functions. New York: Dover Publications, 1965.

GONÇALVES, C.; POSSANI, C. Revisitando a descoberta dos incomensuráveis na Grécia antiga. **Revista Matemática Universitária**. São Paulo, v.47, n.3, p.16-24. 2010.

GOUVÊA, F. Q., **Was Cantor surprised?,** The Mathematical Association of America, Monthly 118, March, 2011.

HILBERT, D. On the Infinite (1925). In: BENECERRAF P.(Ed.). **Philosophy of Infinity.** Disponível em: https://math.dartmouth.edu/~matc/Readers/HowManyAngels/Philosophy/Philosophy.html.> Acesso em: 01 maio 2016.

HOMERO. **Ilíada**. Lourenço, F. (trad.) Lisboa: Editora Livros Cotovia, 2005.

HOMERO. **Odisséia**. Lourenço, F. (trad.) Lisboa: Editora Livros Cotovia, 2003.

KNORR, W. The impact of Modern Mathematics on ancient Mathematics. **Revue d'histoire des mathematiques**, Paris, vol 7, n.1, p 121-135, 2001.

KUBRUSLY, R. **Geometrias não Euclidianas.** Uma breve introdução às Geometrias Hiperbólicas. Disponível em: <http://www.im.ufrj.br/~risk/diversos/gne.html>. Acesso em: 01 maio 2016.

MACKENZIE, D. Negotiating Arithmetic, Constructing Proof. In: MACKENZIE, D. (Ed.). **Knowing Machines** - Essays on Technical Change. Cambridge, MA: The MIT Press, 1996. p.165-184.

ROGERS, H. **Theory of recursive functions and effective computability**. New York,: McGraw-Hill, 1967.

SOKAL, A.; BRICMONT, J. **Imposturas intelectuais**: o abuso da ciência pelos filósofos pós-modernos. Rio de Janeiro: Editora Record, 1999.

SINGH, S. O **último Teorema de Fermat.** Rio de Janeiro: Editora Record, 1997.

TANNERY, P. **La géométrie grecque**. Paris: Guathiers-Villars, 1887.

TURING, A. **Systems of Logic Based on Ordinals** (PhD thesis). Princeton University, 1938.

TYMOCZKO, T. (Org.) **New Directions in the Philosophy of Mathematics**. New Jersey: Princeton University Press, 1998.