Artigo

APLICAÇÃO DE UMA PROPOSTA PEDAGÓGICA NO ENSINO DOS NÚMEROS RACIONAIS[1]

Renata Cristina Geromel Meneghetti[2]
Augusto César Assis Nunes[3]

Resumo: Neste trabalho, discutimos sobre a fundamentação, elaboração, aplicação e avaliação de um material pedagógico desenvolvido como suporte para o processo de ensino-aprendizagem dos números racionais. O material consiste em atividades lúdicas e experimentais desenvolvidas de acordo com a proposta pedagógica de Meneghetti&Bicudo (2003)[4], e levando, ainda, em consideração alguns pressupostos da teoria construtivista. A aplicação desse material se deu numa 5ª série do ensino fundamental de uma escola pública brasileira. Dessa intervenção, conclui-se que a proposta pedagógica que estrutura o material possibilitou que trabalhássemos os aspectos subjetivo e objetivo do conhecimento (como posto na linha do construtivismo social) e mostrou-se eficiente do ponto de vista didático-pedagógico. O trabalho apontou ainda para a importância de haver uma harmonia entre os pressupostos teórico-filosóficos que embasam as diversas fases da pesquisa.

Palavras-chave: construtivismo, números racionais, aspectos intuitivo e lógico, ensino-aprendizagem de matemática.

INTRODUÇÃO E PRESSUPOSTOS TEÓRICOS

Até recentemente, a visão dominante em Educação Matemática assumia que, para haver aprendizado, era necessária apenas a efetiva transmissão do conhecimento matemático, tido como perfeitamente formado e plenamente acabado. Assumia-se que esse conhecimento já existia em toda a sua plenitude, e tudo o que deveríamos fazer era descobri-lo, fosse por meio dos nossos sentidos ou por meio de nossa razão (ERNEST, 1994). Foi a partir de 1980 que o construtivismo estabeleceu suas raízes na Educação Matemática, defendendo que *todo conhecimento é construtível e falível*, desafiando o Dualismo Cartesiano que por muito tempo dominou o pensamento ocidental (D'AMBROSIO & STEFFE, 1994).

O grande filósofo Kant (1724-1804) já havia dito que conhecer é uma função ativa do sujeito e que não podemos conhecer com necessidade e universalidade, portanto *a priori*, a não ser que nosso próprio espírito crie segundo seus níveis, e que, portanto, "*(...) a razão só entende aquilo que produz segundo os seus próprios planos (...)*" (KANT, 1997, p.18). O conhecimento matemático, na filosofia kantiana, é um conhecimento que se estabelece por construção de conceitos. Assim, em Meneghetti (2001) e Meneghetti & Bicudo (2003), destacamos que, no meio de posições filosóficas reducionistas que permearam a matemática de Platão ao início do século XX, Kant adota uma posição singular, ao defender que, embora a experiência por si só não seja suficiente para fundamentar o conhecimento, "*(...) estas condições subjetivas são, no entanto, substanciais na determinação da forma do objeto enquanto fenômeno*[5]". Dessa forma, observamos em Kant uma tentativa de se considerar, equilibradamente, na constituição do conhecimento ambos os

[1] Essa pesquisa teve apoio do CNPq (Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico- processo: 550857/01-0) e da FAPESP (Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo- processo: 02/03046-7.) Uma versão preliminar deste trabalho foi apresentada no V CIBEM (Congresso Ibero-americano de Educação Matemática) realizado em julho de 2005, na Faculdade de Ciência da Universidade de Porto- Portugal.

[2] Mestre e Doutora em Educação Matemática pela Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho-UNESP-Rio Claro.Docente do departamento de Matemática da Universidade de São Paulo- Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação-ICMC-USP. Caixa Postal 6680 Cep.: 13560-970-São Carlos-SP – e-mail: rcgm@icmc.usp.br. Coordenadora do Setor de Matemática do Centro de Difusão Cultural e Científica da Universidade de São Paulo- CDCC-USP.

[3] Graduação em Licenciatura Matemática. Foi bolsista de Iniciação Científica da FAPESP por dois anos, projeto: O Contrutivismo na Educação Matemática: em busca de compreensão, sob a orientação da Profa. Dra. Renata C.G. Meneghetti – processo nº 02/03046-7. Atualmente é Mestrando em Educação Matemática na UNESP de Rio Claro (processo seletivo 2005, com início em 2006). e-mail: augusto.cesar.nunes@gmail.com

[4] Meneghetti, R.C.G. & Bicudo "Uma discussão sobre a Constituição do Saber Matemático e seus Reflexos na Educação Matemática", *BOLEMA*, nº 19 - ano 16 – 2003 , p.67.

[5] O fenômeno é o objeto indeterminado de uma intuição empírica e é constituído de dois elementos: (i) a *matéria*: elemento físico que se encontra no espaço e no tempo; e (ii) a *forma* da intuição, a qual possibilita que o diverso do fenômeno possa ser ordenado. 02/03046-7

aspectos intuitivo e lógico. Portanto, à luz desse estudo histórico-filosófico a respeito da constituição do saber matemático, defendemos a proposta de que o conhecimento matemático, em sua constituição, deva se dar mediante um equilíbrio entre os aspectos intuitivo[6] e lógico[7], em níveis cada vez mais elaborados, e o processo pelo qual essa constituição se dá não é estático e, sim, dinâmico, tomando a forma de uma espiral, sendo necessário haver em cada um dos níveis dessa espiral um equilíbrio entre os aspectos lógico e intuitivo (MENEGHETTI & BICUDO, 2003, p. 67).

Essa proposta ganha respaldo das atuais correntes filosóficas da matemática que, entre outras colaborações, reconhecem a importância dos aspectos empíricos e intuitivos na constituição do saber matemático[8]. Além disso, há de se ressaltar que diversos trabalhos têm destacado aspectos que conectam a Filosofia e a História da Matemática com a Educação Matemática, mostrando-nos que tais campos científicos caminham podendo, algumas vezes, se influenciar mutuamente no desenvolvimento do saber matemático[9].

Além disso, quando direcionamos nosso olhar para o construtivismo, no contexto da Educação Matemática, percebemos uma grande afinidade dessa proposta com o que é posto no construtivismo social no que se refere aos aspectos subjetivo e lógico do conhecimento, a saber, que *o conhecimento subjetivo*[10] *relaciona-se com o conhecimento objetivo por meio de um ciclo criativo, através do qual cada um contribui para a criação e renovação do outro*. Nesse ciclo, o conhecimento matemático subjetivo, após um minucioso exame intersubjetivo, reformulação e aceitação, seguindo a heurística de Lakatos[11], torna-se conhecimento objetivo[12]. O conhecimento objetivo, por sua vez, é internalizado e reconstruído individualmente durante o aprendizado, tornando-se conhecimento subjetivo individual. Utilizando esse conhecimento, o indivíduo cria e publica novos conceitos, completando, desse modo, o ciclo (ERNEST, 1991).

Para Ernest (1991), há dois aspectos chave na construção de conhecimentos subjetivos, a saber: (a) uma construção ativa do conhecimento, normalmente de conceitos e hipóteses, com base nas experiências e conceitos prévios do indivíduo. Tal construção proporciona uma base para sua compreensão e serve como guia para as ações futuras; (b) um papel essencial desempenhado pela experiência na interação com os mundos físico e social. A experiência proporciona um conflito entre os resultados pretendidos e percebidos, o que leva a uma reestruturação do conhecimento, para proporcionar seu ajuste com a experiência.

Foi com base nesses pressupostos teóricos que elaboramos e aplicamos materiais didáticos para o ensino dos números racionais, como descrevemos a seguir.

SOBRE O MATERIAL DIDÁTICO: PROCESSO DE ELABORAÇÃO E ESTRUTURAÇÃO

Em 2002, vinculados a um projeto mais amplo[13], buscamos confeccionar kits experimentais para o ensino das ciências da natureza e da matemática. Nessa ocasião, formamos um grupo de pesquisa constituído de professores de matemática do ensino fundamental e médio e de alunos e professores de cursos de licenciatura em matemática do ICMC-USP e do Departamento de Matemática da UFSCar (Universidade Federal de São Carlos). O passo inicial para o trabalho desse grupo consistiu no levantamento, junto aos professores da rede (integrantes do grupo), de temas (que apresentavam maiores dificuldades de ensino); "números racionais" foi um dos temas escolhidos[14]. Buscamos desenvol-

[6] Embora o termo intuitivo possa tomar diversos significados, neste trabalho esse termo está significando um dos sentidos estabelecidos por Kant, a saber, que o intuitivo é um conhecimento de apreensão imediata, sem intermediário, podendo ser de origem empírica (conhecimento empírico) ou *a priori* (conhecimento que não depende da experiência).
[7] Inspirada nos trabalhos de Frege (1879, 1959) a lógica aqui está sendo considerada como uma linguagem puramente formal, a qual não necessita ser suplementada por qualquer razão intuitiva. Assim, entendemos que é por meio da lógica que o conhecimento é sistematizado, adquirindo caráter de necessidade e universalidade.
[8] Podemos citar aqui, por exemplo, Hersh (1985), Lakatos (1985) e Thom (1985), entretanto, um desenvolvimento mais detalhado dessa afirmação pode ser encontrado em Meneghetti (2003).
[9] Nessa direção, destacamos as seguintes pesquisas: Thompson (1984), Steiner (1987), Fiorentini (1995), Miguel (1995), Meneghetti & Bicudo (2002), Bicudo & Garnica (2003). Com respeito a esse ponto, em Meneghetti (2005) o leitor encontrará uma descrição detalhada desses trabalhos.
[10] Referente à criação pessoal do indivíduo.
[11] Por um processo de conjecturas e refutações de assuntos ainda indeterminados vão-se buscando princípios básicos como resultados de especulações audaciosas que têm sobrevivido a testes e críticas severas (Lakatos, 1985).
[12] No sentido de ser socialmente aceito.
[13] Projeto "Instrumentação para o ensino interdisciplinar das ciências da natureza e da Matemática", desenvolvido no CDCC (Centro de Divulgação Científica e Cultural de São Carlos), auxílio CNPq: processo n º 550857/01-0; teve como um dos coordenadores da área de matemática a primeira autora deste trabalho.
[14] Números Inteiros e Geometria foram outros dois temas levantados nessa fase inicial.

ver materiais didáticos para o ensino de Matemática por meio de atividades experimentais ou em forma de jogos que proporcionassem a construção por parte dos alunos dos conceitos envolvidos; tais atividades foram estruturadas mediante os pressupostos defendidos por Meneghetti & Bicudo (2003), apresentados anteriormente. Dessa forma, seguindo uma abordagem em espiral, desenvolveram-se os temas segundo três níveis: elaboração, consolidação e expansão de conceitos. Em cada um desses níveis, buscou-se pelo equilíbrio entre os aspectos lógico e intuitivo do conhecimento. Entretanto, entende-se que se trata de materiais abertos, pois se concebe que o conhecimento é algo em constante evolução e adaptação, sendo que, no que se refere aos níveis de desenvolvimento do tema, o primeiro deles é essencial e os demais são elaborações cada vez mais profundas. Isso implica que não se precisa necessariamente trabalhar os três níveis de uma só vez e que também é possível desenvolver outros níveis além dos sugeridos. No caso dos números racionais, o primeiro nível é constituído por quatro kits pedagógicos, abordando a idéia intuitiva de fração, conceitos de equivalência entre frações e as operações fundamentais entre frações (adição, subtração, multiplicação e divisão). Esses kits são compostos por atividades em que os alunos têm o apoio de materiais manipuláveis. O segundo nível engloba seis jogos pedagógicos, cujas regras e dinâmicas eram familiares aos alunos, como jogo da memória, jogo do mico, jogo de bingo, dominó, baralho, etc. O terceiro nível constitui-se de três jogos, relacionando conceitos já trabalhados: frações, números decimais, porcentagem e operações com frações.

ASPECTOS METODOLÓGICOS E DESCRIÇÃO DA APLICAÇÃO DO MATERIAL

Nessa fase, pretendíamos analisar a estruturação do material didático que teve como suporte a proposta pedagógica aqui defendida. Para uma intervenção em sala de aula, escolhemos o material de números racionais, pois julgávamos estar pronto para aplicação.[15] A intervenção se deu numa 5ª série do segundo ciclo do ensino básico de uma escola pública na cidade de São Carlos (SP), na sala de aula de uma das professoras que havia participado da fase de elaboração dos materiais, a qual concordou em nos ceder uma turma de alunos para que realizássemos o estudo.

Fizemos uma pesquisa qualitativa através de um estudo de caso (PÁDUA, 1996, p. 71) e durante a intervenção foi adotada uma abordagem construtivista social, utilizando-se de trabalho em grupo e contrato didático. Esses pontos serão tratados com mais detalhes no que segue. O trabalho de campo teve duração de seis semanas, num total de 23 horas/aulas, e seguiu as seguintes etapas: (a) estabelecimento do contrato didático; (b) realização de um diagnóstico inicial para verificar os conhecimentos prévios dos alunos com respeito ao conteúdo a ser trabalhado; (c) aplicação do material; (d) efetuação de um novo diagnóstico; e (e) avaliação da aplicação do material.

A aplicação do material se deu vinculada aos estágios supervisionados da disciplina "Prática de Ensino de Matemática", sob a responsabilidade da primeira autora; o segundo autor ficou encarregado de aplicar o material em sala de aula, desempenhando, naquele momento, o papel de professor aplicador Atividade vinculada ao projeto de iniciação científica: "Construtivismo na Educação Matemática: em busca de compreensão" – financiada pela FAPESP, processo 02/03046-7, com dois anos de duração.; os outros dois estagiários[16] desempenharam o papel de observadores participantes (LÜDKE & ANDRÉ, 2003, p. 28) e colaboraram com a coleta (registro) dos dados. Os dados foram analisados por meio dos diagnósticos (inicial e final) dos alunos, dos relatórios elaborados pelos estagiários, dos depoimentos dos alunos e do professor-aplicador.

Na primeira aula, estabelecemos um contrato didático[17], enfocando pontos importantes sobre a forma como iríamos trabalhar, contendo alguns parâmetros que norteariam o desenvolvimento das aulas (como a disposição física da sala, os critérios de divisão da sala em grupos, os sistemas de avaliação, etc.). Foi proposto nesse contrato que os alunos trabalhariam em grupos[18] estabelecidos mediante um levantamento do rendimento que eles obtivessem na avaliação diagnóstica inicial. Também foi apontado que a avaliação seria continuada, realizada no decorrer das aulas através da resolução de folhas de atividades previamente elaboradas pelo professor.

Nas duas aulas seguintes, os

[15] Visto que esse material havia sido bastante discutido pelo grupo, tinha sido aplicado em sala de aula por estagiários de prática de ensino no ano anterior (aplicação piloto) e, portanto, já havia passado por algumas correções.
[16] R e H.
[17] Utilizamos o termo contrato didático no sentido empregado por Brousseau (1988), mediante o qual regras pertinentes ao sistema constituído pelo trio professor, aluno, conhecimento são estabelecidas (PAIS, 2001).
[18] Acreditávamos que essa forma de organização permitiria uma aproximação entre o professor e os educandos e, conseqüentemente, destes com o conhecimento.

alunos participaram de uma avaliação diagnóstica inicial, visto que, segundo Mauri (2003), *é dos conhecimentos prévios dos alunos que dependem as relações que são possíveis estabelecer para atribuir significado à nova informação proposta* (MAURI in COLL et al., 2003, p. 97). Essa avaliação continha situações-problema elaboradas com a preocupação de não conterem termos técnicos ou algoritmos predeterminados de resolução, mas questões do cotidiano dos alunos, que exploravam intuitivamente conceitos-chave do estudo dos números racionais, como a representação de frações, equivalência entre frações, operações entre números inteiros e frações e entre duas frações[19].

Após a correção da avaliação diagnóstica, pôde-se constatar que a turma apresentava uma grande deficiência em trabalhar com números racionais; tinham dificuldades, inclusive, para interpretar as próprias questões da avaliação. A média alcançada por eles, nessa avaliação, foi *"4,3"* (totalidade valendo 10).

Durante a fase de aplicação do material, os alunos foram organizados em grupos (de no máximo cinco integrantes) cuja composição não era fixa, podendo haver permuta entre seus membros, segundo a vontade dos próprios alunos. Esse tipo de agrupamento é importante na construção dos conceitos, pois, segundo Mauri (2003), *a atividade desenvolvida pelo aluno na construção dos conhecimentos não pode ser realizada de maneira solitária, justamente pela natureza dos saberes culturais. O aluno precisa do auxílio de outros que o ajudem no processo de representação ou atribuição de significados* (MAURI in COLL et al., 2003, p. 92). Além disso, o trabalho em grupo proporciona que o professor possa ir se deslocando pelos grupos, prestando as ajudas adequadas conforme o grau de realização da tarefa (ZABALA in COLL et al., 2003, p. 189).

Com respeito ao material, foram aplicadas atividades correspondentes aos níveis de introdução e consolidação de conceitos. No nível de introdução dos conceitos, foram desenvolvidos quatro kits pedagógicos: o primeiro tem como objetivo explorar, de forma intuitiva, os principais significados ligados ao conceito de fração; o segundo aborda a equivalência entre frações, ordenação de frações, adição e subtração entre frações; o terceiro trata da multiplicação de números inteiros por frações e entre frações; o quarto trabalha o conceito de divisão de frações. Durante essa fase, os alunos basicamente trabalharam com atividades experimentais ou lúdicas. A título de exemplificação, podemos citar a atividade que aborda a soma entre frações de denominadores diferentes (kit 2), que consiste em fichas de cartolina representando diferentes frações de um inteiro, transparências representando o inteiro dividido em diferentes quantidades iguais e um estojo vazado representando um inteiro, servindo de encaixe para as fichas e ao qual se sobrepõem as transparências. Os alunos realizavam a soma de duas frações, pareando as fichas que representassem essa soma, encaixando-as no estojo; em seguida procuravam os resultados, sobrepondo as transparências à figura composta, registrando-os em seus cadernos.

Figura 1
Estojo das frações

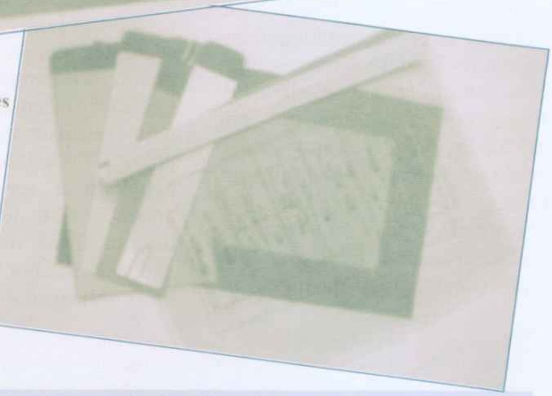

Figura 2
Estojo das frações

[19] Por exemplo, uma das questões foi a seguinte: *"Durante o intervalo do recreio, Ana, Liza e Miguel dividiram um pacote de biscoitos, sendo que **todos comeram a mesma quantidade**. Quanto do pacote cada um deles comeu? Quanto do pacote Ana e Liza, juntas, comeram? E quanto do pacote os três, juntos, comeram?"*.

Durante toda a etapa de introdução dos conceitos, o professor manteve a postura de incentivar a participação dos alunos, dirigindo-lhes perguntas e aproveitando suas respostas para direcionar o desenvolvimento das atividades.

A formalização (fechamento) dessa fase se deu por meio de um trabalho em conjunto entre o professor e os alunos, mediante uma atividade na qual o professor destacou no quadro-negro os principais conceitos abordados. A intenção desse fechamento foi promover, nesse nível, o que Meneghetti & Bicudo (2003) defendem, a saber, um equilíbrio entre os aspectos intuitivos e lógicos do conhecimento e também preparar os alunos para as aulas subseqüentes (fase de consolidação de conceitos), em que teriam de participar de jogos e atividades envolvendo os conceitos trabalhados. Essa etapa de introdução de conceitos teve uma duração de 9 horas/aulas.

Seguindo a estruturação do material, iniciamos o nível de consolidação de conceitos. Nessa etapa, os alunos tiveram a oportunidade de trabalhar os conceitos vistos na fase precedente, sob uma abordagem mais profunda, através da participação em jogos em que as chances de vitória dependiam da utilização dos conceitos estudados na fase anterior. Esse seria, então, um outro nível de trabalho, no qual, de acordo com a proposta que estrutura o material, deveria haver novamente um equilíbrio entre o intuitivo e o lógico. A respeito dessa proposta, ressalta-se ainda que em cada fase o caráter intuitivo e o lógico mudam, ou seja, o que é lógico numa fase pode passar a ser intuitivo na outra. Nessa etapa, foram trabalhados 6 kits pedagógicos, englobando jogos como dominó, bingo, jogo da memória, jogo do mico e jogo de cartas. Esses jogos exploravam: os conceitos de representação numérica e gráfica de frações; ordenação entre frações; e equivalência entre frações.

A título de exemplificação, podemos citar o "Jogo da Memória" (kit 8), atividade em que os alunos devem formar pares de cartas pela associação das representações gráficas das frações com suas respectivas representações numéricas (notação fracionária).

Figura 3
Jogo da memória

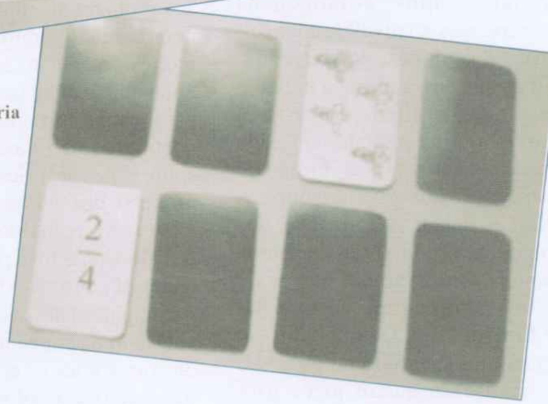

Figura 4
Jogo da memória

Essa etapa de consolidação teve uma duração de 7 horas/aulas e também foi encerrada, como a fase anterior, através de um levantamento e da discussão dos principais pontos e conceitos abordados.

Terminada a etapa de aplicação do material, promovemos um diagnóstico final da turma. Nesse diagnóstico, os alunos resolveram as mesmas questões (situações-problema) com que haviam trabalhado na avaliação diagnóstica inicial e foram utilizados os mesmos critérios de correção dos dois diagnósticos (inicial e final). A média alcançada pela turma, nesse último diagnóstico, foi "*7,0*" (totalidade valendo 10).

No último dia de aula, os alunos responderam a uma folha de sugestões com o intuito de avaliar o material com que haviam trabalhado. Nela, pedia-se que apontassem as atividades de que mais gostaram, aquelas de que gostaram e que apresentassem sugestões. Nesse momento, todos os alunos aproveitaram a oportunidade para expressar suas opiniões.

ANÁLISE DA APLICAÇÃO E CONSIDERAÇÕES FINAIS

Quanto ao contrato didático

Houve dois pontos de ruptura do contrato didático inicialmente proposto. O primeiro foi referente ao critério de agrupamento de grupo e o segundo, ao registro dos alunos.

Como coloca Pais (2001, p.81), as rupturas não podem ser totalmente previstas, ocorrendo no decorrer da dinâmica das situações didáticas e estando relacionadas à dimensão subjetiva do sujeito. Ainda coloca esse autor que, em alguns casos, a percepção e a superação das rupturas são imprescindíveis para a continuidade do processo educativo.

No nosso caso, quanto ao primeiro ponto de ruptura, propusemos o agrupamento dos alunos segundo as notas alcançadas na avaliação diagnóstica inicial; pretendíamos, com isso, formar grupos homogêneos concernentes ao nível de conhecimento dos alunos, pois acreditávamos que dessa forma o trabalho seria mais frutífero. Entretanto, houve muita resistência dos alunos quanto a essa forma de distribuição dos grupos, o que nos levou a deixar a formação dos grupos à escolha dos próprios alunos. Observamos que esse mesmo fato ocorreu no trabalho de Linardi (1998), a qual utilizou a dinâmica de grupo no processo de análise de quatro jogos para ensino de números inteiros.

Com relação ao segundo ponto de ruptura, inicialmente distribuíamos uma folha de atividades para cada grupo; entretanto, percebemos que os alunos não estavam resolvendo as questões em conjunto, sendo freqüente entre os grupos que apenas um ou dois alunos resolvessem as questões pelo grupo – havia um problema de integração dos grupos. Diante disso, passamos a solicitar que todos os membros dos grupos tivessem seus registros particulares das atividades, o que poderia ser feito em seus próprios cadernos, que seriam analisados pelo professor no decorrer das mesmas.

Contudo, observamos que a disposição dos alunos em grupos foi de grande importância no que diz respeito às modificações de seus esquemas de conhecimento[20] e atribuição de significados. Pudemos ver que, muitas vezes, os integrantes de cada grupo discutiam e se ajudavam para poderem completar as tarefas, criando assim desequilíbrios e posteriores re-equilíbrios em suas estruturas cognitivas[21], permitindo, portanto, trabalhar a *Zona de Desenvolvimento Proximal*[22]. Outro fato ressaltado pelo professor é que o trabalho em grupo favoreceu a relação professor-aluno; em seu relato[23], esse professor expressa: *"(...) a divisão da sala em grupos possibilitou-me percorrê-los e ir sanando suas dúvidas, tendo tempo para trabalhá-las com os alunos. Acredito que essa divisão possibilitou uma enorme e considerável aproximação com os alunos"*.

Quanto ao diagnóstico inicial e os conhecimentos prévios dos alunos

Como já mencionado anteriormente, o diagnóstico inicial foi realizado com o objetivo de obtermos o conhecimento prévio dos alunos referente aos números racionais. Na aplicação desse diagnóstico, inicialmente os alunos mantiveram-se bastante passivos: liam as questões e ficavam inertes. Nesse momento, foi necessária a intervenção do professor-aplicador, o qual, percebendo isso, incentivou-os a solicitarem sua ajuda, e passou a percorrer a sala atendendo aos seus questionamentos, mantendo a postura de não lhes oferecer respostas prontas, mas fazendo-os refletir sobre suas próprias dúvidas; conduta que foi adotada durante todo o processo de intervenção.

A realização desse diagnóstico inicial foi muito importante em nosso trabalho, pois foi a partir dele que pudemos identificar as maiores dificuldades da turma. Observamos, por exemplo, que dos 35 alunos que participaram dessa avaliação, 17[24] apresentavam dificuldades consideráveis com os conceitos relativos às frações, ou com a notação fracionária, ou com ambos os aspectos. A título de ilustração, apresentaremos alguns fragmentos retirados dessas avaliações.

Com respeito a dificuldades conceituais, vejamos o caso a seguir:

5) Durante o intervalo do recreio, Ana, Liza e Miguel dividiram um pacote de biscoitos, sendo que todos comeram a mesma quantidade. Quanto do pacote cada um deles comeu? Quanto do pacote Ana e Liza juntas comeram? E quanto do pacote os três juntos comeram?

Cada um comeu $\frac{1}{3}$ e as duas juntas comeram $\frac{2}{6}$ ...

os três juntos comeram $\frac{3}{9}$

Figura 5 – Exemplo de dificuldade conceitual

[20] "Entendemos por esquemas de conhecimento a representação que uma pessoa tem, em um determinado momento, sobre uma parcela da realidade" (Mauri in Coll et al, 2003, p. 96).
[21] Segundo Mauri, esses desequilíbrios podem ser gerados no decorrer da interação entre colegas (Mauri in Coll et al, 2003, p. 100).
[22] Zona de discrepância entre o nível de desenvolvimento real e o nível de desenvolvimento potencial (Vygotsky, 1991).
[23] Quinto dia de suas anotações de aula.
[24] Especificamente, 9 alunos apresentaram grandes dificuldades em utilizar a notação fracionária, enquanto 13 demonstraram deficiências conceituais e 5 possuíam dificuldades com ambos os aspectos.

Nesse caso, percebe-se que o aluno utiliza a notação fracionária, porém o conceito de soma entre frações parece não estar bem compreendido (o aluno efetua a soma 1/3+1/3, adicionando numerador com numerador, denominador com denominador, e não consegue enxergar que o resultado 2/6 é equivalente às parcelas 1/3; o mesmo raciocínio se repete no caso de 1/3+1/3+1/3, que o aluno responde ser 3/9).

As dificuldades com notação podem ser ilustradas com o seguinte exemplo:

1) Uma torta de frango deve ser repartida igualmente entre 5 crianças. Como você representaria o que cada criança irá receber? Indique todas as possíveis formas de fazer essa representação.

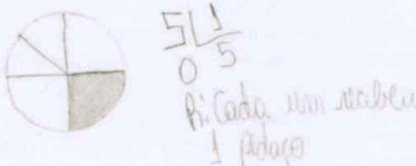

Figura 6 – Exemplo de dificuldade com notação

Nesse exemplo, podemos observar que o aluno, apesar de ter alguma noção com respeito ao conceito (no sentido de que ele, ao menos, sabia que deveria dividir o material em 5 partes e tomar uma delas), tentou fazer isso, dividindo, a princípio, a 'torta' em 4 partes e depois tomou uma dessas partes e a dividiu em duas (provavelmente por não ter tido um critério inicial para efetuar a divisão em 5 partes iguais). Entretanto, percebe-se que esse aluno não soube utilizar a notação fracionária corretamente para representar aquilo que ele desejava.

Finalmente, apresentamos abaixo um caso que caracteriza um problema de dificuldade conceitual e notacional ao mesmo tempo:

Esse aluno, além de não saber representar suas idéias utilizando notações fracionárias[25], também apresenta problemas conceituais (para ele 1/3 + 1/3 corresponde à metade do pacote).

5) Durante o intervalo do recreio, Ana, Liza e Miguel dividiram um pacote de biscoitos, sendo que todos comeram a mesma quantidade. Quanto do pacote cada um deles comeu? Quanto do pacote Ana e Liza juntas comeram? E quanto do pacote os três juntos comeram?

Ana e Liza comeram metade do pacote.
Miguel comeu o resto

Figura 7 – Exemplo de dificuldade conceitual e notacional

Ao avaliarmos a aplicação do material, percebemos que o diagnóstico inicial foi, de fato, fundamental para a orientação de nosso trabalho, pois, sem ele, correríamos o risco de trabalhar os conteúdos numa linguagem, ou nível, de difícil compreensão para os alunos. Ademais, ao percebermos quão pouco os alunos dominavam o conceito de frações, concluímos que seria conveniente trabalhar com uma linguagem bastante informal, próxima da compreensão deles.

Quanto ao material e à aprendizagem dos alunos

A partir de nossa intervenção, percebemos que os conteúdos trabalhados com materiais de fácil manipulação, ou visualização, foram mais bem compreendidos pelos alunos do que os demais. Segundo o Prof. Augusto, *"(...) os alunos não entenderam muito bem a divisão entre frações, talvez devido à falta de exemplos práticos e concretos, mas entenderam muito bem a divisão de frações por números inteiros[26]"*. Diante disso, entendemos que esse fato ressalta a importância do aspecto intuitivo na estruturação do conhecimento. Vale notar que essas atividades fazem parte do nível de introdução de conceitos; uma delas, a divisão de frações por inteiros, foi trabalhada com o apoio de um material concreto com o qual os alunos podiam realizar as divisões através de manipulações. Outras atividades que não tinham essa característica, como, por exemplo, a que se referia à divisão entre duas frações (trabalhada sem o auxílio de um material que proporcionasse boa visualização), exigiram do professor um trabalho em que se estabeleça uma ponte entre os aspectos intuitivo e lógico do conhecimento.

De todas as atividades trabalhadas, aquelas das quais os alunos mais gostaram foram: Jogo da Memória e Jogo das Trocas de Equivalência; as atividades de que eles menos gostaram foram: Baralho da Comparação de Frações e Jogo do Mico. Concluímos isso através da observação do envolvimento que os alunos tiveram durante as atividades e

[25] Em todas as questões solicitadas nessa avaliação, esse aluno apresentou suas respostas sem utilização de notação fracionária.
[26] Comentário do Prof. Augusto (notas de aula).

através das sugestões que eles deram no questionário da última aula. A questão que levantamos é: por que eles gostaram de tais atividades e se envolveram tanto com elas? Ao refletirmos sobre isso, percebemos que os jogos preferidos pelos alunos foram aqueles que, além de possuírem dinâmicas familiares aos alunos, também permitiam que a brincadeira fosse desencadeada de forma a proporcionar uma boa interação entre os jogadores. No caso dos jogos de que os alunos menos gostaram, percebemos que, por motivos técnicos de operacionalização das atividades, essa interação não aconteceu.

Dessa experiência, o Prof. Augusto relata como positivo na estruturação do material o fato de ele oferecer aos estudantes oportunidades diferentes para que eles trabalhem os conceitos envolvidos, uma vez que um mesmo conceito é retomado em diversos níveis e sob novas abordagens.

Um dos pontos observados com respeito ao processo de intervenção foi o de que se estabeleceu em sala de aula um clima favorável ao surgimento de situações de ensino-aprendizagem, o que, a nosso ver, se deu principalmente à adoção por parte do professor de uma postura na linha construtivista (como mencionado anteriormente). Além disso, tal postura também foi importante nesse processo avaliativo do material, no qual as atividades estavam sendo aplicadas em sala de aula pela primeira vez. Nesse contexto, o professor mostrou-se preparado para fazer das situações imprevisíveis uma oportunidade de aprendizagem e crescimento conceitual dos alunos. Sobre isso, podemos relatar o ocorrido no décimo primeiro dia de aula, em que a sala trabalhou com o Jogo das Trocas de Equivalência. O objetivo inicial do jogo é compor o inteiro a partir de peças que representam diferentes frações desse inteiro; para tanto, os alunos eram induzidos a trocar peças com seus colegas, de maneira que as quantidades representadas por elas fossem equivalentes. Ao aplicá-lo, o professor percebeu que os alunos se envolveram tanto com a atividade, que se poderiam explorar mais conceitos que o previsto. Assim, aproveitando essa oportunidade, ele trabalhou também com esse material os conceitos de ordenação, soma e subtração entre frações. Nesse ponto, ele transcendeu os propósitos iniciais do material, explorando toda a sua potencialidade. Essa postura do professor parece ter sido reflexo de sua longa preparação e de sua vivência em ambientes que proporcionaram amplas discussões a respeito dos processos de ensino-aprendizagem. Além disso, o material, por se constituir numa estrutura aberta, possibilitou que isso ocorresse.

Quanto à aprendizagem dos alunos, percebeu-se que houve um progresso nessa direção. Esse fato, além de ter sido percebido ao longo da aplicação, também esteve refletido na avaliação diagnóstica final, na qual pudemos perceber que os alunos expressaram melhor suas respostas, fizeram mais desenhos e responderam com mais segurança às questões. Eles conseguiram efetuar adições, multiplicações, simplificações e operações com frações; atitudes que dificilmente tiveram na primeira avaliação. Abaixo temos uma demonstração de operações (subtração e adição de frações com mesmo denominador) que uma aluna não conseguiu realizar na avaliação diagnóstica inicial, mas conseguiu efetuar na avaliação diagnóstica final, após nossa intervenção:

QUESTÃO 8

Resolução no diagnóstico inicial

Resolução no diagnóstico final

QUESTÃO 9

8) Certa noite, Laura foi assaltar a geladeira de sua casa e encontrou lá $\frac{3}{4}$ (três quartos) de uma torta de morango. Sabendo que Laura comeu $\frac{1}{4}$ (um quarto) da torta, quanto da torta sobrou para seus irmãos?

Figura 8 – Enunciado da "questão 8"

Resolução no diagnóstico inicial *Resolução no diagnóstico final*

Sobrou para seus irmãos $\frac{1}{4}$ peda da torta

Figura 9 – Exemplo de resolução da "questão 8" no diagnóstico inicial

$\frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{2}{4}$

Figura 10 – Exemplo de resolução da "questão 8" no diagnóstico final

9) Durante o café da manhã, Dudu comeu $\frac{1}{2}$ (metade) de um pão com geléia e $\frac{1}{3}$ (um terço) de outro pão com manteiga. Quanto de pão Dudu comeu no café da manhã?

Figura 11 – Enunciado da "questão 9"

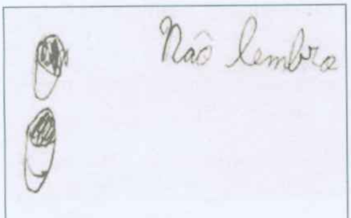

Figura 12 – Exemplo de resolução da "questão 9"no diagnóstico inicial

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{3}{6}+\frac{2}{6}=\frac{5}{6}$$

Figura 13 – Exemplo de resolução da "questão 9" no diagnóstico final

Essa constatação de progresso, no que se refere à aprendizagem dos alunos, também foi apontada nos depoimentos dos próprios alunos (folhas de sugestões -no último dia de aula): *"Eu gostei muito das brincadeiras e do material de vocês (...) são muito bem feitos (...) eu adorei uma maneira melhor de entender"* (Caio); *"Não tem como não gostar das atividades. O de que mais gostei foi que a turma aprendeu mais sobre frações"* (Lucas).

Ademais, ficou evidente também a importância da postura adotada pelo professor- aplicador, a qual estava em consonância com o suporte teórico em que o material fora estruturado[29], como ele próprio relatou em entrevista realizada após a aplicação: *"(...) penso que, da forma como foi estruturado, o material faz-se uma rica fonte de atividades com as quais, mantendo uma postura na linha construtivista, o professor pode levar/orientar seus educandos à construção dos conceitos matemáticos envolvidos."* Assim, chegamos à conclusão de que a proposta metodológica que estrutura o material possibilitou que trabalhássemos os aspectos subjetivo e objetivo do conhecimento (como posto na linha do construtivismo social) e mostrou-se eficiente do ponto de vista didático-pedagógico, visto que favoreceu o processo de construção dos conceitos envolvidos.

Referências Bibliográficas

BICUDO, M.A.V. & GARNICA, A.V.M.(2003) A Filosofia da Matemática e sua constituição multifacetada: apontamentos sobre algumas de suas questões geradoras. In Bicudo, Maria Ap. V. (org.). *Filosofia da Educação Matemática: concepções e movimento*. Brasília: Plano Editora.

BROUSSEAU, G. (1998) Le Contrat Didactique: le milieu. *Rechèrches en Didactique des Mathématiques*, vol. 9, nº 3.

COLL, C., MARTIN, E., MAURI, T., MIRAS, M., ONRUBIA, J., SOLE, I., ZABALA, A. (2003) *O Construtivismo na sala-de-aula*, São Paulo: Editora Ática.

D'AMBROSIO, B. & STEFFE, L. P. (1992) O ensino construtivista. *Em Aberto*, Brasília, ano 14, nº 62.

ERNEST, P. (1991) *The Philosophy of Mathematics Education*. Bristol: The Farmer Press.

________ (1994) *Constructing Mathematical Knowledge: Epistemology and Mathematics Education*. Washington, D.C.

FIORENTINI, D. (1995) Alguns Modos de Ver e Conceber o Ensino da Matemática no Brasil. *Revista Zetetiké*, ano 3, nº 4.

FREGE,G. (1971) *Begrissffchrift, a formula language, modeled upon that of arithmetic, for pure thought*, 1879 In HEIJENOORT, V.: From Frege to Gödel: A Source Book Mathematical logic 1879-1931, Havard University Press, Cambridge, Maddschutts, pp. 1-82.

[29] Lembramos aqui que (Kilpatrick, 1995) nos alerta a respeito da necessidade de haver, de fato, uma harmonia entre os vários componentes (etapas) de um estudo.

_______. FREGE, G. (1959) *The Foundations of Arithmetic*. English Translation by J. L. Austin. M.A-Basil Blackwell- Oxford.

HERSH, R. (1985) Some Proposals for Reviving the Philosophy of Mathematics. In: Tymoczko,T. *New Directions in the Philosophy of Mathematics*. Birkhäuser.

KANT, I. (1997) *Crítica da Razão Pura*. 4ª edição, Lisboa: Fundação Caloute Gulbenkian

KILPATRICK. J. (1995) Staking Claims *Nordic Studies in Mathematics Education,* v. 3, n.4, pp.21-42.

LAKATOS, I. (1985) A Renaissance of Empiricism in the Recent Philosophy of Mathematics. In: Tymoczko,T. *New Directions in the Philosophy of Mathematics*. Birkhäuser.

LINARDI, P.R. (1998) *Quatro Jogos para Números Inteiros: uma análise*. Dissertação de mestrado. Instituto de Geociências e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista. Rio Claro/SP.

LÜDKE, M., ANDRÉ, M.E.D.A. (2003) *Pesquisa em educação: abordagens qualitativas*. São Paulo: EPU.

MENEGHETTI, R.C.G. (2001) *O Intuitivo e o Lógico no Conhecimento Matemático: Uma análise a luz da história e da filosofia da matemática*. Tese de doutorado. Instituto de Geociências e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista. Rio Claro/SP.

MENEGHETTI, R.C.G. (2003) "O intuitivo e o lógico nas correntes filosóficas pós-século XIX" in anais do *V Seminário Nacional de História da Matemática*, de 13 a 16 de abril de 2003- na Universidade Estadual Paulista – UNESP – Campus de Rio Claro, SP, Brasil. Sociedade Brasileira de História da Matemática, pp.411-420.

MENEGHETTI, R.C.G. (2005) Influências da Filosofia da Matemática na Filosofia da Educação Matemática. Revista *Comunicações*, ano 12, nº 2, novembro de 2005.

MENEGHETTI, R.C.G. & BICUDO, I. (2002) O que a História do Desenvolvimento do Cálculo pode nos ensinar quando questionamos o saber matemático, seu ensino e seus fundamentos. *Revista Brasileira de História da Matemática: an international journal on the History of Mathematics*, nº 3, pp. 103-117.

_______. (2003) Uma discussão sobre a Constituição do Saber Matemático e seus Reflexos na Educação Matemática. *BOLEMA – Boletim de Educação Matemática*, ano 16, nº 19.

MIGUEL, A. (1995) A Constituição do paradigma do Formalismo Pedagógico Clássico em Educação Matemática. *Revista Zetetiké*. Ano 3, nº 3, pp.7-39.

PÁDUA, E.M.M. (1996) *Metodologia da Pesquisa: abordagem teórico-prática*. Campinas: Ed. Papirus.

PAIS, L.C. (2001) *Didática da Matemática: Uma análise da influência francesa*. Coleção Tendências em Educação Matemática. Belo Horizonte: Autêntica.

STEINER, H.J. (1987) Philosophical and Epistemological Aspects of Mathematics and their Interaction with Theory and Practice in Mathematics Education. *For the Learning of Mathematics 7*, Montreal, Quebec, Canada: FLM Publishing Association.

THOM, R. (1985) Modern Mathematics: an educational and philosophic error? In: Tymoczko,T. *New Directions in the Philosophy of Mathematics*. Birkhäuser.

THOMPSON, A.G. (1984) The Relationship of Teachers' Conceptions of Mathematics and Mathematics Teaching to instructional Practice. *Education Studies in Mathematics*, nº 15, pp. 105-107.

VYGOTSKY, L.S. (1991) *Pensamento e Linguagem*, São Paulo: Ed. M. Fontes.