

## O ENSINO DA FÓRMULA DE PICK NA SALA DE AULA: UM POSSÍVEL OLHAR PARA REFERÊNCIAS CURRICULARES

### TEACHING PICK'S FORMULA IN THE CLASSROOM: A POSSIBLE LOOK FOR CURRICULUM REFERENCES

Raquel Gomes de Oliveira<sup>1</sup>  
Rachel Carobina<sup>2</sup>

#### Resumo

O texto apresenta uma pesquisa que objetivou analisar referências didático-pedagógicas para o ensino e a aprendizagem da Fórmula de Pick. Nesse sentido, no desenvolvimento da pesquisa, procurou-se elaborar, aplicar e analisar uma atividade didática na qual concorreram elementos considerados contribuintes ao desenvolvimento de procedimentos e atitudes matemáticos tidos como imprescindíveis para a constituição de entendimento matemático significativo para os alunos. A atividade didática foi elaborada e desenvolvida por uma futura professora de Matemática junto a alunos de 8º ano de uma escola pública do interior do Estado de São Paulo, sendo dois conceitos tomados como fundamentais para seu desenvolvimento: a Atividade de Investigação Matemática e a Fórmula de Pick. Os resultados mostraram que aos alunos da Educação Básica, participantes da pesquisa, foi possível entender como uma fórmula matemática pode ter origem, sendo o processo desse entendimento tomado como um incentivo para a participação nas aulas de Matemática. A futura professora de Matemática foi oportunizada elaborar referências curriculares para a docência, contemplando maneiras de ensinar Matemática na escola, que articulem elementos historicamente presentes nos processos de raciocínios matemáticos e que têm sido fundamentais para a construção e entendimento do conhecimento matemático.

**Palavras-chave:** Ensino e Aprendizagem de Matemática, Atividade de Investigação Matemática, Desenvolvimento Curricular.

#### Abstract

The text presents a research that aimed to analyze pedagogical didactic references to the teaching and learning of Pick's Formula. In this sense, in the development of research, we tried to formulate, implement and analyze a didactic activity in which both elements considered contributors to the development of procedures and mathematical attitudes seen as essential for significant mathematical understanding of constitution for students. The didactic activity was designed and developed by a future teacher of mathematics at the 8th grade students from a public school in the State of São Paulo and two concepts were taken as fundamental to its development: the Mathematics Research Activity and the Pick's Formula. The results showed that students of basic education, research participants, it was possible to understand how a mathematical formula can be derived, and the process of this understanding taken as an incentive for participation in mathematics classes. To the future professor of mathematics the opportunity was given to elaborate curricular references for teaching, contemplating ways to teach mathematics in school, encompassing historical elements present in mathematical reasoning and processes that have been instrumental in the construction and understanding of mathematical knowledge.

**Keywords:** Mathematics Teaching and Learning, Mathematics Research Activity, Pick's Formula

---

<sup>1</sup> Licenciada em Matemática pela FCT-Unesp, com Mestrado em Educação Matemática pela Faculdade de Educação da UNICAMP e Doutorado em Educação pela Faculdade de Educação da USP.

<sup>2</sup> Licenciada em Matemática pela FCT-UNESP

## Introdução

A motivação para realizar uma pesquisa sobre referências curriculares para o ensino e aprendizagem da Fórmula de Pick teve origem em duas perspectivas: 1) a de iniciação de uma futura professora de Matemática em processos de raciocínio e procedimentos que subsidiam o método científico e que têm contribuído no desenvolvimento de saberes docentes e 2) a de geração de novos conhecimentos e reelaboração daqueles já existentes na área de ensino e aprendizagem de conceitos matemáticos.

Nos pressupostos curriculares nacionais para a formação de professores, que atuarão na Educação Básica a ideia de pesquisa, como instrumento de ensino e objeto de aprendizagem nesta formação, encontra-se destacada como elemento essencial dos currículos de cursos de formação de professores. Elemento essencial à medida que possibilita ao futuro professor compreender, elaborar e ampliar concepções sobre processos de ensino e aprendizagem de conteúdos escolares para o nível de educação ao qual está sendo preparado, ou seja, a educação básica. Além disso, pela pesquisa o futuro professor poderá tomar contato com condições e necessidades escolares, reelaborando e construindo conhecimentos diante dessas condições e demandas.

Não seria uma justificativa relevante para a pesquisa realizada, desvelar somente o papel ou desenvolvimento ou aplicação de uma fórmula matemática em situações didáticas, comumente presentes na interpretação e resolução de problemas junto ao currículo de Matemática na Educação Básica, dada a diversidade de pesquisas já existentes com esse fim (BARRETO e GARCIA, 2008; KLEIN e COSTA, 2011; MENEGHETTI e REDLING, 2012).

Portanto, a pesquisa teve o propósito descrever e analisar uma atividade didática para a elaboração, entendimento e aplicação de uma fórmula matemática, na qual concorrem elementos que efetivamente contribuam para o desenvolvimento de procedimentos e atitudes matemáticas considerados imprescindíveis ao entendimento matemático significativo para os alunos no processo de ensino e aprendizagem de conteúdos escolares.

Nessa perspectiva, dois conceitos foram tomados como fundamentais para o desenvolvimento da pesquisa: Atividade de Investigação Matemática e a Fórmula de Pick. Os resultados mostraram que aos alunos da Educação Básica, participantes da pesquisa, foi possível entender como uma fórmula matemática tem origem, sendo este entendimento tomado como um incentivo para a participação nas aulas de Matemática. À futura professora de Matemática foi oportunizado elaborar referências curriculares, contemplando maneiras de ensinar Matemática na escola, que articulem elementos historicamente presentes nos processos de raciocínios

matemáticos e que têm sido tomados como fundamentais para a construção e entendimento do conhecimento matemático.

### **Considerações teóricas**

Possibilitar que alunos aprendam Matemática, com entendimento matemático significativo para eles, tem sido objeto de estudo e origem de várias tendências pedagógicas. Assim, no conjunto de conhecimentos para o desenvolvimento de conteúdos matemáticos na escola, entendendo estes conteúdos enquanto conceitos, procedimentos e atitudes, encontram-se tendências pedagógicas identificadas com: a utilização da História da Matemática (CARAÇA, 1963; KLINE, 1976; MIGUEL, 1993; DAVIS e HERSH, 1989), a Modelagem Matemática (BIEMBENGUT e HEIN, 2000) a Etnomatemática (DOMITE, 2000; D'AMBRÓSIO, 2001), a Resolução de Problemas (LAMPERT, 1990; POLYA, 1995) e as Atividades de Investigação em Matemática (BOAVIDA, GUIMARÃES, 2002; PONTE et al., 1999a; PONTE et al., 1999b; PONTE; 2003).

Em todas essas tendências existem pressupostos sobre a natureza do conhecimento matemático e o modo pelo qual este pode passar a existir com significado para o aluno. Portanto, em cada uma delas há referências metodológicas para o papel desempenhado pelos professores, pelos alunos e pelos próprios conteúdos matemáticos. Quanto ao papel do professor no processo de ensino e aprendizagem, este está diretamente ligado à concepção de conhecimento matemático defendido, mesmo havendo entre elas princípios comuns para o que se entende por Matemática. No entanto,

[...] mesmo sob o referencial de ação-reflexão-ação, essas metodologias poderão ter diferentes sentidos aos futuros professores, dependendo do modo como as assimilam, ou seja, se apenas na perspectiva de quem vai ensinar Matemática ou fundamentalmente na perspectiva de quem ensina Matemática, tomando como referência elementos presentes em seus próprios processos de raciocínios e consequentes procedimentos como aprendiz de Matemática. (OLIVEIRA, 2014, p.230).

A fim de superar a ideia de Matemática como coisa criada que pode aparecer pronta em livros (CARAÇA, 1963), é imprescindível oferecer aos futuros professores, desde sua formação inicial, experiências nas quais possa haver o desenvolvimento de outras concepções sobre a origem e a natureza do conhecimento matemático. Para contemplar o objetivo de elucidar referências didático-pedagógicas para o ensino e a aprendizagem da Fórmula de Pick, dois conceitos foram fundamentais ao desenvolvimento da pesquisa: Atividade de Investigação Matemática e a Fórmula de Pick.

## Do conceito de Atividade de Investigação Matemática

Conceber a Matemática como campo de conhecimento originado pela atividade humana, com suas necessidades e condições de ser efetivada, tem apresentado como consequência imediata a consideração na qual aprender Matemática é fazer Matemática. Consideração que tem sido uma ideia defendida (NATIONAL COUNCIL OF MATHEMATICS TEACHER, 1998; ASSOCIAÇÃO DOS PROFESSORES DE MATEMÁTICA, 1988; PARAMETROS CURRICULARES NACIONAIS, 1998) e posta em prática por educadores matemáticos de diversos países.

Nesse sentido, atividades de investigação matemática são identificadas com situações didático-pedagógicas que oportunizam aos alunos vivenciarem momentos no processo de ensino e aprendizagem nos quais possam compreender a natureza da Matemática, entendendo igualmente a característica criativa presente na mesma. Em geral, esses momentos para os alunos oportunizam a formulação, o teste e a validação de conjecturas ou hipóteses, a defesa de suas ideias ou argumentação, o questionamento do que realizaram e do que realizaram seus colegas e dos resultados encontrados, tanto de modo escrito como de modo oral. De acordo com Ponte et al (1998), através dessas ações, são dados passos considerados essenciais para que o aluno alcance uma melhor compreensão sobre conceitos e princípios matemáticos. Propriamente, uma atividade de investigação é realizada quando:

[...] formulamos as nossas próprias questões e procuramos responder-lhes, de modo tanto quanto possível fundamentado e rigoroso. Em contexto de ensino, aprendizagem ou formação, investigar não significa necessariamente lidar com problemas na fronteira do conhecimento nem com problemas de grande dificuldade. Significa apenas trabalhar a partir de questões que nos interessam e que se apresentam inicialmente confusas, mas que conseguimos clarificar e estudar de modo organizado. (PONTE, 2003, p. 94).

**Quadro 1:** Momentos na realização de uma investigação matemática

<b>Momentos de uma investigação</b>	<b>Ações a serem realizadas</b>
<b>1.</b> Exploração e formulação de questões	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Reconhecer uma situação problema</li> <li>• Explorar a situação problema</li> <li>• Formular questões sobre o contexto apresentado</li> </ul>
<b>2.</b> Formulação de conjecturas	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Organizar dados</li> <li>• Formular conjecturas</li> </ul>
<b>3.</b> Teste e reformulação de conjecturas	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Realizar testes</li> <li>• Refinar uma conjectura ou uma hipótese</li> </ul>
<b>4.</b> Justificativa e avaliação	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Justificar uma conjectura</li> <li>• Avaliar ou pensar sobre o raciocínio ou o resultado do raciocínio</li> </ul>

Fonte: quadro elaborado a partir de Ponte; Brocardo e Oliveira (2003)

No quadro 1 estão dispostos momentos de realização de uma investigação matemática, bem como estão explícitas ações a serem desenvolvidas pelos alunos. Mas o que cabe ao professor em uma aula caracterizada por uma atividade de investigação matemática?

Conforme Christiansen e Walter (1986) apud Oliveira et al. 1999 os papéis desempenhados pelo professor em uma atividade de investigação são atrelados às três fases que geralmente envolvem a envolvem: a introdução do trabalho, seu desenvolvimento e seu término.

Na primeira fase ou na introdução da tarefa, o professor assume o papel de um orientador para as atividades, haja vista, a possibilidade de não familiarização dos alunos com a mesma. O papel atribuído ao professor no desenvolvimento de uma atividade de investigação oscila entre agir questionando e a partir de respostas promover que os alunos prossigam na organização de dados e no levantamento de questões. O término da investigação requer do professor a organização dos encontros, das produções dos alunos a fim de que possa haver trocas de informações entre os mesmos no sentido de se chegar à validação de resultados, a novas conjecturas e por fim, ao estímulo para futuras investigações.

**Quadro 2:** Exemplo de desenvolvimento de uma de investigação matemática

Explorações com Números			
Procure descobrir relações entre os números			
0	1	2	3
4	5	6	7
8	9	10	11
12	13	14	15
16	19	18	19
...	...	...	...
Como sempre, registre as conclusões que for obtendo.			
(Telma): Vamos tentar com o quê? Com as potências, para ver se dá alguma coisa?			
(Rita): Com as raízes quadradas?			
(José): 4 vezes 4, dá 16.			
(Rute): Vejam as potências. A segunda potência de qualquer coisa.			
(Telma): Rute, era o que estávamos a fazer: 1 vezes 1 é 1; 2 vezes 2, são 4; 3 vezes 3, são 9.			
...			
(Professora): Deixem lá ver. Vocês estão somando a segunda com a terceira e a terceira com a quarta coluna e estão vendo que o resultado aparece na segunda coluna... E por que é que não vêem as outras colunas?			
(Alunos): Já vimos.			
(Professora): Também dá na segunda? E a primeira com a terceira?			
(José): 2, 4 e 6, 10. Também dá.			
(Professora): Também dá onde?			
(José): A primeira com a terceira.			
...			
(Professora): Ah, então nem sempre aparece na segunda. Talvez seja melhor verem isso...			
(afasta-se do grupo).			
(André): a segunda com a quarta aparece na primeira.			
(Rute): Então, escrevemos em relação a todos.			

Fonte: Elaborado a partir de Ponte; Brocardo e Oliveira (2003)

No exemplo de desenvolvimento de uma investigação matemática (Quadro 2) é possível destacar algumas características dentre aquelas que, de acordo com Fonzi (1999), devem estar presentes neste desenvolvimento: a) participação ativa do aluno na construção do conhecimento matemático “[...] tentando encontrar um sentido próprio para as regras matemáticas, os conceitos e os problemas com que se deparam.” (FONZI, 1999, p. 53); b) A Matemática é apresentada como resultado de condições e necessidades humanas: “[...] os alunos apercebem-se que o conhecimento matemático [...] é experimental de dependente do contexto e dos objetivos”. (FONZI, 1999, p. 53); c) “o professor proporciona aos alunos inquirições e a aprendizagem na sala de aula através do uso de práticas e técnicas de ensino apropriadas.” (FONZI, 1999, p. 53) e d) “o professor ouve os alunos e toma em consideração as suas aprendizagens em todas as decisões pedagógicas.” (FONZI, 1999, p. 53).

Para Fonzi (1999) as experiências didáticas dos professores que aconteceram, em sua maioria, sob o “Paradigma da Transmissão” (BORASI e SIEGEL, 1992 apud FONZI, 1999, p. 51) acabam tendo que ser superadas na perspectiva de um fazer docente por questionamento ou “uma pedagogia da inquirição” (FONZI, 1999, p. 51).

Como visto, as situações de ensino e aprendizagem de conceitos matemáticos, por meio de atividades de investigação, são caracterizadas pela intenção de levar o aluno a participar do processo de construção de conhecimento matemático. Essas atividades são especificamente formuladas a fim de que propiciem dúvidas, conjecturas (levantamento de hipóteses), criações, argumentação, induções e deduções, que geralmente antecedem a sistematização de um conceito matemático porque,

Aprender Matemática não é simplesmente compreender a Matemática já feita, mas ser capaz de fazer investigação de natureza matemática (ao nível adequado a cada grau de ensino). Só assim se pode verdadeiramente perceber o que é a Matemática e a sua utilidade na compreensão do mundo e na intervenção sobre o mundo. Só assim se pode realmente dominar os conhecimentos adquiridos. Só assim se pode ser inundado pela paixão “detectivesca” indispensável à verdadeira fruição da Matemática. Aprender Matemática sem forte intervenção da sua faceta investigativa é como tentar aprender a andar de bicicleta vendo os outros andar e recebendo informação sobre como o conseguem. Isso não chega. Para verdadeiramente aprender é preciso montar a bicicleta e andar, fazendo erros e aprendendo com eles. (BRAUMANN apud PONTE et al., 2003, p.19)

Nessa perspectiva, dentre várias ações, a ação de errar é elemento constituinte da participação em uma atividade investigativa, sendo considerada favorável à participação do aluno à medida que errar é parte de um contexto no qual o erro é também valorizado, pois ora antecede, ora é consequência de outras ações, por exemplo, uma conclusão e sua validação. Comumente o processo de participação em uma tarefa investigativa busca contemplar

procedimentos que de acordo com Ponte, Brocardo e Oliveira (2003) constituem os principais momentos de uma tarefa de investigação matemática.

### Da Fórmula de Pick

Outro conceito relevante ao desenvolvimento da pesquisa é a Fórmula de Pick, que foi desenvolvida pelo matemático austríaco George Alexander Pick (1859 – 1942), morto em um campo de concentração nazista em 26 de julho de 1942.

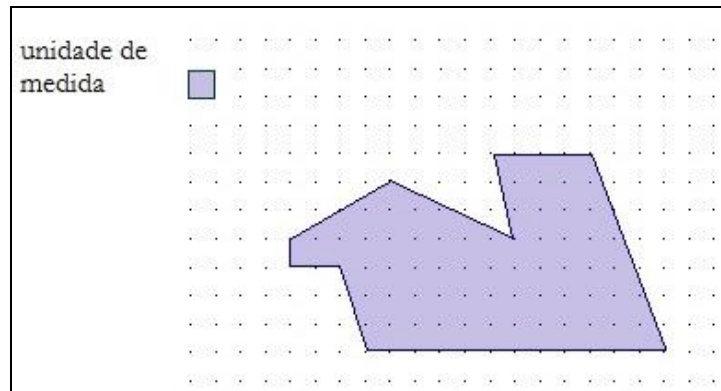
O'Connor e Robertson (2010) afirmam que a Fórmula de Pick versa sobre geometria reticular. Nesse sentido, o plano torna-se uma rede na qual são criados dois sistemas de linhas paralelas igualmente espaçadas (Fig. 1). George Pick (1859 – 1942) denominou estas linhas de "principais linhas reticulares" e seus pontos de interseção são chamados de "pontos reticulares". Uma linha que une dois pontos quaisquer reticulares é chamada de "linha reticular". Em um reticulado, um ponto sempre deve distar de uma mesma unidade em relação ao próximo ponto sobre uma linha imaginada, seja na posição vertical ou horizontal.

Para Pick (1859 – 1942), um polígono cujas arestas são linhas reticulares é considerado um polígono reticular. O teorema de Pick, que dá origem à Fórmula de Pick, comprova que a área de um polígono reticular é dada por:  $A = \frac{B}{2} + L - 1$ , onde B é o número de pontos reticulares nas bordas do polígono, ou seja, os pontos de fronteira e L é o número de pontos reticulares no interior do polígono. A ideia fundamental do Teorema de Pick é mostrar que é possível calcular a área de um polígono simples, a partir da contagem de pontos do reticulado no qual este polígono está inscrito, desde que sejam asseguradas as condições presentes nesse teorema.

A partir do polígono (Figura 1), tem-se um exemplo de que é possível substituir o processo tradicional e comum de cálculo de área de uma superfície plana (medida do comprimento multiplicada pela medida da largura), que envolve medidas de grandezas contínuas, por uma contagem de grandezas discretas, isto é, os pontos. Mas a Fórmula de Pick se aplica a qualquer posicionamento do polígono no reticulado? Não. Para que seja possível associar o conceito intuitivo de "quantização" ou contagem ao processo de se medir uma grandeza contínua, no caso, a área de uma figura poligonal, é preciso que cada vértice do polígono esteja sobre um ponto do reticulado, levando a entender que as coordenadas dos vértices do polígono, ao qual se pretende aplicar a Fórmula de Pick, devem ser inteiras.

A figura 1 exemplifica a aplicação da Fórmula de Pick para um polígono de coordenadas inteiras. Verifica-se que B (os pontos de fronteira) = 26 pontos, I (os pontos interiores) = 60 pontos. Logo, a área da figura é igual 72 unidades de medida ou 72 u.

**Figura 1:** Contexto para aplicação da Fórmula de Pick: polígono sobre um reticulado



Fonte: elaboração própria

Utilizando a fórmula de Pick para o cálculo da área desta figura, tem-se que:

$$A(P) = \frac{1}{2} B + I - 1,$$

$$(P) = \frac{1}{2} 26 + 60 - 1,$$

$$A(P) = 13 + 60 - 1$$

$$A(P) = 73 - 1$$

$$A(P) = 72 \text{ u, onde u é a unidade de medida.}$$

Nesse sentido, a Fórmula de Pick traz em si a estética da elaboração matemática e a funcionalidade em termos de encurtamento de tempo a fim de que sejam cumpridos certos objetivos que justifiquem, portanto, o uso de uma fórmula matemática. Um desses objetivos seria, por exemplo, determinar a área de uma região fotografada por um satélite.

Apresentar aos alunos a Fórmula de Pick já sistematizada seria contrário aos fundamentos curriculares atuais para o desenvolvimento de conceitos geométricos e medições. Do mesmo modo que não levaria em conta os pressupostos de uma Atividade de Investigação Matemática e suas potencialidades para a consolidação do saber matemático a ser realizada pelos alunos. Contudo, esclarecemos que o trabalho pedagógico realizado com os alunos do 8º ano durante a pesquisa com a Fórmula de Pick, não pretendeu demonstrá-la, mas sim oportunizar aos alunos a aprendizagem da Fórmula de Pick, enquanto conteúdo curricular, de modo mais significativo para eles, superando ideias nas quais fórmulas matemáticas devem ser decoradas.

Portanto, o desenvolvimento da pesquisa buscou atender tanto às atuais diretrizes curriculares, como os Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1998) e Secretaria de Educação do Estado de São Paulo (SÃO PAULO, 2011), para um trabalho efetivamente pedagógico, como também oportunizar ao futuro professor de Matemática, condições de pensar e vivenciar uma prática pedagógica a partir das condições e necessidades escolares.



## **Procedimentos metodológicos para o desenvolvimento de uma atividade de investigação sobre a Fórmula de Pick**

Como o objetivo da pesquisa era analisar referências didático-pedagógicas para o ensino e a aprendizagem da Fórmula de Pick, as ações metodológicas para alcançar este objetivo possibilitaram classificá-la como uma pesquisa descritivo-interpretativa. Entre os anos de 2014 e 2015, uma licencianda em Matemática de uma universidade pública do interior de São Paulo elaborou, desenvolveu com os alunos e analisou atividades pedagógicas sobre a Fórmula de Pick. O desenvolvimento das atividades pedagógicas ocorreu em aulas regulares de Matemática com uma turma de 8º ano de uma escola estadual paulista.

Para a primeira etapa da pesquisa, o objetivo específico era proporcionar à futura professora de Matemática uma familiarização ou experiência inicial com as características de uma Atividade de Investigação Matemática (LAMPERT, 1990; NCTM 1998; GOLDENBERG, 1999; PONTE et al., 1999a; PONTE et al., 1999b; PONTE, BROCARD e OLIVEIRA, 2003) em situação regular de sala de aula. De acordo com esse objetivo, a futura professora desenvolveu atividades didáticas utilizando uma Atividade de Investigação Matemática com uma turma do 6º ano do Ensino Fundamental da mesma escola. Com essa atividade foram trabalhados conceitos matemáticos relacionados a: Múltiplos e Divisores; Números Primos; Operações Básicas e Introdução a Potências. Pode-se afirmar que esta primeira etapa foi fundamental para que a futura professora vivenciasse o papel que é desempenhado pelo professor de Matemática em uma atividade de investigação.

A segunda etapa da pesquisa ocorreu com alunos do 8º ano do Ensino Fundamental. Nesta turma, a atividade de investigação versava sobre o contexto, o desenvolvimento e a aplicação da Fórmula de Pick.

O objetivo principal da atividade era proporcionar aos alunos um reconhecimento da situação problema apresentada, a exploração, a organização de dados e uma melhor elaboração de suas justificativas para os resultados encontrados. Nessa perspectiva, durante o desenvolvimento da atividade, a futura professora realizava questões aos alunos, tais como: de que maneira você chegou ao resultado? Por que colocou esse valor?). O que você fez aqui? Por quê?

A avaliação da aprendizagem dos alunos foi realizada pela futura professora durante toda a atividade, baseando-se no pressuposto no qual o professor deve saber se os alunos estão progredindo no conteúdo, se precisam de ajuda para entender melhor, saber qual é o desempenho do aluno nas atividades e se precisa mudar a maneira de se ensinar (PONTE et al., 1999b; PONTE et al., 2003).

O professor precisa estar atento a todo esse processo de formulação e teste de conjecturas, para garantir que os alunos vão evoluindo na realização de investigações. Desse modo, cabe-lhe colocar questões aos alunos que os estimulem a olhar em outras direções e os façam refletir sobre aquilo que estão a fazer. (PONTE, 2009, p. 36).

A avaliação sobre as ações realizadas na atividade de investigação (Quadro 1) ocorreu durante todo o processo didático, pois através da mesma, era possível saber se os alunos estavam progredindo na aprendizagem do conteúdo, se precisavam de ajuda para reelaborá-lo, e igualmente fornecer dados de realidade para que a futura professora pudesse refletir sobre suas ações e planejar e reelaborar ações futuras.

As atividades nas quais a Fórmula de Pick foi o meio para que se desenvolvessem com os alunos princípios pedagógicos, tais como supõe uma atividade de investigação (PONTE et al., 1999b; PONTE et al., 2003), foram escolhidas indo ao encontro do referencial teórico da pesquisa, implicando que os alunos, ao participarem de uma atividade de investigação matemática, perceberiam e entenderiam o que estava sendo solicitado em cada questão realizada, apesar de dificuldades apresentadas pelos alunos com operações matemáticas elementares e com a organização dos dados que tinham origem no desenvolvimento da atividade.

Comumente a partir do 6º ano do Ensino Fundamental, o conteúdo escolar referente ao cálculo da área de figuras geométricas planas tem seu desenvolvimento pedagógico através da decomposição e composição de polígonos e também da identificação de medidas associadas à base, à altura e a diagonais. Conforme a grade curricular de Matemática da Secretaria de Educação do Estado de São Paulo, no 4º bimestre do 8º ano, é proposto o desenvolvimento curricular dos conceitos relacionados à equivalência entre polígonos e à dedução e aplicação de fórmulas matemáticas, oriundas do Teorema de Tales; Teorema de Pitágoras e Teorema de Pick para o cálculo das áreas de polígonos simples: paralelogramo, losango, trapézio, triângulo, entre outros.

No entanto, somente apresentar a Fórmula de Pick aos alunos ou mostrar pelo processo de indução finita sua sistematização e validade seria contrário aos princípios de aprendizagem que entendem o aluno como participante no processo de aprender. Quais as oportunidades de participar, de errar, de levantar hipóteses, de partilhar resultados, entre outras ações, são possíveis em uma aula de Matemática cujo processo de ensino e aprendizagem está centrado no professor e em seus raciocínios e procedimentos cognitivos e não na qualidade da relação aluno que aprende e conhecimento a ser aprendido?

Assim, as atividades sobre a Fórmula de Pick desenvolvidas com a turma do 8º ano foram elaboradas tendo como base a aula Figuras Poligonais em Malha Pontilhada (OLIVEIRA, 2011), que procura contemplar os principais momentos de investigação (Quadro 1). Igualmente era preciso que essas atividades, ao mesmo tempo, estivessem coerentes com o conteúdo matemático

já desenvolvido pela professora de Matemática responsável pela turma e pudessem possibilitar que os alunos tivessem proveitoso entendimento matemático.

Nos cadernos pedagógicos de Matemática distribuídos pela Secretaria de Educação do Estado de São Paulo, destinados aos alunos do 8º ano, a Fórmula de Pick pode ser encontrada na situação de aprendizagem 1: Áreas de figuras planas. Nessa situação, propõe-se o ensino do conceito de equivalência entre figuras geométricas, solicitando-se que os alunos realizem exercícios.

A Fórmula de Pick é apresentada na sequência diante de um exemplo e de um exercício para verificar a equivalência das áreas. É possível perceber que trabalhar a sequência de atividades didáticas para a Fórmula de Pick, disponibilizada pela SEE (Figura 2), não determinaria um contexto didático no qual a futura professora pudesse conhecer os desempenhos dos alunos, refletindo sobre o quê e como realizar superações de dificuldades relacionadas ao entendimento e à aplicação da Fórmula de Pick, assim como é proposto em uma atividade investigativa. Desse modo, a futura professora elaborou as atividades didáticas sobre a Fórmula de Pick, que foram trabalhadas com alunos no horário regular das aulas de Matemática na escola.


Durante desenvolvimento da atividade pedagógica, os alunos eram avaliados em termos de organização e exposição de suas ideias, bem como das descrições e justificativas de seus raciocínios, correção e clareza dos conceitos matemáticos e criatividade. Esse tipo de participação dos alunos era a referência para a futura professora refletir durante a ação pedagógica realizada e sobre a mesma (LAMPERT, 1990; FONZI, 1999; PONTE et al., 1999a, PONTE et al., 1999b; PONTE et al., 2003).

O relatório feito pelos alunos sobre a atividade realizada, contendo descrições de procedimentos, rascunhos de resoluções, questões e resoluções definitivas foi também instrumento de avaliação utilizado pela futura professora. A ação de avaliar, a partir desses parâmetros, foi fundamental para referenciar o trabalho pedagógico que realmente estivesse de acordo com uma atividade de investigação e com ações do “fazer Matemática”, no sentido de Caraça (1963), Davis e Hersh (1989) e Enzensberger (2002).

**Figura 2:** Proposta de atividade didática com a Fórmula de Pick apresentada no Material de Apoio ao Currículo do Estado de São Paulo

Matemática – 7ª série/8º ano – Volume 2

---


 **Leitura e análise de texto**

**Fórmula de Pick: calculando áreas por contagem**

Em 1899, o matemático tcheco Georg Alexander Pick publicou um artigo que apresentava uma fórmula para cálculo de áreas de polígonos cujos vértices eram pontos de uma malha quadriculada. Observando a composição e a decomposição de figuras planas na malha, Pick percebeu um padrão que associava a área de um polígono à quantidade de pontos da malha que se situavam no seu interior e sobre seu perímetro.

A fórmula de Pick, para um polígono cujos vértices são pontos de uma malha quadriculada, é:  $A = \frac{B}{2} + I - 1$ , em que **A** é a área do polígono, **B** é a quantidade de pontos da malha situados sobre a fronteira do polígono e **I**, o número de pontos da malha existentes no interior do polígono.

---

 **VOCÊ APRENDEU?**

4. A seguir, apresentamos três figuras – um quadrado, um paralelogramo e um triângulo retângulo. Preencha a tabela apresentada e aplique a fórmula de Pick para encontrar a área das três figuras. Em seguida, conclua se há equivalência entre esses polígonos.

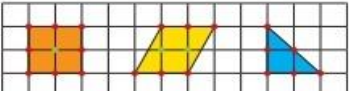


Figura	Valor de B	Valor de I	Cálculo	Área
Quadrado				
Paralelogramo				
Triângulo retângulo				

66

Fonte: Caderno do Aluno. Matemática. Ensino Fundamental – 8ºano, v. 2. Secretaria da Educação do Estado de São Paulo, 2014 – 2017, p. 66

### Participação, hipóteses, dúvidas, erros, partilhas... sistematizando a Fórmula de Pick na aula de Matemática

Antes de começar as atividades regulares da aula, a professora de Matemática responsável pela turma passou alguns recados e fez a chamada. Em seguida, acompanhou o início do trabalho didático, realizado pela futura professora, auxiliando durante as aulas. A professora responsável pela turma explicou para a futura professora que os alunos ainda não haviam trabalhado em aula, naquele ano, atividades sobre o cálculo de área. No entanto, já tinham conhecimento sobre as fórmulas tradicionais para polígonos simples.

A futura professora se apresentou e comentou sobre o conteúdo, explicando as fórmulas tradicionais para polígonos simples. As fórmulas lembradas pelos alunos foram do quadrado, retângulo e triângulo, porém a fórmula do trapézio os alunos ainda não conheciam. A futura professora anotou na lousa e em seguida pediu exemplos do cotidiano que estivesse relacionado com área. Falaram sobre área de terrenos, cerâmicas, capa para caderno, pessoas por metro quadrado, e entre outros.

Os alunos calcularam as áreas das imagens que estavam sobre a malha pontilhada, para isso, era preciso o conhecimento das fórmulas sistematizadas para o cálculo da área de triângulos, retângulos, quadrados e trapézios, que foram discutidas com os alunos. Quando foi necessário o cálculo de áreas das figuras geométricas, a futura professora contou uma pequena história com o objetivo de levar os alunos a pensarem sobre como surgiu a necessidade de se ter o tamanho ou a medida de um dado lugar ou de um espaço.

[...] o antigo Egito, por volta de 1300 a. C., os agricultores pagavam impostos sobre suas terras, e como a maioria dos terrenos eram às margens do Rio Nilo, na época das cheias anuais um pedaço das terras eram levadas pela água, e não seria justo pagar pelo mesmo tanto de impostos, não é mesmo? Ou seja, essa civilização tão antiga já tinha sua maneira de calcular área de terrenos. (FUTURA PROFESSORA DE MATEMÁTICA).

De acordo com Guelli (1994), a maneira dos povos do Antigo Egito para o cálculo da área era utilizar a fórmula:  $A = (a + d) / 2 + (b + c) / 2$ , como exemplo:

Um terreno retangular de medidas 4 por 7 metros, ou seja,

$$A = (4+7) / 2 + (4+7) / 2 = 22/2 = 11.$$

Em continuação com o desenvolvimento da aula, a futura professora de Matemática pediu que os alunos formassem grupos e assim a atividade escrita que lhes foi entregue. A futura professora esperou que os alunos lessem as perguntas e para começarem suas participações na atividade.

(Futura professora): quantas unidades ou quadradinhos cabem dentro da figura 1?

(Alunos): 19 quadradinhos.

(Futura professora): e na figura 2, quantas vezes o quadrado aparece?

Cada aluno respondeu de uma forma. Uns diziam que havia 44 quadradinhos, 46, outros disseram 48 e somente um aluno respondeu 51. Todos disseram que ele estava errado, pois o valor era o único diferente e maior de todos, e assim começamos a responder a pergunta 2. Diante do contexto da atividade, a futura professora chamou a atenção dos alunos sobre os pontos B (pontos das bordas) e I (pontos do interior) de cada figura.

Para preencher a tabela que constava no item 2 da atividade, os alunos foram levados a calcular as áreas dos polígonos, inicialmente através de fórmulas comumente utilizadas.

Terminado o preenchimento a futura professora perguntou: será que existe uma fórmula que dê para calcular a área de qualquer uma dessas figuras se elas estiverem desenhadas sobre uma malha de pontos? Então foi distribuída uma folha de papel pontilhado a cada aluno e todos foram orientados a desenhar as figuras geométricas que estavam na tabela. Combinou-se com os alunos que as medidas das figuras a serem desenhadas deveriam ser as mesmas utilizadas quando se aplicou fórmulas conhecidas para o cálculo da área.

Nesse momento, por meio de exploração das características de cada figura (pontos de fronteira e pontos interiores) e a área encontrada para as mesmas deu-se início à realização de ações que compõem o processo indutivo presente no fazer Matemática e anterior à sistematização de uma fórmula: reconhecer uma questão a ser respondida, formular questões junto ao contexto vivenciado, construir e organizar dados, fazer hipótese, testar hipóteses, reelaborar e justificar hipóteses avaliando o raciocínio utilizado bem como seu resultado (CARAÇA, 1963; DAVIS e HERSH, 1989; ENZENSBERGER, 2002).

Encontrar essa fórmula matemática passou a ser um desafio para os alunos e igualmente mostrou-se como oportunidade de participar desse encontro entendendo a situação vivida:

(Aluno): soma sempre os pontos de dentro com os do contorno.

(Futura professora): um colega encontrou a fórmula. Ela é válida para todas as figuras?

(Futura professora): quantos pontos interiores do retângulo tenho na tabela e quantos pontos de fronteira?

(Aluno): quatro pontos de dentro e quatorze de contorno.

(Futura professora): vamos aplicar a fórmula do colega e ver se resultará na área do retângulo.

(Aluno) - quatro com quatorze é dezoito e a área é dez.

Nesse instante estava colocada a questão de verificação da hipótese na qual a fórmula para área de qualquer figura em uma malha pontilhada era a soma dos pontos internos com os de fronteira. Muitas sugestões foram dadas pelos alunos. No entanto, partiu da futura professora a sugestão de subtrair uma quantidade de pontos da outra, o que se mostrou verdadeiro apenas para o primeiro polígono da tabela. Logo, a futura professora explicou aos alunos que para esta situação (figuras sobre uma pontilhada) uma fórmula matemática tem que ser adequada para todas as figuras. Então, nesse contexto, a fórmula foi sendo construída e testada em meio a diálogos:

(Futura professora): e se tirar dos pontos de fronteira do trapézio os pontos interiores? Teremos então dez menos quatro, seis, então temos a área do trapézio?

(Aluno): não. A área é oito!

Afirmar que a fórmula existia e que “servia” para todo polígono sobre uma malha pontilhada instigou os alunos, levando a pensar e testar várias operações com os dados que possuíam relativos a pontos de contorno e internos às figuras da tabela. Assim, houve casos de

multiplicação entre as quantidades de pontos, divisão e a tentativa de combinar operações. Conforme os casos iam sendo relatados pelos alunos, a futura professora propunha situações a serem pensadas e testadas:

(Futura professora): no primeiro polígono, e se eu pegar os pontos do contorno e dividir por dois? Como ficaria a fórmula? E se agora somar pontos interiores?

(Futura professora): se dividirmos o número de pontos do contorno do retângulo por dois e somarmos o número resultante com o número de pontos interiores, teremos então quatorze dividido por dois que resulta em sete, sete mais quatro que resulta em onze, notemos que não obtivemos o valor da área do retângulo.

Para cada figura da tabela, os alunos foram levados a comparar o resultado oriundo do fato de dividirem o número de pontos de fronteira por dois e somar o número de pontos interiores.

(Futura professora): para o triângulo temos o valor quatro, mas sua área é três. O que precisa fazer com esse valor quatro?

Ao compararem os resultados e estimulados pelas questões da futura professora, os alunos usaram procedimentos de aproximação de valores até concordarem entre si que precisavam sempre subtrair 1 do valor encontrado.

(Futura professora): como fica então a fórmula?

Finalmente, a Fórmula de Pick foi apresentada aos alunos através de uma representação escrita, e esta foi apresentada da seguinte forma:  $\frac{B}{2} + I - 1$ , em que B representa a quantidade de pontos de fronteira e I representa a quantidade de pontos internos ao polígono. A futura professora explicou que essa fórmula é atualmente conhecida como a Fórmula de Pick, foi um matemático chamado Georg Alexander Pick (1859-1942) que a desenvolveu.

Esse momento, de acordo com a futura professora de Matemática, foi muito interessante, pois todos os alunos participaram ativamente e conjuntamente na atividade, ouviram atentamente os aspectos envolvidos na fórmula apresentada.

Ainda para a futura professora, auxiliar os alunos no preenchimento da tabela com o objetivo que comparassem resultados encontrados, explicando esses resultados, ações que antecederam a apresentação da Fórmula de Pick, foi uma experiência promissora, no sentido de ser uma referência para “dar aulas”, pois conceitos e fórmulas matemáticas têm condições de fazer parte de um processo pedagógico que seja convidativo aos alunos e que lhes possibilite aprender Matemática de forma significativa.

Na avaliação dos alunos foi utilizada a observação de como reagiam durante a atividade, sua organização para responder e expor suas ideias, a descrição e justificativa do seu raciocínio e a

clareza de sua resposta. Outro recurso utilizado para avaliar foi um relatório sobre a atividade desenvolvida no qual expunham suas ideias e o que aprenderam durante a atividade.

## **Resultados**

O objetivo da pesquisa era analisar referências pedagógicas para o desenvolvimento, entendimento e aplicação de uma fórmula matemática, neste caso, a Fórmula de Pick. Os resultados apontam que essas referências são aquelas que se identificam com procedimentos didáticos pedagógicos que sejam caracterizados por: 1) estabelecimento de um contexto didático favorável ao professor e ao aluno, no que diz respeito à clareza das atividades pedagógicas a serem desenvolvidas, bem como à motivação que essas atividades devem despertar no aluno para participarem das mesmas e 2) caracterização da aula de Matemática como um contexto didático no qual o professor tenha condições de mediar a relação entre o aluno que aprende e o conteúdo matemático a ser aprendido.

Os itens 1 e 2 permitem que se entenda como de fundamental importância a utilização de material didático que suscite no aluno condições para usar conhecimentos matemáticos que possui e igualmente predisposição para participar da aula de Matemática. Igualmente se espera que a relação aluno e conteúdo a ser aprendido, mediada pelo professor, seja fonte de oportunidades para o aluno encontrar exemplos e contraexemplos, formular hipóteses e comprová-las, promovendo o despertar de interesse para solucionar uma situação entendida como um problema (POLYA, 1995) a partir de diferentes representações matemáticas.

Em conformidade com os resultados, entende-se também como perspectiva de referência pedagógica a valorização do trabalho coletivo entre alunos e professor, caracterizado pela colaboração na interpretação de situações-problema, na elaboração de estratégias de resolução e na sua validação, implicando novos olhares para a origem e a consolidação de conhecimentos matemáticos.

## **Conclusões**

Diante dos resultados e de suas análises, conclui-se que as aulas de Matemática, que ocorrem com ações caracterizadas por princípios de atividades de investigação matemática (NCTM 1998; GOLDENBERG, 1999; PONTE et al., 1999a; PONTE et al., 1999b; PONTE, BROCARD e OLIVEIRA, 2003), realizadas pelos alunos, a professora responsável pela classe e uma futura professora de Matemática, formaram um contexto didático que se caracterizou por



movimentos de ação e de reflexão sobre ação. Nesse contexto, os resultados levaram a inferir que houve, por parte dos alunos, produtivo envolvimento cognitivo no processo de ensino e aprendizagem de uma fórmula Matemática, caracterizado pela formulação e o teste de hipóteses, pela busca de justificativa de resultados e pela realização de trocas de informações com os colegas, utilizando conhecimentos anteriores.

Igualmente a descrição dos resultados identificou nesse contexto oportunidades para os alunos desenvolverem e consolidarem uma fórmula matemática de modo significativo para eles, contrariamente ao que se percebe quando uma fórmula é apresentada e associada a alguma situação de cálculo de quantidades ou medição. Nessa perspectiva, as características de uma atividade de investigação foram fundamentais para compor esse contexto didático e as referências e procedimentos curriculares que se depreenderam do mesmo, possibilitando que outras referências curriculares surjam, a partir de outras pesquisas, com Atividade de Investigação Matemática que utilizem os mais diferenciados conceitos matemáticos como meio para serem desenvolvidas.

## Referências

ASSOCIAÇÃO DOS PROFESSORES DE MATEMÁTICA. **Renovação do Currículo de Matemática**. Lisboa: APM, 1988.

BARRETO, Marina Menna; GARCIA, Vera Clotilde. Experimento didático: uma pesquisa para investigar mudanças cognitivas no processo de modelagem matemática. **Cadernos do Aplicação**, Porto Alegre, v. 21, n. 2, jan./jun. 2008. Acesso em 15 de agosto de 2012. p. 133 – 156.

BIEMBENGUT, Maria Salete.; HEIN, Nelson. **Modelagem matemática no ensino**. São Paulo: Editora Contexto, 2000.

BOAVIDA, Ana Maria e GUIMARÃES, Fátima. Materiais para a aula de Matemática. **Educação e Matemática**, 70, p. 26 – 7, 2002.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: introdução aos parâmetros curriculares nacionais/ Secretaria de Educação Fundamental**. – Brasília: MEC/SEC, 1997.

CARAÇA, Bento de Jesus. **Conceitos Fundamentais da Matemática**. Lisboa: Bertrand Ltda, 1963.

D'AMBROSIO, Ubiratan. **Etnomatemática: Elo entre as tradições e a modernidade**. Minas Gerais: Editora Autêntica, 2001.

DAVIS, Philip; HERSH, Reuben. **A Experiência Matemática**. Rio de Janeiro: Francisco Alves, 1989.

DOMITE, Maria do Carmo Santos. Notas sobre a formação de professores e professoras numa perspectiva da etnomatemática. São Paulo: **Anais** do primeiro congresso brasileiro de Educação Matemática-CBEm1, 2000.

ENZENSBERGER, Hans Magnus. **O Diabo dos Números**. São Paulo: Cia da Letras, 2002.

FONZI, Judith. Compreender o que é necessário para apoiar os professores no desenvolvimento de uma pedagogia da inquirição: identificando as suas necessidades de aprendizagem e práticas adequadas de desenvolvimento profissional. In: In: ABRANTES, Paulo et al (Orgs). **Investigações Matemáticas na Aula e no Currículo**. Lisboa: Grupo Matemática para Todos e APM, 1999.

GOLDENBERG, Paul. Quatro Funções da Investigação na Aula de Matemática. In: ABRANTES, Paulo; PONTE, João Pedro da; FONSECA, Helena e BRUNHEIRA, Lina. **Investigações Matemáticas na Aula e no Currículo**. Lisboa: Grupo Matemática para Todos e Associação de Professores de Matemática, 1999.

KLEIN, Marjúnia Edita Zimmer; COSTA, Sayonara Salvador Cabral. Investigando as Concepções Prévias dos Alunos do Segundo Ano do Ensino Médio e seus Desempenhos em alguns Conceitos do Campo Conceitual da Trigonometria. **Bolema**, Rio Claro (SP), v. 24, nº 38, p. 43-73, abril 2011.

KLINE, Morris. **O Fracasso da Matemática Moderna**. São Paulo: IBRASA – instituto Brasileiro de Difusão Cultural, 1976.

LAMPERT, Magdalene. When the Problem is not the question and the Solution is not the Answer: Mathematical Knowing and Teaching. In: **American Educational Research Journal**, 27 (1), p. 29 – 63, 1990.

MENEGHETTI, Renata Cristina; REDLING, Julyette Priscila. Tarefas Alternativas para o Ensino e a Aprendizagem de Funções: análise de uma intervenção no Ensino Médio. **Bolema**, Rio Claro (SP), v. 26, n. 42A, p. 193 – 229, 2012.

MIGUEL, Antônio. **Três estudos sobre História e Educação Matemática**. 1993. Tese (Doutorado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade de Campinas, 1993.

NCTM – NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS. **Normas Profissionais para o Ensino da Matemática**. Lisboa: Associação de Professores de Matemática e Instituto de Inovação Educacional, 1998.

OLIVEIRA, R. G. **Área de Figuras Poligonais em Malha Pontilhada**. Disponível em: <http://portaldoprofessor.mec.gov.br/fichaTecnicaAula.html?aula=30282>. Acesso em: 13 mar. 2014.

POLYA, George. **A arte de resolver problemas: um novo aspecto metodológico**. 2 reimpr. – Rio de Janeiro: Interciência, 1995.

PONTE, João Pedro da; BROCARD, Joana; OLIVEIRA, Hélia. **Investigações Matemática na Sala de Aula**. Belo Horizonte: Autêntica, 2003

\_\_\_\_\_. Investigação sobre Investigações Matemáticas em Portugal. **Investigar em Educação**, 2, p. 93 – 169, 2003.

PONTE, João Pedro da et al. Investigando as Aulas de Investigações Matemáticas. In: ABRANTES, Paulo et al. **Investigações Matemáticas na Aula e no Currículo**. Lisboa: Grupo Matemática para Todos e Associação de Professores de Matemática, 1999a.

\_\_\_\_\_. **A Relação Professor-Aluno na Realização de Investigações Matemáticas**. Lisboa: Associação de Professores de Matemática, 1999b.

SÃO PAULO (ESTADO). **Material de Apoio ao Currículo do Estado de São Paulo**. Caderno do Aluno. Matemática. Ensino Fundamental – Anos Finais: 7ª SÉRIE/8ºano, v. 2. Coord. Nilson José Machado. São Paulo: SEE, 2014 – 2017.

SÃO PAULO (ESTADO). SE/CENP. **Proposta Curricular para o Ensino de Matemática: 1º Grau**, 1986.

SILVA, ALBANO, et al. O Currículo de matemática e as atividades de investigação. In: ABRANTES, Paulo et al (Orgs). **Investigações Matemáticas na Aula e no Currículo**. Lisboa: Grupo Matemática para Todos e APM, 1999.

São Paulo (Estado) Secretaria da Educação. **Currículo do Estado de São Paulo: Matemática e suas tecnologias / Secretaria da Educação; coordenação geral, Maria Inês Fini; coordenação de área, Nilson José Machado**. – 1. ed. atual. – São Paulo: SE, 2011.72 p.