artigo

Alguns aspectos do desenvolvimento histórico do

Conceito de Função

EDNA MAURA ZUFFI

INSTITUTO DE CIÊNCIAS MATEMÁTICAS E DE COMPUTAÇÃO – ICMC – USP, CX. POSTAL 668,
SÃO CARLOS, SP, CEP 13560-970, E.MAIL: *edna@icmc.sc.usp.br*

O conhecimento da gênese histórica dos conceitos matemáticos pode ser uma ferramenta de grande valia para a elaboração da linguagem matemática e para uma compreensão mais profunda desses conceitos. Em particular, a idéia de função, tendo percorrido muitos séculos desde as suas primeiras noções intuitivas, e tendo chegado à sua elaboração mais recente apenas no século XX, mostra uma grande riqueza histórica ainda a ser explorada, principalmente na formação dos professores de Matemática. Nossa intenção, neste artigo, é trazer à tona alguns dos fatos da gênese histórica desse conceito, propondo também breves reflexões, obtidas em nossa pesquisa sobre a sua exploração por parte de professores do Ensino Médio.

PALAVRAS-CHAVES:
função, gênese histórica, linguagem matemática, professores de Matemática

Neste artigo, não pretendemos fornecer uma análise minuciosa de todos os aspectos ligados ao desenvolvimento histórico do conceito de função, mas acreditamos que o compartilhar de alguns desses fatos com os colegas professores possa ser de grande utilidade na compreensão das diferentes definições propostas para esse conceito.

A partir dessas definições, e com a constatação de que nem todas as motivações históricas que surgiram para o seu aprimoramento podem estar presentes na sala de aula, os professores poderão fazer uma análise crítica dos modos pelos quais essas idéias são apresentadas aos alunos.

Uma pesquisa recente de ZUFFI (1999) mostrou que há uma diversidade de conceituações para as funções, defendidas pelos professores do Ensino Médio, que variam com o contexto em que são propostas. Mais ainda, revelou que nem sempre os professores têm consciência dessas diferenças.

A análise histórica, então, vem nos auxiliar a compreender que a criação em Matemática não se dá num momento único. Há fatores socioculturais influenciando fortemente essa criação, todos dependendo dos problemas que as sociedades de cada época propõem como relevantes, juntamente com a comunidade científica. Da mesma maneira, na sala de aula, a elaboração das idéias matemáticas depende dos problemas levantados pelos alunos e pelo professor, bem como das formas de expressão, através da linguagem matemática, com as quais essas idéias são abordadas.

Um pouco de história

No trabalho de SIERPINSKA (1992), encontramos alguns momentos da evolução da idéia de função. Nele, há a ressalva de que, na definição atual de função, os papéis exercidos pelo 'domínio' e o 'contradomínio' não são simétricos:

> *Esta condição não nos parece um problema agora, mas foi necessário muito tempo na história para atingi-la como algo importante para se distinguir a ordem das variáveis. (...) Os historiadores atribuem a discriminação entre as variáveis dependentes e independentes a Descartes, mas parece que os papéis das coordenadas em sua 'Geometrie' eram marcadamente simétricos. (SIERPINSKA, 1992[2], p.38)*

Não parece existir consenso entre os diversos autores, a respeito da origem do conceito de função. Alguns deles consideram que os babilônios já possuíam um "instinto de funcionalidade". (YOUSCHKEVITCH, 1976, apud MACHADO, 1998). Pode-se encontrar este "instinto de funcionalidade", que precede uma idéia mais geral de função, desde cerca de 2000 a.C., em seus cálculos com tabelas sexagesimais de quadrados e de raízes quadradas, as quais podem ser tomadas como "funções tabuladas", e que eram destinadas a um fim prático.

As tabelas, entre os gregos, que faziam a conexão entre a Matemática e a Astronomia, mostravam evidências de que estes percebiam a idéia de dependência funcional, pelo emprego da interpolação linear. (YOUSCHKEVITCH, 1976, apud MACHADO, 1998).

Segundo BOYER (1974), na França há indícios de idéias primárias de função anteriores a 1361, quando Nicole Oresme descreveu graficamente um corpo movendo-se com aceleração uniforme. Porém, o trabalho de Oresme resumia-se a descrever aspectos qualitativos, sem se utilizar de medidas. (YOUSCH-KEVITCH, 1976, apud MACHADO, 1998).

Para YOUSCHKEVITCH (1976), há três fases principais do desenvolvimento da noção de função:

1) A Antigüidade, na qual o estudo de casos de dependência entre duas quantidades ainda não havia isolado as noções de variável e de função;

2) A Idade Média, onde as noções eram expressas sob uma forma geométrica e mecânica, mas em que ainda prevaleciam, em cada caso concreto, as descrições verbais ou gráficas;

3) O período Moderno, a partir do século XVII, principalmente, que comporta, a seguir, um melhor detalhamento.

Galileu Galilei (1564-1642) contribuiu para a evolução da idéia de função, ao introduzir o tratamento quantitativo nas suas representações gráficas. Nessa época, o aprimoramento dos instrumentos de medida propiciaram a busca de resultados inspirados na experiência e na observação. Já Descartes (1696-1650) utilizou-se de equações em x e y para introduzir uma relação de dependência entre quantidades variáveis, de modo a permitir o cálculo de valores de uma delas, a partir dos valores da outra.

Entretanto, compreendemos que foi a partir dos trabalhos de Newton (1642-1727) e Leibniz (1646-1716) que surgiram as primeiras contribuições efetivas para o delineamento desse conceito.

Na teoria de Newton sobre *"fluentes"*, termo que ele usava para descrever as suas idéias de funções, estas encontravam-se bastante ligadas à noção de curva e às *"taxas de mudança"* de quantidades variando continuamente. E mais ainda, restringiam-se a *"imagens geométricas de uma função real, de variável real"* (CARAÇA, 1952).

Newton desenvolveu também uma grande habilidade em expressar estes "fluentes" em termos de séries infinitas. Tentou definir limite de uma função, falando em "quantidades" e "taxas de quantidades" (BOYER, 1974), termos que são bastante imprecisos e distantes da noção de limite que conhecemos hoje.

Foi Leibniz, na década de 1670, quem usou o termo "função", para se referir a *"certos segmentos de reta cujos comprimentos dependiam de retas relacionadas a curvas"*. Logo depois, o termo foi usado para se referir a quantidades dependentes ou a expressões (ITÔ, 1987).

Nota-se que as primeiras definições do conceito revelam um certo encantamento pela álgebra, onde a função é *dada por uma* expressão algébrica, como veremos a seguir, na definição dada por Jean Bernoulli (1667-1748): *"Função de uma quantidade variável é uma quantidade composta de alguma maneira desta variável e de quantidades constantes."* (SIERPINSKA, 1992, p. 45, tradução nossa).

Jean Bernoulli estava interessado em funções que fossem bem comportadas, devido à natureza dos problemas para os quais contribuiu, como o aprimoramento da utilização da regra de L'Hospital para formas indeterminadas de limite, que envolviam funções diferenciáveis. Também deu grandes contribuições à Geometria Diferencial, com seus estudos sobre geodésicas em uma superfície. Jean experimentou várias notações para uma função de x, das quais a mais próxima da notação em uso é "fx" (BOYER, 1974).

Outra definição interessante é a de Leonard Euler (1707-1783), discípulo de Jean Bernoulli: "Uma função de uma quantidade variável é uma expressão analítica, composta de alguma maneira desta mesma quantidade e de números ou quantidades constantes. Assim, qualquer expressão analítica a qual, além da variável z, contém também quantidades constantes, é uma função de z. Por exemplo: a+3z; az-4zz; az+b/aa-zz; cz, etc, são funções de z." (SIERPINSKA, 1992, p.45)

Euler, a partir de seu "Introductio in analysin infinitorum", de 1748, organizou o Cálculo Diferencial, ampliando a idéia de "fluentes" de Newton para um ramo mais abrangente da Matemática - a Análise, a qual se caracteriza pelo estudo de processos infinitos (BOYER, 1974). A partir daí, a idéia de função tornou-se fundamental *para esta área, enquanto* esteve implícita na Geometria Analítica de Fermat e Descartes, e nos estudos de Newton e Leibniz.

Entretanto, a definição dada por Euler não explicita o que é uma "expressão analítica". Não se deve, porém, deixar de observar que este matemático trouxe grandes contribuições para a linguagem simbólica e as notações que utilizamos hoje, entre elas, o "f(x)" para denotar uma função de x, sem esquecer da letra e, para a base de logaritmos naturais, π para o perímetro da circunferência dividido por seu diâmetro, i para $\sqrt{-1}$, Σ para somatório, etc. Euler estudou particularmente as funções exponenciais e os logaritmos. Trocou correspondências com D'Alembert, sobre o "problema das cordas vibrantes", que envolvia equações diferenciais e funções diferenciáveis (e, portanto, bem comportadas).

A imprecisão da definição de limite de uma função, proposta por Euler, que se utilizava de idéias dúbias sobre os diferenciais, parece refletir a própria imprecisão em sua definição de função e de variável. Segundo Euler, os diferenciais eram símbolos para "quantidades que são zero" e também "quantitativamente diferentes de zero". Esta sua proposta foi criticada por D'Alembert, que tentou melhorar o conceito de limite, mas a questão só foi bem resolvida no século XIX (BOYER, 1974).

A nosso ver, um detalhe interessante que pode ter indiretamente contribuído para o aperfeiçoamento da definição de função (e, particularmente, para a de funções logarítmicas e exponenciais), foi que Euler esclareceu que os logaritmos de números negativos não são números reais. Isto era bastante confuso, até então, e acabou por levar a se pensar em restrições para os domínios destas funções e para as bases consideradas. Euler também trabalhou com as funções seno e co-seno para números complexos, o que, juntamente com os estudos de D'Alembert a este respeito, serviram como antecipação de um ambiente favorável para o desenvolvimento da teoria de funções de variáveis complexas de Cauchy, no século XIX.

Outra definição de função interessante é a do matemático francês Jean-Louis Lagrange (1736-1813):

"Chama-se função de uma, ou várias quantidades, toda expressão de cálculo na qual estas quantidades entram de uma maneira qualquer, misturadas ou não com outras quantidades, que se vêem como valores dados e invariáveis, de modo que as quantidades da função podem receber todos os valores possíveis. Assim, nas funções considera-se somente as quantidades que sejam variáveis, sem consideração às constantes que podem estar aí misturadas." (SIERPINSKA, 1992, p.45).

Lagrange utilizou as notações f'(x), f''(x), ..., f n(x) para a 1ª., 2ª., ..., n-ésima derivadas de uma função f(x). Também trabalhou com a expansão de funções em séries de potências, mas deixou lapsos quanto à convergência das mesmas. Lagrange publicou resultados sobre mecânica e teoria de equações, contribuindo com o "método da variação dos parâmetros" para a solução de equações diferenciais lineares não-homogêneas, e com os "multiplicadores de Lagrange", para máximos e mínimos condicionados de uma função f(x,y,z,w). (Nota-se que sua definição de função tem o cuidado de incluir funções de várias variáveis). Também interessou-se pela Teoria dos Números e, na Álgebra, contribuiu com o teorema que diz que a ordem de um subgrupo divide a ordem do grupo em que este se insere.

Percebe-se que essa foi uma época de grande entusiasmo pelo Cálculo, porém não suficiente para que se extinguissem por completo as confusões sobre seus princípios básicos. Entretanto, as discussões geradas neste período, pareceram ter fortes influências no desenvolvimento da "era do rigor" no século XIX.

Outro matemático francês a quem se atribui muito desse rigor, foi Augustin Cauchy (1789-1857). Embora Gauss (1777-1855) o tivesse acompanhado em termos do rigor empregado em seus trabalhos, o fato de Cauchy ter publicado mais e apresentar maior aptidão para o ensino parece ter lhe rendido mais créditos.

A definição de função, segundo Cauchy, era: "Chamam-se funções de uma ou várias quantidades variáveis às quantidades que se apresentam, no cálculo, como resultados de operações feitas sobre uma ou várias outras quantidades constantes ou variáveis". (SIERPINSKA, 1992, p.45, tradução nossa).

Embora lhe seja atribuído o rigor característico do século XIX, não nos parece que esta definição seja muito precisa, pois não esclarece, de pronto, qual seria a natureza dessas "operações" feitas sobre as variáveis. Porém, apesar dessa sua definição ainda imperfeita, a teoria de funções de uma variável complexa foi desenvolvida por Cauchy, a partir de 1814.

Nota-se que esse matemático já incorporava, como fundamento de suas teorias, o conceito de limite de D'Alembert, olhando os infinitesimais como variáveis dependentes. Ele também forneceu uma definição mais satisfatória de função contínua, e sua definição para a derivada deixava claro que funções descontínuas em um ponto não seriam aí diferenciáveis, embora gráficos descontínuos pudessem determinar uma área bem definida.

Pode-se observar algumas similaridades nos trabalhos de Cauchy e Bolzano (1781-1848). Este último, por volta de 1840, parecia reconhecer que os números reais não são enumeráveis, ou seja, que seu "infinito" é diferente daquele dos conjuntos de números naturais e inteiros.

Enquanto Newton, à sua época, preocupava-se com curvas suaves e contínuas, que representavam movimentos e fenômenos mecânicos, Bolzano, em 1834, apresentava uma função que era contínua, mas que não era diferenciável em nenhum ponto do intervalo em que se definia. Este exemplo, nada "comportado", passou despercebido até ser redescoberto e difundido por Weierstrass (1815-1897).

Segundo BOYER (1968, p. 598), o termo "função" é uma palavra-chave em Análise, e foi especialmente na clarificação deste termo que o processo de aritmetização da Análise surgiu, tendo Fourier um papel destacado nesse processo.

As diferenças de opinião entre D'Alembert e Euler, na metade do século XVIII, sobre a solução do "problema da corda vibrante", e a solução apresentada por Daniel Bernoulli (que parecia implicar periodicidade e ser menos geral que a solução dada pelos primeiros), foram eliminadas em 1824, por Fourier (1768-1830), quando esse último mostrou não ser este o caso.

Para Fourier, qualquer função y=f(x) poderia ser representada por uma série do tipo:

$$y = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx)$$

e esta conferiria maior generalidade ao tipo de função que poderia ser estudada. A série de Taylor, por exemplo, exigia funções diferenciáveis, enquanto que, para a representação de Fourier, bastaria que as funções fossem contínuas e diferenciáveis por partes, podendo apresentar, assim, infinitos pontos de descontinuidade na reta.

Em 1837, Peter Gustav Lejeune-Dirichlet (1805-1859), propôs a seguinte definição geral de função, que foi amplamente aceita até meados do século XX: "Se uma variável y está relacionada a uma variável x de modo que, ao se atribuir qualquer valor numérico a x, existe uma regra de acordo com a qual um único valor de y é determinado, então y é dito ser uma função da variável independente x" (SIERPINSKA, 1992, p.46).

Embora esta última chegue próximo à noção moderna de função, àquela época, os conceitos de "conjunto" e de "número real" ainda não tinham sido precisamente estabelecidos. Mas a "regra" proposta por esse matemático poderia ser bastante arbitrária. Dirichlet propôs a seguinte função real: f(x)=c, para os valores de x irracionais, e f(x)=d(c, para os valores de x racionais. Isso determinava, já nessa época, uma função bastante "mal comportada" (BOYER, 1974) e não-visualizável num gráfico.

Dirichlet foi quem forneceu as primeiras provas rigorosas para a convergência das séries de Fourier, para funções restritas a certas condições.

Segundo BOYER (1974), o ano de 1872 foi crucial para a aritmetização da Análise, com a investigação da natureza das funções e da noção de número (faltava, à época, uma definição mais precisa para a frase "número real"), que se iniciou com a proposta das séries de Fourier.

Bolzano já apresentara antes, provas puramente aritméticas para seus resultados e a redescoberta de seu exemplo de função contínua e não-diferenciável, por Weierstrass, levou este último a elaborar o teorema de Bolzano-Weierstrass. Por outro lado, Riemann tinha exibido uma função f(x) que era descontínua em quase toda parte de um intervalo e cuja integral existia e definia uma função contínua.

Somando-se a estes fatos, em 1844, Liouville exibia uma classe de números reais não-algébricos: os números de Liouville e os números da forma $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{10^{n!}}$. A transcendentalidade de π, $\pi 2$, e, $e2$ foi mostrada por essa ocasião, provando-se que estes números não são algébricos.

Em 1872, cinco matemáticos, inclusive Weierstrass, propuseram uma teoria de números reais como limites de seqüências de números racionais. Weierstrass viu a necessidade de se dar uma definição de número irracional que corrigisse o erro lógico de Cauchy. Este último definia todo limite de seqüência como número real e, por outro lado, um número real como limite de uma seqüência (de racionais). Weierstrass tentou adequar a questão, propondo a existência de um limite para a seqüência convergente e fazendo do limite da mesma seqüência, o número real correspondente.

Também em 1872, um argumento mais completo para o problema dos números reais foi dado por Dedekind (1831-1916). Este chegou à conclusão de que a essência da continuidade de um segmento de reta não é a idéia vaga de "estar próximo", mas uma propriedade oposta, em certo sentido: a natureza da divisão do segmento em duas partes, por um ponto do segmento (idéia de "cotas superiores e inferiores"). Com os "cortes de Dedekind"[3] no sistema de números racionais o conjunto dos números reais mostrou-se realmente como uma construção intelectual humana pouco intuitiva.

Ainda no ano de 1872, apareceu a definição precisa de um conjunto infinito, dada por Dedekind (na condição de que um de seus subconjuntos próprios esteja em correspondência biunívoca com o conjunto dado). Também Heine forneceu a definição de limites em termos de ε's e δ's que conhecemos hoje, resolvendo o problema de termos ainda imprecisos usados por Cauchy, como: "valores sucessivos", "aproximar indefinidamente" e "tão pequeno quanto se queira".

Cantor também apresentou contribuições sobre a noção de "infinito", mostrando que os infinitos dos naturais e dos reais não eram os mesmos.

O matemático italiano Giuseppe Peano (1858-1932) também deixou contribuições à noção de número, que, a nosso ver, podem ter influenciado na elaboração final do conceito de função. Peano fez uma escolha feliz para vários símbolos matemáticos que utilizamos ainda hoje ($\in$, $\cup$, $\cap$, $\supset$). Porém, sua maior contribuição talvez esteja nos três conceitos primitivos que estabeleceu em seus fundamentos de aritmética: o zero, o conceito de número (inteiro não-negativo) e a relação de ser sucessor de, os quais, junto com seus cinco postulados, forneceram uma construção rigorosa do conjunto dos números naturais.

Em seu "Sulla definizione de funzione, Atti dei Lincei", de 1911, Peano propõe reduzir o conceito de função ao conceito de relação unívoca (SIERPINSKA, 1992, p.48).

Na primeira metade do século XX, surgem publicações de Bourbaki, que era o pseudônimo de um grupo de matemáticos do qual participavam André Weil e Jean Dieudonné. É de Bourbaki a definição de função usada atualmente nos meios matemáticos e científicos, e que foi proposta em 1939:

Uma função é uma tripla ordenada (X,Y,f), onde X e Y são conjuntos e f é um subconjunto de X(Y, tal que, se (x,y)(f e (x,y')(f, então y=y' (SIERPINSKA, 1992, p.30).

Com esta definição mais geral - na qual o conceito de função pode ser definido de uma maneira simbólica, formal e quase que sem usar palavras da língua materna - e com a eliminação dos problemas lógicos que envolviam a construção do conjunto dos números reais, hoje é possível elaborar funções muito mais abrangentes. Por exemplo, aquelas usadas no sentido de "aplicações", definidas em conjuntos quaisquer, ou em estruturas da Álgebra, onde os domínios e imagens são "grupos", "corpos", "anéis", etc. Dentro da própria Análise, o conceito se estende à idéia de "funcional", quando o seu domínio é um espaço de funções, ou seja, quando temos, a grosso modo, "função de funções". As seqüências, numéricas ou mais gerais, passam a ser vistas como exemplos de funções, cujo domínio é o conjunto dos números naturais.

Observa-se que os problemas que ocupavam os matemáticos, em cada época, exerceram forte influência na elaboração do conceito de função. Na Antigüidade, a preocupação de Aristóteles era apenas a de descrever mudanças e relações que ocorriam na natureza, de uma maneira qualitativa. (CARAÇA, 1952). Com Newton e Leibniz, houve uma quebra nesta visão da ciência e os problemas que preocupavam os matemáticos, até a época de Cauchy, passaram a estar relacionados com funções bem comportadas (funções contínuas e funções diferenciáveis), com as quais se pretendia resolver aspectos quantitativos a eles relacionados.

A necessidade de estender a noção de função para além daquelas "expressáveis analiticamente", ou visualizáveis com o recurso de um gráfico, apareceu na história com a polêmica gerada entre Euler, D'Alembert e Bernoulli, sobre o "problema da corda vibrante". Esta polêmica teve seu desfecho com o estudos das séries de Fourier, que foram aperfeiçoados por Dirichlet, na busca de condições mais rigorosas para sua convergência.

As conseqüências lógicas da definição de Dirichlet e da posterior elucidação da questão de definição dos números reais, acabaram por gerar exemplos que estão fora do protótipo do que era originalmente concebido como função. Hoje, este conceito não se reduz apenas a aspectos numéricos e quantitativos. Segundo SIERPINSKA (1992), uma função não se concebe nem como lei, nem como valor, na definição atual, mas como a síntese desses dois aspectos, juntamente com os conceitos de domínio e contradomínio.

Algumas reflexões sobre o ensino do conceito de função

A partir de resultados obtidos em uma pesquisa com professores do Ensino Médio (ZUFFI, 1999), vimos que, ao fazerem uso da linguagem matemática para expressar suas próprias concepções sobre o conceito de função, esses professores apresentaram visões diferenciadas, quando solicitados a fornecer definições formais e quando se reportavam às definições informalmente. Cada uma dessas visões identificou-se com um momento histórico diferente para o conceito.

No caso formal, as definições foram elaboradas de maneira a atingir as mais recentes propostas históricas de definição de função, muito próximas à de Dirichlet ou de Bourbaki, enquanto que no tratamento informal, ou com exemplos e resoluções de problemas, as idéias propostas para as funções estavam muito mais próximas da definição de Euler.

Em nossa pesquisa, vimos que obstáculos epistemológicos que ocorriam com alunos, apontados por SIERPINSKA (1992), também surgiram com os professores investigados. É comum que estes pensem nas funções somente em termos de equações e elementos desconhecidos a serem extraídos delas. Outro obstáculo evidenciou-se quando estes professores mostraram dificuldades em determinar quais eram as variáveis dependentes e independentes, para alguns casos propostos.

Com relação à noção de número, configurou-se um outro obstáculo: embora a grande maioria dos casos de funções envolvesse o conjunto dos números reais, as variações de valores, propostas em sala de aula e nas entrevistas, pelos professores pesquisados, ocorriam sempre (e apenas) dentro do conjunto dos números racionais, ou, mais freqüentemente ainda, dos números inteiros.

A transposição didática (CHEVALLARD, 1991) para o conceito de função pareceu ocorrer de maneira oblíqua, de modo que é essencialmente a definição formal de Dirichlet, proposta no final do século passado, que chegou à sala de aula do ensino médio, hoje, quando esses professores se reportam aos seus aspectos mais formais. Ao mesmo tempo, perderam-se as conceituações históricas intermediárias, mas algumas destas, ainda que sem o conhecimento do professor, refletem-se nos exemplos apresentados e nas imagens conceituais (VINNER, 1991) formadas a partir destes exemplos, como foi o caso da definição de Euler.

Diante das considerações anteriormente levantadas, podemos concluir que a formação que temos proporcionado aos professores de Matemática do Ensino Médio, seja ela inicial ou continuada, e do modo como a efetivamos, ainda não tem conduzido estes professores a uma adequada reflexão sobre o uso que fazem da linguagem matemática. Esta não é vista, por eles, nem como uma construção histórica e dinâmica da Matemática como área do conhecimento humano, nem como ferramenta para resolver problemas da vida prática, ou de outras ciências.

Este passeio pela gênese histórica do conceito de função mostra o quanto sua elaboração foi complexa. Os conhecimentos históricos podem, então, colaborar com os professores para uma reflexão mais profunda sobre as idéias matemáticas. Particularmente com relação às funções, eles podem auxiliar o professor na distinção entre suas concepções pessoais no assunto, entre as diversas formalizações matemáticas, propostas ao longo dos séculos, e sobre como isso se relaciona ao aprendizado de seus alunos.

2 Todas as traduções, neste artigo, são de nossa autoria

3 Para toda divisão dos números racionais em duas classes A e B, tais que cada número da primeira classe, A, seja menor do que todo número da segunda classe, B, existirá um só número real produzindo este 'Schnitt', ou corte (de Dedekind). Se A contiver um ponto de máximo como elemento, ou B contiver um mínimo, então o corte definirá um número racional. Caso contrário, o corte definirá um número irracional. (BOYER,1974)

AGRADECIMENTO:

Este trabalho é parte de um estudo mais detalhado sobre o desenvolvimento histórico do conceito de função (em ZUFFI, 1999), orientado pela Profa. Dra. Jesuína L.A. Pacca (IF-USP), a quem agradeço imensamente pelas sugestões quanto à publicação."

Referências Bibliográficas

BOYER, C. *História da Matemática*. Trad. Elza F. Gomide. São Paulo: Edgard Blücher - EDUSP, 1974.

CARAÇA, B.J. *Conceitos Fundamentais da Matemática*. Lisboa: 1952.

CHEVALLARD, Y. *La transposition didactique- du savoir savant au savoir enseigné*. 12ª ed. Grenoble: La Pensée Sauvage, 1991.

ITÔ, K. *Encyclopedic Dictionary of Mathematic.*, 2. ed. USA: MIT Press, The Math. Soc. of Japan, V.II, 1987.

MACHADO, A.C. *A Aquisição do Conceito de Função: perfil de imagens produzidas pelos alunos*, Belo Horizonte: UFMG, 1998. (dissertação de mestrado)

OLIVEIRA, N. *Conceito de Função: uma abordagem do processo ensino-aprendizagem*. São Paulo: PUC, 1997. (dissertação de mestrado)

SIERPINSKA, A. *On understanding the notion of function*, in "The concept of function - aspects of epistemology and pedagogy", Dubinsky (Harel, M.A.A . Notes, v.25, p. 25-58, 1992.

VINNER, S. *The role of definitions in the teaching and learning of mathematics*, in Tall, D. (ed.), Advanced Mathematical Thinking, Mahematics Education Library, v.11, Kluwer, p.65-81, 1991.

————*The function concept as a prototype for problems in mathematics learning*, in "The concept of function - aspects of epistemology and pedagogy", Dubinsky (Harel, M.A.A . Notes, v.25, p. 195-213, 1992.

YOUSCHKEVITCH, A.P. *The Concept of Function*. in Archive for History of Exact Sciences, vol.16, n.1, 37-85, 1976.

ZUFFI, E.M. *O tema 'funções' e a linguagem matemática de professores do Ensino Médio: por uma aprendizagem de significados*, São Paulo: Faculdade de Educação, USP, 1999, 307p. (tese de doutorado, Área de Concentração em Ensino de Ciências e Matemática)