

DESARROLLO DEL CONOCIMIENTO ESTADÍSTICO COMÚN Y AVANZADO EN ESTUDIANTES DE MAGISTERIO

Developing of prospective primary school teachers' common and advanced statistical knowledge

Hernán Rivas^a, Juan D. Godino^b, Pedro Arteaga^b y Antonio Estepa^c

^aPontificia Universidad Católica de Chile, Villarica (Chile), ^bUniversidad de Granada,

^cUniversidad de Jaén

Resumen

Analizamos los resultados de un proceso formativo de futuros profesores de educación primaria sobre estadística basado en la resolución de proyectos de análisis de datos. Se contempla la formación de los estudiantes sobre aspectos relevantes del conocimiento común del contenido: reducción de datos estadísticos (tablas, gráficos, promedios y dispersión) y algunos aspectos del conocimiento avanzado del contenido (comparación de distribuciones de frecuencias, valores atípicos). El análisis de uno de los proyectos realizados por los estudiantes revela las potencialidades de la metodología de enseñanza basada en proyecto para dar sentido a las técnicas de análisis de datos. Dicho análisis revela también aspectos conflictivos del aprendizaje que deben ser tenidos en cuenta en los momentos de institucionalización y ejercitación, como fases complementarias de los momentos de exploración favorecidos por la realización de los proyectos.

Palabras claves: *formación de maestros, estadística, enseñanza basada en proyectos, evaluación.*

Abstract

We analyze the results of a statistics formative process based on data analysis projects, and designed for prospective primary school teachers. We took into account some aspects of common content knowledge (e.g. tables, graphs, averages and spread) and advanced content knowledge (e.g. comparing frequency distributions, outliers) relevant for the education of prospective teachers. The analysis of one of the projects solved by participants, reveals the learning potential of project-based teaching for making sense of data analysis techniques. The analysis also showed some conflicting points of learning that should be taken into account along the institutionalization and practicing moments, to complement the exploration stages favored by the projects.

Key words: *primary school teachers' education, statistics, project-based teaching, assessment.*

INTRODUCCIÓN

La formación en estadística y su didáctica de los profesores de educación primaria es un tema que requiere investigación, como se pone de manifiesto en diversos trabajos (Batanero, Burril y Reading, 2011). Se dispone de resultados sobre cuestiones relativas a la enseñanza y aprendizaje de temas específicos, p.e, los promedios, dispersión, gráficos estadísticos (Batanero, 2001; Espinel, 2007; Arteaga, Batanero, Ortiz, y Contreras, 2011), pero son más escasos los trabajos que abordan la implementación y evaluación de diseños instruccionales que tengan en cuenta el desarrollo del razonamiento estadístico en su complejidad en contextos de estudio naturalistas.

En nuestra investigación abordamos el problema del diseño instruccional en un contexto naturalista, esto es, con los recursos y condicionamientos establecidos por un plan de estudios específico, e incluyendo globalmente los contenidos de estadística descriptiva elemental y nociones básicas de probabilidad. El diseño e implementación se realiza en las condiciones estándares ofrecidas por el programa de formación de futuros profesores de educación primaria del Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada, dentro de una asignatura focalizada en sentar las bases matemáticas para la enseñanza. La formación estadística es, por tanto, una parte de la formación matemática, a la que se destina un tiempo limitado.

En esta comunicación describimos sucintamente el diseño global del proceso de estudio, basado en el uso de proyectos de análisis de datos como metodología didáctica, y algunos resultados derivados del análisis de uno de los proyectos realizado por los estudiantes. Dado que la asignatura contempla principalmente sentar las bases matemáticas de los futuros maestros, el énfasis principal del curso está en desarrollar el conocimiento común y ampliado (Hill, Ball y Schilling, 2008; Godino, 2009) sobre estadística y probabilidad, dejando el desarrollo de los restantes componentes del conocimiento matemático para la enseñanza (conocimiento especializado, de los estudiantes, enseñanza y currículo) para otras asignaturas del plan de estudios.

MARCO TEÓRICO Y METODOLOGÍA

Nuestra investigación se enmarca en un paradigma metodológico mixto que comparte características de las investigaciones de diseño instruccional (Cobb et al., 2003) y la ingeniería didáctica (Artigue, 2011). No obstante, el marco teórico que sostiene nuestra metodología no es la Teoría de situaciones (Brousseau, 1998) sino el Enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática (EOS) (Godino, Batanero y Font, 2007; Godino, 2012; Font, Godino y Gallardo, 2013), del cual usamos la noción de configuración de objetos y procesos y la idoneidad didáctica. Las investigaciones orientadas hacia el diseño constituyen un paradigma emergente para el estudio del aprendizaje en contexto mediante el diseño y el estudio sistemático de estrategias y herramientas instruccionales. El objetivo de nuestro diseño es desarrollar “conocimiento común y avanzado” de futuros maestros sobre estocástica con una metodología centrada en el uso de proyectos de análisis de datos, lo que permitirá dar sentido a los conceptos y técnicas estadística.

Contexto, población y muestra

El proceso formativo sobre el contenido de estadística descriptiva y probabilidad se realizó en el contexto de la asignatura del plan de formación de maestros titulada, “Bases matemáticas para la educación primaria”, en la Facultad de Ciencias de la Educación de la Universidad de Granada. Se aplicó a dos grupos de estudiantes a cargo de uno de los autores del trabajo, uno con 58 estudiantes y otro con 75. Dicha materia incluye un tema sobre “Introducción a la estadística y probabilidad” a cuyo desarrollo se dedican tres semanas, a razón de 3 horas de trabajo semanales en sesión de grupo completo y una sesión semanal de 1,5 horas de trabajos prácticos con el grupo clase dividido en tres subgrupos.

Diseño instruccional

El estudio se organizó en base al desarrollo de tres proyectos de análisis de datos, complementados con el uso de un texto (Batanero y Godino, 2003) y una colección de ejercicios resueltos como material complementario. Describimos brevemente dos de los proyectos sobre los cuales se basó el desarrollo de los contenidos de estadística descriptiva; el tercer proyecto está orientado a contextualizar el estudio de nociones probabilísticas y por limitaciones de espacio no se describe en esta comunicación. El enfoque de enseñanza basado en proyectos es novedoso para la mayoría de los estudiantes y conlleva la vivencia de una metodología que pueden trasladar a la educación primaria.

Proyecto 1: Alumno típico

Se trata de la elaboración de un perfil de los alumnos de la clase, identificando al alumno típico y analizando si hay diferencias entre chicos y chicas en cada una de las características. Este proyecto se describe con detalle en Batanero y Díaz (2011, págs. 73-93). Las variables estadísticas consideradas en nuestra implementación fueron las siguientes:

Variable 1: Género (hombre, mujer); Variable 2: ¿Haces deporte? (Nada, poco, mucho); Variable 3: Número de hermanos (incluyendo al propio estudiante, o sea, número de hijos en la familia); Variable 4: Peso (Kg.); Variable 5: Dinero que llevas en el bolsillo (Cantidad de euros).

En este proyecto se proponen las siguientes cuestiones iniciales:

- ¿Cuáles son las características de un estudiante típico o representativo de la clase? ¿Cómo de representativo es dicho estudiante respecto de la clase?
- ¿Hay diferencias entre chicos y chicas en cada una de dichas características?

Proyecto 2: Eficacia de un entrenamiento deportivo

Planteamiento:

Un profesor de Educación Física prepara a un grupo de 60 alumnos de 12 años para participar en una competición. Transcurridos 3 meses del entrenamiento (Septiembre a Diciembre) quiere comprobar si el entrenamiento ha sido efectivo. Para ello decide comparar el tiempo en segundos que los alumnos tardan en recorrer 20 metros en Septiembre y en Diciembre, y también quiere conocer si hay diferencias entre los chicos y las chicas.

Trabajando en equipo, elaborar un informe respondiendo razonadamente a las cuestiones 1) a 5) siguientes, incluyendo los cálculos y gráficos que consideréis pertinentes:

- 1) ¿Ha sido efectivo el entrenamiento en el conjunto de la clase?
- 2) ¿Hay diferencias entre chicos y chicas en el tiempo en correr 20 metros inicialmente en Septiembre?
- 3) ¿Hay diferencias entre chicos y chicas en el tiempo en correr 20 metros después del entrenamiento en Diciembre?
- 4) ¿Quién ha mejorado más, los chicos o las chicas?
- 5) ¿Hay algún alumno (chico o chica) que se pueda considerar como “atípico” en su capacidad de correr (por su velocidad excesivamente baja)?
- 6) ¿Qué se debe hacer con los sujetos atípicos desde el punto de vista estadístico?

El proceso de estudio implementado contempla, además de la realización de los proyectos los siguientes recursos instruccionales:

- Colección de ejercicios resueltos
- Texto de estudio. Se trata de la monografía de Batanero y Godino (2003), *Estocástica para maestros*, donde se desarrollan los contenidos básicos de estadística y probabilidad.

- Tablón virtual de docencia; se utiliza como repositorio de información y como un espacio de comunicación asincrónica entre estudiantes y entre los estudiantes y el profesor.

EFICACIA DE UN ENTRENAMIENTO DEPORTIVO. ANÁLISIS DE RESULTADOS

Fase de implementación

Este proyecto de análisis de datos fue iniciado, en los dos cursos en que se ha implementado, en una sesión de clase en las que el grupo completo de estudiantes fue dividido en tres subgrupos; dichas sesiones son consideradas como “seminarios de prácticas”. En este caso los estudiantes trabajaron en equipos de 3 o 4 en la realización del proyecto, finalizando el informe solicitado en el plazo de una semana.

El trabajo práctico comenzó con una fase introductoria en la que se hizo una presentación del proyecto y se entregaron indicaciones sobre las actividades y cuestiones planteadas. Se prepararon los datos en una plantilla Excel, incluyendo en una hoja el conjunto de datos (chicos y chicas), en otra hoja los datos de las chicas y en la hoja tres, los datos de los chicos. Posteriormente se discutió cómo resolver la cuestión 1, enfatizándose en la necesidad de interpretar adecuadamente la dispersión, el promedio, y los valores atípicos. La clase continuó con una fase de trabajo en equipos, donde se manifestaron dificultades en el dominio de habilidades en el uso de la herramienta Excel y se presentaron conflictos en la interpretación adecuada de la media y la desviación típica. Después de aproximadamente 25 minutos de trabajo grupal se realizó un proceso de institucionalización donde se explicó la manera de ordenar los datos de forma ascendente y descendente en la hoja Excela fin de identificar con mayor facilidad los casos atípicos.

La intervención del profesor continuó con algunas indicaciones sobre el proceso para realizar la comparación gráfica de las dos distribuciones. Posteriormente continuó el trabajo grupal de acuerdo a la modalidad establecida. Esta vez, en los primeros minutos de la actividad, se manifestaron dificultades repetidas en la aplicación de la fórmula para obtener las frecuencias relativas, ante lo cual, el profesor explicó “paso a paso” la manera de obtenerla. Después de esto se dio un tiempo para que los estudiantes realizaran los cálculos de las frecuencias relativas y exploraran la construcción de gráficos, manifestándose conflictos con la construcción y etiquetado de dichos gráficos. La clase finalizó con algunos comentarios finales sobre las actividades realizadas e informando sobre la manera de entregar los informes que deberían realizar durante la semana.

Evaluación de los informes realizados por los estudiantes

En este apartado analizamos los informes realizados por los distintos equipos en los que respondieron a las seis cuestiones mencionadas. La acción formativa descrita se ha realizado en dos cursos académicos disponiendo de un total 37 informes. Hemos realizado primero una evaluación global de la competencia lograda definiendo una variable cuantitativa, grado de corrección, asignando 2 puntos si la respuesta es correcta, 0 incorrecta o no responde, y 1 punto si es parcialmente correcta. La figura 1 contiene un gráfico de cajas que muestra los principales estadísticos de la distribución de frecuencias.

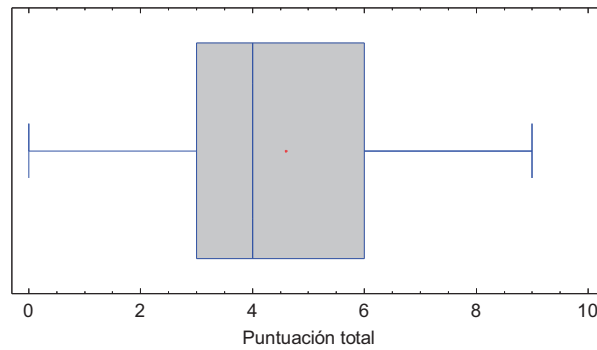


Figura 1. Distribución de la puntuación total en el grado de corrección

La media ha sido de 4,59 (mediana de 4; cuartil inferior, 3; cuartil superior, 6) sobre un total posible de 12 puntos, desviación típica de 2,03, mínimo 0 y máximo de 9. Podemos afirmar en base a estos datos que la tarea solicitada ha resultado difícil para los estudiantes. En la tabla 1 mostramos los resultados para cada una de las seis cuestiones solicitadas. Seguidamente destacamos algunos resultados en cada uno de los ítems.

Tabla 1. Frecuencias y porcentajes de respuestas correctas y erróneas (n = 37)

Ítem	Correctas y parcialmente correctas		Erróneas y no responde	
	Frecuencia	%	Frecuencia	%
1. ¿Ha sido efectivo el entrenamiento?	33	89,2	4	10,8
2. Diferencias chicos/chicas en septiembre	31	83,8	6	16,2
3. Diferencias chicos/chicas en diciembre	30	81,1	7	18,9
4. ¿Quién ha mejorado más, los chicos o las chicas?	13	35,1	24	64,9
5. ¿Hay alumnos atípicos	7	18,9	30	81,1
6. ¿Qué se debe hacer con los sujetos atípicos?	13	35,1	24	64,9

Ítem 1: ¿Ha sido efectivo el entrenamiento en el conjunto de la clase?

La resolución de este ítem implica comparar dos distribuciones (tiempos en septiembre y diciembre) con muestras de igual tamaño. Para responder convenientemente, en primer lugar, se debe hacer una reducción de los datos calculando estadísticos de posición central. Este ítem ha resultado bastante fácil para los estudiantes; solamente 4 equipos han respondido de manera errónea. El procedimiento predominante en los equipos que respondieron de manera correcta ha sido el de comparar las medias (24 de 37); un equipo utilizó, además de la media, la desviación típica haciendo referencia a la dispersión de los datos; 8 equipos justificaron la respuesta sin usar un promedio.

No encontramos ninguna justificación basada en la representación gráfica de las distribuciones de frecuencias. En 6 casos los estudiantes justifican gráficamente que el entrenamiento ha sido efectivo, pero mediante un gráfico “no estadístico”; representan con diagramas de barras los tiempos en septiembre y diciembre para cada uno de los sujetos interpretando visualmente los diagramas.

Ítem 2: ¿Hay diferencias entre chicos y chicas en el tiempo en correr 20 metros inicialmente en Septiembre?

Se trata de comparar las distribuciones de frecuencias de dos muestras de distinto tamaño (chicos y chicas), comparando medidas de tendencia central y dispersión, pues de acuerdo con KonoldyPollatsek (2004, 173) la noción de promedio (tendencia central) es inseparable de la noción de dispersión. También es posible utilizar representaciones gráficas para representar los datos y establecer posibles diferencias.

En esta pregunta hay 28 equipos que comparan las puntuaciones medias de los chicos y chicas y afirman que había diferencias, teniendo los chicos una puntuación menor que las chicas. Al igual que en el caso anterior, es destacable el hecho que solo un equipo tiene en cuenta también la dispersión, calculando la desviación típica. 2 equipos comparan medias y medianas, y 6 justifican de manera errónea.

Ítem 3: ¿Hay diferencias entre chicos y chicas en el tiempo en correr 20 metros después del entrenamiento en Diciembre?

Al igual que en el ítem anterior la comparación de las dos distribuciones se hace teniendo en cuenta preferentemente la media aritmética (28 de 37); en ningún caso comparan las dispersiones o la presencia de valores atípicos. En 2 casos hacen comparaciones de tipo gráfico, pero sin considerar las frecuencias relativas y 7 equipos justifican de manera errónea.

Ítem 4: ¿Quién ha mejorado más, los chicos o las chicas?

Para responder este ítem se deben comparar por separados (chicos y chicas) las dos distribuciones (tiempos en septiembre y diciembre) y determinar cuánto ha mejorado cada grupo en relación a su tiempo inicial (tiempo en septiembre). Esta comparación se puede hacer comparando las medias o medianas; también se podrían comparar las dispersiones. En este ítem 13 equipos respondieron de manera correcta, 9 lo hicieron comparando las medias, 3 sin reducir los datos y 1 de los equipos no entregó justificación. De los restantes, 23 respondieron de manera incorrecta y un equipo no respondió. De los 23 que respondieron de manera incorrecta 13 hicieron una interpretación equívoca de la media y 10 cometieron otro tipo de error.

Ítem 5: ¿Hay algún alumno (chico o chica) que se pueda considerar como “atípico” en su capacidad de correr?

Resolver este ítem implica calcular los valores atípicos, para ello, se puede utilizar la fórmula de cálculo indicada en la consigna (se considera como atípico un valor cuando está fuera del intervalo: $\text{media} \pm \text{dos veces la desviación típica}$). De los 37 equipos solamente 7 dieron una respuesta correcta realizando los cálculos requeridos. Un error recurrente fue que en 24 casos los estudiantes consideraron como atípicos los valores mínimo o máximo de las distribuciones correspondientes.

Ítem 6: ¿Qué se debe hacer con los sujetos atípicos desde el punto de vista estadístico?

En este ítem se espera que el estudiante reconozca que los valores atípicos podrían afectar una interpretación adecuada de los datos y por tanto resulta conveniente analizarlos de manera separada. En este ítem 13 equipos respondieron de manera correcta mientras 23 lo hicieron de manera errónea (solo un equipo no respondió este ítem).

OBSERVACIONES FINALES

En el proyecto de análisis de datos que hemos propuesto a los estudiantes se ha pedido la comparación de pares de distribuciones de frecuencias, lo que permite movilizar y dar sentido al uso de las medidas de tendencia central y de dispersión, así como a la comparación gráfica de los histogramas de frecuencias relativas. El análisis de los datos ha mostrado que el cálculo de la media y desviación típica de las distribuciones mediante el uso de la hoja de cálculo ha sido logrado por los estudiantes, y tales estadísticos han sido aplicados para decidir sobre la efectividad de un

tratamiento. Sin embargo, aspectos más avanzados del razonamiento estadístico, como es la comparación de las dispersiones, la identificación de valores atípicos y su interpretación, así como la realización de histogramas de frecuencias representados sobre los mismos ejes cartesianos han supuesto tareas con alto grado de dificultad para los estudiantes que han participado en esta acción formativa. Este resultado coincide con Peters (2009) quien afirma que muchos maestros son capaces de calcular la desviación típica e interpretarla, pero son incapaces de razonar sobre la desviación típica en conjunción con la media.

Como conclusión de este estudio resaltamos que la enseñanza de las matemáticas, y en particular la estadística, debe partir y centrarse en el uso de situaciones - problemas (proyectos de análisis de datos), como una estrategia de dar sentido a las técnicas y teorías matemáticas. De esta manera, además, se hacen posibles los momentos exploratorios de la actividad matemática por parte de los estudiantes. Sin embargo, en la práctica matemática intervienen configuraciones de objetos matemáticos (conceptos, proposiciones, procedimientos, argumentos, representaciones) (Godino, Batanero y Font, 2007), los cuales deben ser reconocidos por el formador para planificar su estudio. Tales objetos deben ser progresivamente dominados por los estudiantes si se desea que progresen hacia sucesivos niveles avanzados de conocimiento necesarios para una gestión idónea de la enseñanza. El estudio de tales objetos matemáticos y sus respectivos procesos asociados debe ser planificado por el formador organizando los correspondientes momentos de validación, institucionalización y ejercitación, incrementando de este modo la idoneidad didáctica del proceso formativo.

Reconocimiento

Trabajo realizado en el marco de los proyectos de investigación, EDU2010-14947, Ministerio de Ciencia e Innovación (MICINN), y EDU2012-31869, Ministerio de Economía y Competitividad (MEC).

Referencias

- Arteaga, P., Batanero, C., Ortiz, J., y Contreras, J. M. (2011). Sentido numérico y gráficos estadísticos en la formación de profesores. *Publicaciones*, 41, 33-49.
- Artigue, M. (2011). L'ingénierie didactique comme thème d'étude. En C. Margolinas, M. Abboud-Blanchard, L. Bueno-Ravel, N. Douek, A. Fluckiger, P. Gibel, F. Vandebrouck & F. Wozniak (Eds.), *En amont et en aval des ingénieries didactiques* (pp. 15-25). Grenoble: La Pensée Sauvage.
- Batanero, C. (2001). *Didáctica de la estadística*. Granada: Grupo de Investigación en Educación Estadística. Disponible en, <http://www.ugr.es/~batanero/publicaciones%20index.htm>
- Batanero, C., Burrill, G., y Reading, C. (2011) (Eds.), *Teaching statistics in school mathematics. Challenges for teaching and teacher education: A Joint ICMI/IASE Study*. Berlin: Springer.
- Batanero, C., y Díaz, C. (Eds.), (2011). *Estadística con proyectos*. Departamento de Didáctica de la Matemática. Granada. Recuperable en, <http://www.ugr.es/local/batanero/publicaciones%20index.htm>
- Batanero, C., y Godino, J. D. (2003). *Estocástica y su didáctica para maestros*. Departamento de Didáctica de las Matemáticas. Universidad de Granada. Recuperable en, <http://www.ugr.es/local/jgodino/>
- Brousseau, G. (1998). *La théorie des situations didactiques*. Grenoble: La Pensée Sauvage.
- Cobb, P., Confrey, J., diSessa, A., Lehrer, R., y Schauble, L. (2003). Design experiments in educational research. *Educational Researcher*, 32, 1, 9-13.
- Espinel, C. (2007). Construcción y razonamiento de gráficos estadísticos en la formación de profesores. *Investigación en Educación Matemática*, 11, 99-119.

- Font, V., Godino, J. D., y Gallardo, J. (2013). The emergence of objects from mathematical practices. *Educational Studies in Mathematics*, 82, 97–124.
- Godino, J. D. (2009). Categorías de análisis de los conocimientos del profesor de matemáticas. *UNIÓN. Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 20, 13-31.
- Godino, J. D. (2012). Origen y aportaciones de la perspectiva ontosemiótica de investigación en Didáctica de la Matemática. En A. Estepa, A. Contreras, J. Deulofeu, M. C. Penalva, F. J. García y L. Ordóñez (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVI* (pp. 49 - 68). Jaén: SEIEM.
- Godino, J. D. Batanero, C., y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education*, 39(1-2), 127-135.
- Hill, H. C., Ball, D. L., y Schilling, S. G. (2008). Unpacking pedagogical content knowledge: Conceptualizing and measuring teachers' topic-specific knowledge of students. *Journal for Research in Mathematics Education*, 39, 372-400.
- Konold, C., y Pollatsek, A. (2004). Conceptualizing an average as a stable feature of a noisy process. En D. Ben-Zvi y J. Garfield (Eds.), *The challenge of developing statistical literacy, reasoning, and thinking* (pp. 169-200). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.
- Peters, S. A. (2009). *Developing an understanding of variation: AP statistics teachers' perceptions and recollections of critical moments*. PhD. The Pennsylvania State University