

**OBSTÁCULOS EN LA COMPRENSIÓN DE LA FRACCIÓN COMO MEDIDA:
UNA MIRADA HERMENÉUTICA****OBSTACLES TO UNDERSTANDING FRACTION AS MEASUREMENT:
A HERMENEUTICAL VIEW**Verónica A. Quintanilla Batallanos¹ ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0003-4939-9406>Jesús Gallardo Romero² ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0003-0117-2173>**RESUMEN**

En este trabajo caracterizamos algunos de los principales obstáculos presentes en el uso de la fracción en su significado medida, en situaciones de medición de cantidades de superficie menores que la unidad sobre figuras geométricas planas básicas. Lo hacemos desde la perspectiva de un modelo operativo para interpretar la comprensión a partir de los usos dados al conocimiento matemático (OMIUM), que aplicamos sobre una muestra de seis estudiantes de primer curso de educación secundaria obligatoria (12-13 años). Los resultados obtenidos ponen en evidencia la complejidad epistemológica específica del uso de la fracción como medida. Concluimos recomendando incorporar situaciones problemáticas que exijan el empleo de las fracciones en contextos de medida, incluidas las propias de su génesis histórica, en el diseño y planificación de secuencias didácticas para su enseñanza en el ámbito escolar.

Palabras clave: Comprensión. Evaluación. Fracción. Matemáticas discursivas. Medida.

RESUMO

Neste trabalho caracterizamos alguns dos principais obstáculos presentes no uso da fração em seu significado medido, em situações de medição de grandezas superficiais menores que a unidade em figuras geométricas planas básicas. Fazemo-lo na perspectiva de um modelo operacional de interpretação da compreensão a partir das utilizações do conhecimento matemático (OMIUM), o qual aplicamos a uma amostra de seis alunos do primeiro ano do ensino secundário obrigatório (12-13 anos). Os resultados obtidos mostram a complexidade epistemológica específica do uso da fração como medida. Concluimos recomendando a incorporação de situações problemáticas que requeiram a utilização de frações em contextos de medição, incluindo os da sua gênese histórica, na concepção e planejamento de sequências didáticas para o seu ensino em ambiente escolar.

Palavras-chave: Entendimento. Avaliação. Fração. Matemáticas discursivas. Medição.

ABSTRACT

In this paper we characterize some of the main obstacles present in the use of fractions as measures, in situations of measuring quantities of surface area smaller than the unit on basic plane geometric figures. We do so from the perspective of an operative model for interpreting understanding based on the uses given to mathematical knowledge (OMIUM), which we applied to a sample of six students in the first grade of secondary education (12-

¹ Doctora en Didáctica de la Matemática por la Universidad de Málaga (UMA). Profesora de Didáctica de la Matemática. Departamento de Didáctica de la Matemática, de las Ciencias Sociales y de las Ciencias Experimentales de la Universidad de Málaga, Málaga, España. Dirección postal: Facultad de Ciencias de la Educación, Campus de Teatinos, 29071, Málaga, España. E-mail: veronicaquintanilla@uma.es.

² Doctor en Didáctica de la Matemática por la Universidad de Málaga (UMA). Profesor de Didáctica de la Matemática. Departamento de Didáctica de la Matemática, de las Ciencias Sociales y de las Ciencias Experimentales de la Universidad de Málaga, Málaga, España. Dirección postal: Facultad de Ciencias de la Educación, Campus de Teatinos, 29071, Málaga, España. E-mail: gallardoromero@uma.es.

13 years old). The results obtained highlight the specific epistemological complexity of the use of fractions as measures. We conclude by recommending the incorporation of situations and problems that require the use of fractions in measurement contexts, including those of their historical genesis, in the design and planning of didactic sequences for their teaching in the school environment.

Keywords: Understanding. Assessment. Fraction. Discursive mathematics. Measurement.

INTRODUCCIÓN

En Educación Matemática suelen identificarse cinco significados diferentes asociados al objeto matemático fracción: parte-todo, medida, cociente, operador y razón. Estos significados se conocen desde hace décadas, pero las propuestas educativas no siempre los presentan convenientemente relacionados y en la práctica escolar aún perduran los desequilibrios entre ellos y las inconsistencias en su uso. En el caso particular del significado medida, nos preguntamos por las posibles razones que pudieran estar detrás de su falta de presencia curricular al abordar la enseñanza de la fracción. Usualmente, se justifica esta reducción por el hecho conocido de que otros significados, sobre todo el de parte-todo, son más asequibles a los estudiantes y, como consecuencia de una excesiva promoción didáctica, estos terminan interfiriendo y delimitando la comprensión del significado medida. Sin embargo, de manera complementaria a este argumento, también nos parece que existe en el uso de la fracción como medida una complejidad adicional, que puede estar motivada por las dificultades inherentes a la propia comprensión del concepto de medida y de los procedimientos involucrados al medir cantidades de magnitudes.

Sumándonos a los estudios que exploran los obstáculos epistemológicos y didácticos generados por los distintos significados vinculados con la fracción (Valdemoros, 2004; Escolano & Gairín, 2005; Cortina, Zúñiga & Visnovska, 2013), en este trabajo nos planteamos como principal propósito explorar algunos de los obstáculos que condicionan la comprensión del significado medida e incrementan su complejidad. En tales dificultades, que no afectan al resto de significados, encontramos razones para sugerir una propuesta de enseñanza de la fracción donde el significado medida, lejos de eliminarse o reducirse del currículum, se desarrolle integrado con los conocimientos matemáticos caracterizadores del ámbito de la medida.

Iniciamos la exposición en segundo apartado, con una descripción genérica del tratamiento didáctico dado a la fracción como medida en el ámbito escolar, desde diferentes lugares de actuación (normativa curricular, libros de texto escolares y manuales de formación didáctica del profesorado). La situación reflejada en este acercamiento, en relación con la

enseñanza y el aprendizaje del significado medida, justifica que nos propongamos profundizar en las características de su comprensión. Lo hacemos desde la perspectiva del modelo hermenéutico que venimos desarrollando en los últimos años (Gallardo, González & Quintanilla, 2014; Gallardo & Quintanilla, 2016, 2019; Quintanilla & Gallardo, 2021), cuya configuración teórico-metodológica esbozamos en el tercer apartado. Nuestro modelo incluye un método operativo para interpretar la comprensión a partir de los usos dados al conocimiento matemático, que aplicamos, a lo largo de los dos siguientes apartados, en un estudio exploratorio cualitativo con seis alumnos de primer curso de educación secundaria (12-13 años), involucrados en la resolución de tres tareas de cálculo de medida de superficie sobre figuras geométricas planas básicas. En este estudio, ponemos de manifiesto la presencia de tres obstáculos diferentes relacionados con el uso específico del significado medida, que condicionan la comprensión de la fracción por parte de los escolares. En línea con otras investigaciones en el área, los resultados aquí obtenidos aportan razones que justifican la necesidad de promover el uso del significado medida como requisito para garantizar la comprensión de la fracción, pues genera dificultades intrínsecas de distinta índole. También, la importancia de que las tareas matemáticas en el aula abarquen la mayor diversidad posible de situaciones y fenómenos diferentes en los que se requiera o tenga sentido el uso de la fracción en contextos de medición efectiva.

LA FRACCIÓN COMO MEDIDA EN EL ÁMBITO ESCOLAR

El significado *medida* asociado a la fracción tiene su origen al medir cantidades de magnitudes que, siendo conmensurables, no se corresponden con un múltiplo entero de la unidad de medida tomada de referencia. La fracción $\frac{a}{b}$ emerge entonces de la necesidad natural de dividir la unidad de medida en b subunidades iguales y de tomar a de ellas hasta completar la cantidad exacta deseada. La fracción representa en este sentido el valor numérico de la medida realizada. En esta sección, nos aproximamos desde distintas perspectivas a la realidad didáctica de este significado, a fin de concretar su situación como constructo que determina la comprensión de la fracción.

En la normativa curricular

En el actual sistema educativo español, las fracciones son objeto de estudio por parte de los escolares de segundo y tercer ciclo de educación primaria (8-12 años) y primer ciclo de educación secundaria obligatoria (12-14 años). En términos generales, la normativa curricular se centra sobre todo en promover las facetas funcional y operacional de las fracciones, como

números presentes en la vida diaria que pueden ser empleados en cálculos para resolver problemas cotidianos contextualizados (Cuadro 1). Esta perspectiva por competencias exige, a nivel conceptual, la interpretación y uso relacionado de los diferentes significados de la fracción. Sin embargo, tan solo se mencionan explícitamente los significados parte-todo y operador para su desarrollo en educación primaria, mientras que apenas se propone conocer nuevos significados como objetivo genérico en educación secundaria obligatoria. El uso de las fracciones también requiere, a nivel procedimental, el dominio del cálculo aritmético elemental con estos números en sus distintas manifestaciones (mental, escrito, calculadora), un aspecto en el que sí se incide de manera destacada. Por tanto, observamos que el grado de especificidad que reflejan los criterios de evaluación y los estándares de aprendizaje evaluables en lo relativo a la operatoria con fracciones contrasta con la generalidad con la que se promociona la comprensión de los distintos significados que admite la fracción. En particular, es clara la indefinición con la que el currículum español de matemáticas trata al significado medida.

Cuadro 1 – Extracto de contenidos, criterios de evaluación y estándares de aprendizaje evaluables vinculados con las fracciones en Educación Primaria y Educación Secundaria Obligatoria

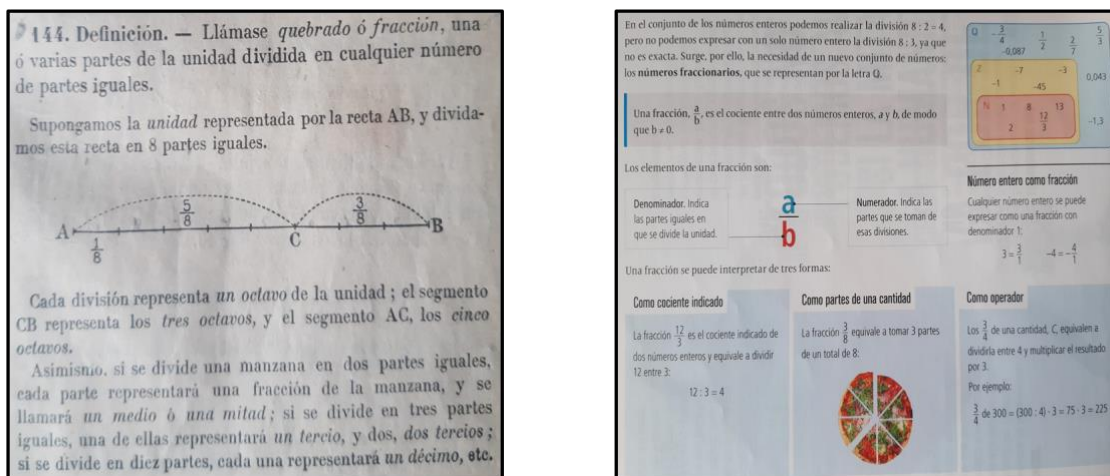
Contenidos	Criterios de evaluación	Estándares de aprendizaje evaluables
<i>Educación Primaria</i>		
Concepto de fracción como <i>relación entre las partes y el todo</i> . Fracciones propias e impropias, Número mixto. Representación gráfica. Fracciones equivalentes, reducción de fracciones a común denominador. Operaciones con fracciones.	Leer, escribir y ordenar fracciones, utilizando razonamientos apropiados. Realizar operaciones y cálculos numéricos mediante diferentes procedimientos en situaciones de resolución de problemas. Utilizar los números fraccionarios para interpretar e intercambiar información en contextos de la vida cotidiana.	Lee, escribe y ordena fracciones en textos numéricos y de la vida cotidiana, utilizando razonamientos apropiados. Representación de fracciones en la recta numérica. Utiliza fracciones en contextos reales <i>como operadores</i> en la interpretación y la resolución de problemas.
<i>Educación Secundaria Obligatoria</i>		
Fracciones en entornos cotidianos. Fracciones equivalentes. Comparación de fracciones. Representación, ordenación y operaciones. Relación entre fracciones y decimales. Conversión y operaciones.	Utilizar números fraccionarios sencillos, sus operaciones y propiedades para recoger, transformar e intercambiar información y resolver problemas relacionados con la vida diaria. Conocer y utilizar propiedades y <i>nuevos significados de los números</i> en contextos de operaciones elementales.	Identifica los números fraccionarios y los utiliza para representar, ordenar e interpretar adecuadamente información cuantitativa. Realiza operaciones de conversión entre números decimales y fraccionarios, halla fracciones equivalentes y simplifica fracciones, para aplicarlas en la resolución de problemas.

Fuente: Ministerio de Educación, Cultura y Deporte (2014, 2015)

En los libros de texto

La génesis de la fracción en contextos de medida de cantidades de magnitud suele venir reflejada en los manuales escolares editados en épocas pasadas. Análisis de libros de texto, como los realizados por Gallardo, González y Quispe (2010) o Ávila (2019), aportan evidencias de ello en diferentes países latinoamericanos como Perú y México, respectivamente. Estos estudios también subrayan el protagonismo continuo que ha mantenido el significado parte-todo en la enseñanza de la fracción a lo largo de sucesivos periodos históricos educativos hasta la actualidad. Como consecuencia, se constata un progresivo desplazamiento, reducción e incluso desaparición del significado medida en la transmisión escolar de las fracciones a través de los libros de texto. En el caso español, esta pérdida de presencia curricular del significado medida en los manuales escolares de matemáticas podemos ilustrarla, a modo de ejemplo, comparando obras como las reseñadas en la Figura 1. La definición aportada por el libro histórico, que destaca el origen de la fracción como medida (partes alícuotas de una unidad), difiere notablemente de la caracterización contenida en el ejemplar actual, donde el contexto de medida se omite y se sustituye con intencionalidad didáctica por otros significados de la fracción (cociente, parte-todo y operador).

Figura 1 – Ejemplos de definición de fracción en libros de texto histórico y actual



Fuente: Bruño (s.f., aprox. 1930, p. 151) izquierda y Mejía, Ocaña y Romero (2019, p. 72) derecha

En los manuales de Educación Matemática para la formación del profesorado

En los manuales destinados a la formación didáctica del profesorado de matemáticas, cuyas propuestas se sustentan en la investigación realizada en Educación Matemática, sorprende que no podamos identificar de manera evidente un enfoque común mayoritario en el tratamiento dado a los distintos significados de la fracción. En el caso concreto de la medida,

en estos textos no siempre se presenta de manera explícita como significado, sino más bien como un uso particular del significado parte-todo, el cual se recomienda para las primeras experiencias con la fracción por generar menos dificultades en los estudiantes (Carrillo et al., 2016; Castro & Torralbo, 2001; Castro et al., 2015). En aquellos manuales que sí reconocen la medida como significado propio, su papel también queda relegado en el desarrollo de la comprensión de la fracción, en comparación con el protagonismo didáctico otorgado al resto de significados: parte-todo, cociente, razón y operador (Llinares, 2008; Flores & Torralbo, 2011). En general, cuando el origen histórico de la fracción es situado en contextos propios del dominio de la medida, este reconocimiento no suele venir acompañado de propuestas concretas de uso de estas situaciones originarias como recurso didáctico para fomentar la enseñanza del significado medida. En estos manuales formativos también se vislumbra el fenómeno de aritmetización de la medida (Chamorro, 2008), cuando el uso de la fracción se muestra en ejemplos de cálculo con mediciones ya realizadas, en lugar de fomentarlo para medir cantidades más pequeñas que la unidad o para representar la cantidad de una magnitud que no puede cubrirse con un número entero de unidades.

ESBOZO DE UN MODELO HERMENÉUTICO PARA EVALUAR LA COMPRENSIÓN EN MATEMÁTICAS

La realidad desfavorable descrita en la sección anterior, en relación con la presencia curricular y el tratamiento escolar dado al significado medida, condiciona el aprendizaje comprensivo de la fracción. La complejidad epistemológica específica del uso de la fracción como medida contribuye al desplazamiento y reducción reseñados. Este significado ofrece contextos propios de aplicación de la fracción que también merecen ser explorados en la práctica matemática ordinaria para incrementar la comprensión de los escolares. Para esclarecer la complejidad mencionada, nos proponemos estudiar los obstáculos que manifiestan los estudiantes cuando se enfrentan a situaciones de medida que requieren el uso de la fracción. En este apartado, describimos el modelo interpretativo con el que pretendemos abordar este objetivo.

Una visión funcional de la comprensión en matemáticas

La comprensión del conocimiento matemático es un proceso cognitivo que transcurre de manera interna en la esfera mental del individuo. Para evaluar la comprensión matemática de los estudiantes en el aula, necesitamos realizar interpretaciones de las acciones visibles y reconocibles que ponen en juego durante su actividad matemática. Surge así la necesidad de

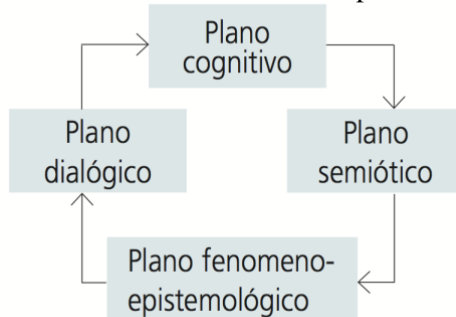
contar en la práctica con modelos de evaluación, integradores y operativos, que permitan la aproximación a la comprensión matemática de los estudiantes de un modo inclusivo. Como contribución específica en este sentido, durante los últimos años venimos desarrollando un modelo operativo (*An Operative Model for Interpreting Understanding in Mathematics* [OMIUM]) donde caracterizamos la comprensión del conocimiento matemático desde una perspectiva funcional, reconociendo que dicha comprensión está necesariamente vinculada a las experiencias matemáticas que se producen a través de las situaciones en las que interviene dicho conocimiento como medio de resolución (Gallardo, González & Quintanilla, 2013, 2014; Gallardo & Quintanilla, 2016, 2019). Es decir, los estudiantes manifiestan cierta comprensión de un conocimiento matemático específico cuando utilizan de manera significativa dicho conocimiento como herramienta para la resolución de una tarea matemática. Utilizar un conocimiento matemático de manera significativa implica analizar la tarea, interpretar la información disponible, determinar la conveniencia de intervenir y actuar en consecuencia, valorar la efectividad y adecuación del uso de dicho conocimiento específico en relación con la tarea. Asumimos, entonces, que un estudiante comprende un conocimiento matemático si es capaz de emplearlo, en alguna de sus formas posibles, en aquellas situaciones en las que tenga sentido y contribuya como medio de resolución.

El círculo hermenéutico de la comprensión en matemáticas

Nuestro modelo plantea un método cíclico para el diagnóstico y la evaluación de la comprensión del conocimiento matemático, denominado *círculo hermenéutico de la comprensión en matemáticas* (Gallardo & Quintanilla, 2019; Quintanilla & Gallardo, 2021), constituido por cuatro planos por los que el intérprete/evaluador debe transitar (Figura 2). En el plano cognitivo, ubicamos a la comprensión matemática, como actividad intelectual del estudiante que le capacita para elaborar respuestas que involucran el uso de conocimientos matemáticos específicos. Estos conocimientos se muestran al intérprete a través de distintos registros escritos externos que son los depositarios de los rastros de comprensión del estudiante. La identificación de dichos rastros por parte del intérprete se lleva a cabo en el plano semiótico. A continuación, la interpretación prosigue en el plano fenómeno-epistemológico, centrada en la caracterización de los usos del conocimiento matemático identificados en los registros previos y puestos en juego por el estudiante durante la experiencia matemática. Finalmente, en el plano dialógico, el estudiante recupera su papel protagónico participando activamente en la interpretación de su propia comprensión matemática. El intérprete (profesor, compañero) comparte con él sus hallazgos, en términos de discrepancias, posibles obstáculos o

incongruencias identificadas en los planos interpretativos previos, a través de una entrevista conversacional que busca lograr el consentimiento con el otro (Gallardo y Quintanilla, 2019).

Figura 2 – Círculo hermenéutico de la comprensión en matemática



Fuente: Elaboración propia

Consideramos que esta propuesta metodológica circular permite realizar aproximaciones más justas a la comprensión matemática de los estudiantes. Conscientes de la problemática que supone alcanzar objetividad en la evaluación, desde nuestro modelo proponemos, como alternativa, orientar los esfuerzos hacia la búsqueda de interpretaciones justas, que reconozcan lo que el estudiante comprende a través de lo que es capaz de hacer con el conocimiento matemático (Quintanilla & Gallardo, 2017, 2021).

METODOLOGIA

Para la exploración de los obstáculos que emergen en el uso de la fracción en su significado medida, llevamos a cabo un estudio exploratorio de carácter cualitativo en el que aplicamos como método interpretativo el círculo hermenéutico que se desprende de nuestro modelo de comprensión del conocimiento matemático.

Muestra y contexto de aula

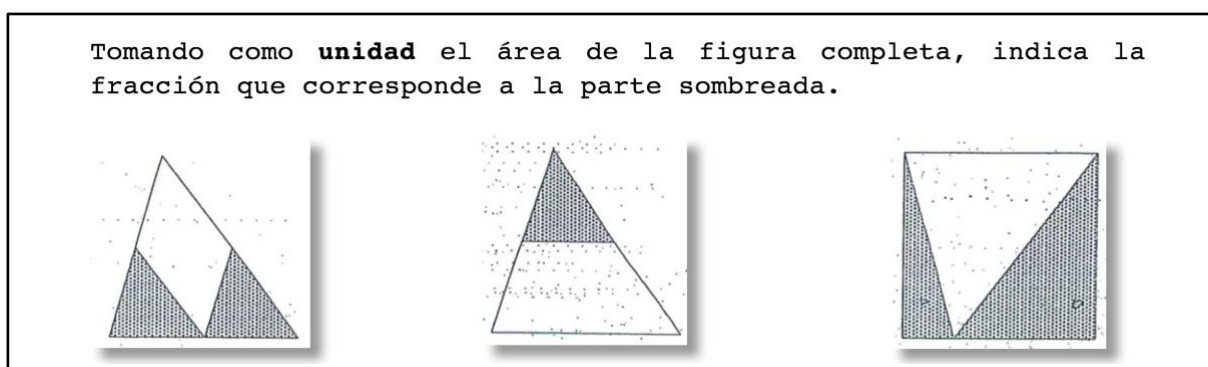
En la experimentación participaron seis estudiantes, agrupados en tres parejas, de primer curso de educación secundaria obligatoria (12-13 años). El círculo hermenéutico para la evaluación de la comprensión se aplicó una vez concluido el periodo de tres semanas (doce sesiones) que los alumnos destinaron a la enseñanza de las fracciones (diciembre 2020). La actividad matemática en el aula se desarrolló cumpliendo con la normativa curricular establecida para este nivel académico, que para el caso de las fracciones exigía atender a los aspectos recogidos en el Cuadro 1. Además de ello, a los estudiantes se les presentó de manera explícita y mediante ejemplos ilustrativos los distintos significados asociados a la fracción, incluido el de medida, y se les ofreció la oportunidad de enfrentar diferentes tareas y situaciones

cuya resolución exigía el uso de tales significados. Tras este trabajo académico, los participantes realizaron la actividad planteada en el estudio en el ambiente natural de su aula ordinaria junto con sus compañeros y su profesor de matemáticas.

Tarea matemática

Se propuso a la muestra de alumnos la actividad aritmética de la Figura 3. La tarea transcurre en un entorno geométrico, en el que interviene la magnitud superficie y donde su resolución requiere el uso de la fracción en su significado medida. De manera intencionada, usamos figuras geométricas planas básicas (triángulo y cuadrado) como objetos soporte idealizados y presentamos la superficie dibujada con el propósito de hacer aflorar de un modo más directo posibles obstáculos de comprensión en los estudiantes. En concreto, en cada una de las tres figuras geométricas es necesario identificar una equipartición que permita relacionar el número total de partes iguales resultantes con el número de partes sombreadas. La posible partición se muestra más evidente en el primer triángulo que en el segundo, aunque en ambos casos resulta válida la misma. En el cuadrado, se puede hacer uso de la propiedad de conservación de la medida, generando para ello dos rectángulos diferentes divididos por su diagonal en dos partes iguales, una de ellas sombreada. Si la medida resultante en ambos rectángulos es $\frac{1}{2}$, entonces la medida total en el cuadrado también es $\frac{1}{2}$.

Figura 3 – Tarea de uso de la fracción en su significado medida



Fuente: Elaboración propia

Fases e instrumentos

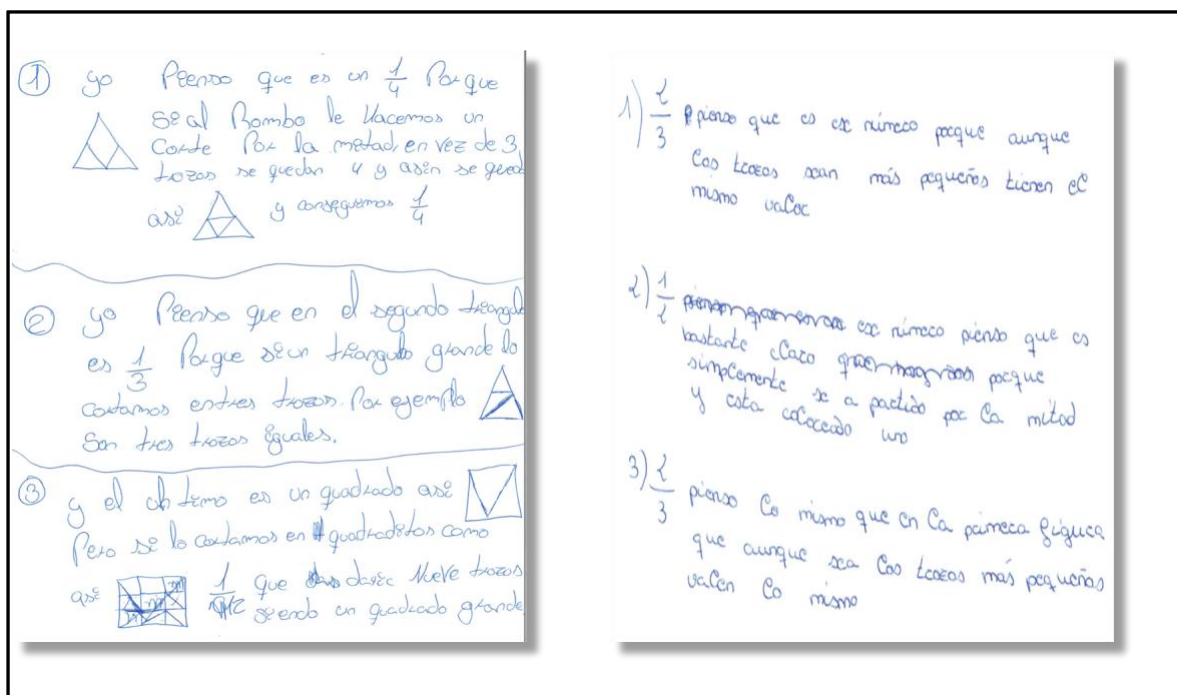
La aplicación de nuestro método interpretativo transcurre siguiendo dos fases consecutivas.

En la *primera fase*, proponemos a cada uno de los seis participantes la resolución individual de la tarea seleccionada. Para cada una de las figuras geométricas, la respuesta

numérica aportada viene acompañada de una descripción de la estrategia de medida empleada y/o una explicación complementaria de las razones que justifican la fracción dada. Esta fase nos permite identificar y caracterizar los usos dados a la fracción por parte de cada estudiante durante la resolución, incluyendo los conocimientos matemáticos involucrados en la medida realizada (planos semiótico y fenómeno-epistemológico del círculo hermenéutico). La Figura 4 muestra como ejemplo el registro escrito cualitativo elaborado por los integrantes de una de las parejas de alumnos, en el que podemos apreciar diferencias en la comprensión de la fracción como medida.

En la *segunda fase*, cada pareja analiza conjuntamente con su profesor las diferentes respuestas aportadas en la fase anterior, compartiendo sus distintos conocimientos sobre los significados de la fracción y buscando alcanzar el consentimiento con el otro (plano dilógico). Las conversaciones se graban en audio y la posterior transcripción del diálogo resultante nos aporta un nuevo registro escrito, con entradas de las distintas intervenciones realizadas durante la discusión, para continuar con la interpretación de la comprensión del significado medida.

Figura 4 – Ejemplos de respuestas dadas por la pareja de estudiantes E₁ (izquierda) y E₂ (derecha)



Fuente: Resultados de la investigación

Análisis e interpretación de datos

La comprensión de la fracción en su significado medida viene determinada por los requerimientos de uso expuestos en el Cuadro 2. En el estudio, analizamos las respuestas de los alumnos e identificamos los rastros de su comprensión en función del cumplimiento de estos

requisitos. En concreto, obtenemos evidencias de las características de su comprensión cuando uno o varios de estos aspectos se muestran como obstáculos que impiden dar con la solución correcta a las tareas de medición planteadas.

Cuadro 2 – Requisitos en el uso de la fracción como medida

Conocimientos matemáticos	Descripción
Partición	Descomponer, física o mentalmente, la <i>unidad</i> (en este caso, relativa a la magnitud superficie) en partes que la recubran. Las partes han de ser disjuntas dos a dos. Las particiones resultantes no son únicas y dependen del tamaño elegido para las partes.
Partes alícuotas de la unidad	Reconocer y fijar como condición necesaria que las partes tienen que ser iguales. También, visualizar como iguales partes representadas gráficamente.
Estrategias de medición	Establecer un número total de partes iguales (n) y otro correspondiente a las partes sombreadas (k). Relacionar ambas partes y representar el valor numérico de la medida de la unidad (cuantificación) como $\frac{k}{n}$.

Fuente: Elaboración propia

ANÁLISIS DE RESULTADOS Y DISCUSIÓN

La experimentación llevada a cabo pone de manifiesto que los alumnos, en el cumplimiento de los requisitos descritos en el Cuadro 2, se ven afectados por tres obstáculos principales distintos. Estos condicionan la resolución de la tarea planteada y proporcionan información sobre la comprensión de los estudiantes acerca de la fracción como medida.

Primer obstáculo: la partición dada no se puede modificar

Las partes originales de la unidad, trazadas gráficamente sobre la superficie de cada figura geométrica presentada, se pueden modificar y/o sustituir al objeto de establecer una equipartición (al inicio, las particiones dadas no presentan partes iguales). La representación fraccionaria resultante de la medida dependerá del tamaño y la cantidad de partes iguales que recubran la unidad, aunque todas las posibles fracciones numéricas serán equivalentes. Manifestar que la partición original no se puede modificar constituye un primer obstáculo para la comprensión del significado medida. En la primera pareja, los siguientes fragmentos de diálogo ejemplifican cómo este obstáculo se muestra persistente en E₂, a pesar de los esfuerzos de E₁ por mostrar el equívoco a su compañera.

- 1 *E₁*: [Referente a la primera figura] *Yo pienso que un cuarto, porque si al rombo le hacemos un corte por la mitad, en vez de ser trozos, se quedan en cuatro. Así se consigue un cuarto.*
 - 2 *E₂*: *Pero es que el trozo no está partido, lo has partido tú.*
 - 3 *E₁*: *Entonces esta mitad sería más grande que estas dos.*
 - 4 *E₂*: *¿Y eso qué tiene que ver? ¡La raya la has puesto tú por toda la cara! Si tú le pones algo para saber que está partido, no se considera como un partido.*
- ...

- 5 *E₁*: [Referente a la segunda figura] *Yo digo un tercio porque es imposible que sea una mitad porque aquí hay un trozo muy chiquitillo. Si lo cortas en tres trozos haciendo tres triángulos, se quedan iguales.*
- 6 *E₂*: *Pero tú la has partido así porque te ha dado la gana, porque la raya esa no estaba.*
- 7 *Profesor*: *¿Qué problema tienes tú con las rayas?*
- 8 *E₂*: *Porque profe, se ha puesto ahí una raya. Ha dicho: pongo una raya aquí, pues porque sí, porque esta parte es más grande que esta. Eso de ahí, yo no lo veo claro.*
- ...
- 9 *E₂*: [Referente a la tercera figura] *Que yo no entiendo por qué ha cogido el cuadrado y ha puesto lo que le ha dado la gana. Y la fracción, ¿te la inventas?*
- 10 *E₁*: [Intenta encontrar una equipartición para el cuadrado] *Son fracciones iguales.*
- 11 *E₂*: *Pero tú tienes que poner la fracción que pone en la ficha, no la que pones tú. Porque esto se trata de poner la fracción... Tú tienes que ver las rayas que hay ahí, no las que tú pongas porque si no...*

E₁ muestra su conocimiento sobre la necesidad de equipartición en el uso de la fracción como medida, aunque en la práctica, al determinar las partes en las distintas figuras geométricas, no siempre logra que sean efectivamente iguales (5, 9-10). En el primer triángulo, por ejemplo, traza un segmento para dividir en dos la parte no sombreada y logra sustituir la partición dada, de tres partes no iguales, por otra de cuatro partes iguales (1, 3). Su compañera E₂, sin embargo, no admite este cambio (2, 4) y mide la parte sombreada de la unidad a partir de la partición original: “*aunque los trozos sean más pequeños, tienen el mismo valor*” (Figura 4, derecha). Para ella, cualquier transformación aplicada sobre la partición primera daría lugar a una fracción diferente, un argumento que sostiene para el resto de figuras a lo largo del episodio (6, 8, 9, 11).

Segundo obstáculo: las partes no tienen por qué ser iguales

Medir una determinada porción de la unidad requiere la elección e iteración de un mismo submúltiplo con el que poder recubrir dicha unidad. Ello implica que las partes de la partición seleccionada deban ser iguales. Un segundo obstáculo para la comprensión del significado medida surge cuando la condición de igualdad para las partes es sustituida por la comparación entre dos conjuntos diferentes de partes, en concreto, las partes sombreadas respecto a las no sombreadas. Cuando determinados alumnos destacan esta relación y usan la fracción como índice comparativo, consideramos que se manifiesta una interferencia del significado *razón* sobre el de medida. Este segundo obstáculo también se evidencia de manera recurrente en las intervenciones de E₂ durante la fase dialógica, lo que condiciona aún más su resolución de la tarea.

- 1 *Profesor*: [Referente a la primera figura] *¿Y tú por qué habías puesto dos tercios?*
- 2 *E₂*: *Porque aquí hay tres trozos y aunque estos sean más chicos, yo los considero también como dos. Estos dos, aunque sean más pequeños, yo creo que valen lo mismo.*
- 3 *E₁*: *No. ¡Porque este es más grande que estos dos!*
- 4 *E₂*: *Bueno, será lo que tú piensas, pero yo pienso otra cosa.*

- ...
- 5 **E₂**: [Referente a la segunda figura] *Es un medio. Porque hay dos trozos y se ha partido por la mitad.*
- 6 **E₁**: *Tampoco.*
- 7 **E₂**: *¡Pero si es muy lógico! Es una figura que la han partido por la mitad. Aunque no la han cortado por la mitad mitad, pero la han cortado. Y es uno y dos.*
- 8 **E₁**: *Si tú coges un trozo más pequeño y otro más grande, ¿cuál va a valer más, el pequeño o el grande? Es imposible que sea una mitad porque aquí hay un trozo muy chiquitillo. Si lo cortas en tres trozos haciendo tres triángulos, se quedan iguales.*

En estos fragmentos de diálogo se pone de manifiesto cómo el uso de distintos significados de fracción, medida por parte de E₁ (3, 6, 8) y razón en el caso de E₂ (2, 5, 7), imposibilitan a esta primera pareja alcanzar el consentimiento durante la resolución. La interferencia del significado razón sobre el de medida en el uso de la fracción, concretada en el obstáculo de las partes no iguales, parece ser un fenómeno usual en la comprensión de los estudiantes. Ya lo reflejamos en un estudio anterior con maestros en formación (Gallardo, González & Quispe, 2008) y ahora vuelve a surgir, también en alumnos de otras parejas. Las explicaciones de la segunda pareja E₄ y E₅ evidencian con claridad este obstáculo (2, 4, 5). En la tercera pareja, en cambio, la dificultad de E₆ parece estar más relacionada con su capacidad para visualizar partes realmente iguales en la representación gráfica de la figura. Así lo manifiesta en el segundo triángulo, cuando percibe inicialmente como iguales partes que en realidad no lo son (6).

- 1 **Profesor**: [Referente a la primera figura] *Veo que los trozos no son iguales.*
- 2 **E₄**: *No, en la figura no son iguales. Pero siguen siendo tres pedacitos, aunque este sea más grande que este.*
- 3 **Profesor**: *Que las partes sean iguales, ¿no es importante?*
- 4 **E₄**: *Vamos a ver...una puede ser muy grande muy grande y otra muy chiquitilla muy chiquitilla, pero son dos partes iguales. No son de tamaños iguales, pero son una y una.*
- ...
- 5 **E₅**: [Referente a la segunda figura] *Pues yo he puesto que, aunque no sean partes iguales, creo que sería un medio porque hay dos trozos y solo está coloreado uno.*
- 6 **E₆**: *Es que no sé si he puesto un medio o...también otro... Partir más o menos en partes iguales. Tiene que ser la misma parte.*

Tercer obstáculo: no siempre se pueden determinar partes iguales

La determinación de la fracción correspondiente a la parte sombreada también exige el uso de distintas estrategias de medición: (a) directas en los triángulos, con el recubrimiento y la iteración; (b) indirectas en el cuadrado, mediante la descomposición de la figura y el reconocimiento de nuevas relaciones y equivalencias entre las partes originales (manipulación visual y/o mental de las figuras). Aunque el objetivo de lograr una equipartición es común en las tres figuras, la dificultad adicional en la medida del cuadrado genera en determinados alumnos la idea de que no siempre es posible establecer partes iguales. Este obstáculo se pone de manifiesto con la tercera pareja E₅ y E₆ (1, 4, 6). Además, cuando no se consigue la

equipartición, se relaja el requisito de igualdad en la medida. Es decir, primero se intenta obtener partes iguales mediante alguna estrategia (1-3), pero si no se alcanza este propósito, al menos se debería medir, como alternativa, con base en la partición dada (6-8).

- 1 **E₅**: [Referente a la tercera figura] *Este es imposible de tocarlo. Yo no sé cómo hacerlo. Esto es más o menos como esto, ¿no? Así, son casi iguales.*
- 2 **E₆**: *Pues yo digo que así no va. Porque mira qué pedazo te has dejado aquí y mira este qué chiquitito.*
- 3 **E₅**: *No sé... Por decir algo. Yo no soy un artista que sé dibujar iguales.*
- 4 **E₆**: *Esto está muy mal, muy mal, muy mal. Yo creo que no se puede partir, ¿no?*
- 5 **Profesor**: *Pero alguna fracción será, ¿no?*
- 6 **E₅**: *Yo, dos tercios. Es que tienen que ser partes iguales, pero es que... Yo creo que no se puede hacer esto a partes iguales.*
- 7 **E₆**: *Yo dejo dos de tres. Dos tercios, sí.*
- 8 **E₅**: *Lo dejamos así.*

La pareja formada por E₃ y E₄ también se ve afectada por la dificultad de encontrar partes iguales. Sin embargo, la diferencia sustancial respecto a la pareja anterior, reside en el uso del criterio de igualdad como requisito fijo necesario para obtener el valor correcto de la medida (1, 3-5). Con independencia de la adecuación de la estrategia de medición empleada, para estos alumnos no cabe la posibilidad de renunciar a la búsqueda de partes iguales.

- 1 **E₃**: [Referente a la tercera figura] *Hagas lo que hagas, no puedes conseguir partes iguales porque este es muy chico, este muy grande y este también.*
- 2 **Profesor**: *¿Cuál era tu propuesta?*
- 3 **E₃**: *Yo lo he hecho fatal, he puesto solo...espérate...dos tercios. Sí, porque hay dos coloreados y uno así, pero está mal porque no hay partes iguales.*
- 4 **E₄**: *Eso es porque no son trozos iguales y para tener los tres trozos tienen que ser iguales. Yo creo que he puesto un medio, porque... estos dos son iguales. Si lo añades un pelín más para acá, son iguales. Aquí lo sumo, este sería igual que este y así sería dos... un medio.*
- 5 **E₃**: *Así serían partes iguales y sería un medio.*

DISCUSIÓN Y CONCLUSIÓN

Los resultados sobre comprensión de la fracción aportados por la investigación en Educación Matemática ponen de manifiesto la conveniencia de secuenciar en la escuela la enseñanza de sus distintos significados, dado que unos se muestran más asequibles para los estudiantes que otros. Al mismo tiempo, advierten del perjuicio que se ocasiona al priorizar el aprendizaje exclusivo de ciertos significados en detrimento de otros. Es sabido que algunos significados, como el de parte-todo, llegan incluso a interferir y obstaculizar el uso y la comprensión del resto (Escolano & Gairín, 2005; Gallardo, González & Quispe, 2008). Como implicación didáctica para el trabajo escolar, estos significados en conjunto debieran hacerse presentes en los procesos de enseñanza y aprendizaje de la fracción en el aula (Valdemoros, 2004; Ávila, 2019). Por una parte, actuando como organizadores de los distintos fenómenos, situaciones y tareas matemáticas en las que tiene sentido el uso de la fracción. Por otra, porque

todos ellos contribuyen a la comprensión de la fracción, ya que esta depende, en última instancia, de las diferentes experiencias y usos variados que los estudiantes tienen con tales significados. En el caso particular del significado medida, también debiera promocionarse su presencia en la escuela a través de contextos y situaciones específicas de medición de cantidades de magnitud.

La comprensión en matemáticas puede ser diagnosticada y evaluada en términos de superación de obstáculos (Sierpiska, 1994). En el estudio realizado, hemos puesto de manifiesto algunas maneras insuficientes de utilizar la fracción como medida y hemos caracterizado distintas dificultades que impiden su comprensión por parte de los escolares. En situaciones de medida de cantidades de superficie menores que la unidad, algunos alumnos no admiten transformaciones en las partes originales de la partición inicial dada, tampoco sienten la necesidad de fraccionar en partes iguales la unidad y aceptan con naturalidad que las equiparticiones son imposibles en determinadas mediciones. Desde nuestra perspectiva interpretativa, la comprensión del significado medida requiere la superación de obstáculos como los descritos, los cuales se unen a los ya evidenciados en estudios previos por investigadores como Escolano y Gairín (2005) o Cortina, Zúñiga y Visnovska (2013). En el caso de estos últimos autores, también advierten del obstáculo didáctico que se genera al trabajar la medición lineal en situaciones donde las partes se presentan iguales y, como alternativa, sugieren propuestas complementarias para estudiar la fracción sin aludir a la equipartición. Esta propuesta nos parece interesante y en el futuro nos planteamos explorar la comprensión del significado medida en contextos y situaciones de medición de cantidades de superficie donde se pueda experimentar sin partes iguales.

Teniendo en cuenta la perspectiva funcional de la comprensión que asume nuestro modelo interpretativo, donde la comprensión de un determinado conocimiento matemático se caracteriza a través del uso que el estudiante hace de dicho conocimiento en distintas situaciones de su ámbito fenómeno-epistemológico, el uso de la fracción en contextos de medida efectiva nos resulta imprescindible para garantizar la comprensión. Como recomendación para la práctica docente, consideramos que plantear en el aula tareas matemáticas en situaciones de medición real que exijan utilizar las fracciones en su significado medida como estrategia de resolución, puede evitar la generación de obstáculos como los descritos en este trabajo, mejorando así la comprensión de la fracción por parte de los escolares. Finalmente, en línea con lo sugerido por Ávila (2019), recuperar la génesis histórica de las fracciones en contextos de medida también nos parece una estrategia acertada en el diseño y planificación de secuencias didácticas vinculadas con la enseñanza de las fracciones.

REFERENCIAS

- Ávila, A. (2019). Significados, representaciones y lenguaje: las fracciones en tres generaciones de libros de texto para primaria. *Educación Matemática*, 31(2), 22-60. <https://doi.org/10.24844/EM3102.02>
- Bruño, G. M. (s.f.). *Aritmética. Curso medio*. París: Procuraduría General.
- Carrillo, J., Contreras, L. C., Climent, N., Montes, M., Escudero, D. y Flores, E. (2016) (Coords.). *Didáctica de las matemáticas para maestros de Educación Primaria*. Madrid: Paraninfo.
- Castro, E. y Torralbo, M. (2001). Fracciones en el currículo de la Educación Primaria. En E. Castro (Ed.). *Didáctica de la matemática en la Educación Primaria* (pp. 285-314). Madrid: Síntesis.
- Castro, E., Castro, E., Fernández, J. A., Flores, P. y Molina, M. (2015). Enseñanza y aprendizaje de los números racionales y sus operaciones. En P. Flores y L. Rico (Coords.). *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en la Educación Primaria* (pp. 231-252). Madrid: Pirámide.
- Chamorro, M^a. C. (2008). El tratamiento escolar de las magnitudes y su medida. En M^a. C. Chamorro (Coord.). *Didáctica de las matemáticas para Primaria* (pp. 221-243). Madrid: Pearson Prentice-Hall.
- Cortina, J. L., Zuñiga, C. y Visnovska, J. (2013). La equipartición como obstáculo didáctico en la enseñanza de las fracciones. *Educación Matemática*, 25(2), 7-29.
- Escolano, R. y Gairín, J. L. (2005). Modelos de medida para la enseñanza del número racional en Educación Primaria. *UNIÓN Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 1(1), 17-35.
- Flores, P. y Torralbo, M. (2011). Números racionales. En I. Segovia y L. Rico (Coords.). *Matemáticas para maestros de Educación Primaria* (pp. 189-218). Madrid: Pirámide.
- Gallardo, J. y Quintanilla, V. A. (2016). El consentimiento con el otro en la interpretación de la comprensión en matemáticas. *BOLEMA: Boletim de Educação Matemática*, 30(55), 625-648. <https://doi.org/00.1590/1980-4415v30n55a16>
- Gallardo, J. y Quintanilla, V. A. (2019). El círculo hermenéutico de la comprensión en matemáticas: una propuesta integradora para la evaluación en el aula. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 22 (1), 97-122. <https://doi.org/10.12802/relime.19.2214>
- Gallardo, J., González, J. L. y Quintanilla, V. A (2013). Tareas, textos y usos del conocimiento matemático: aportes a la interpretación de la comprensión desde el cálculo aritmético elemental. *Educación Matemática*, 25(2), 5-32.

- Gallardo, J., González, J. L. y Quintanilla, V. A. (2014). Sobre la valoración de la competencia matemática: claves para transitar hacia un enfoque interpretativo. *Enseñanza de las Ciencias*, 32(3), 319-336. <https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.1158>
- Gallardo, J., González, J. L. y Quispe, W. (2008). Interpretando la comprensión matemática en escenarios básicos de valoración. Un estudio sobre las interferencias en el uso de los significados de la fracción. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 11(3), 355-382.
- Llinares, S. (2008). Fracciones, decimales y razón. Desde la relación parte-todo al razonamiento proporcional. En M^a. C. Chamorro (Coord.). *Didáctica de las matemáticas para Primaria* (pp. 187-220). Madrid: Pearson Prentice-Hall.
- Mejía, D., Ocaña, J. M. y Romero, R. (2019). *Matemáticas 1. Para que las cosas ocurran*. Zaragoza: Edelvives.
- Ministerio de Educación, Cultura y Deporte (2014). Real Decreto 126/2014, de 28 de febrero, por el que se establece el currículo básico de la Educación Primaria. *BOE*, 52, 19349-19420. Recuperado de <https://www.boe.es/buscar/pdf/2014/BOE-A-2014-2222-consolidado.pdf>
- Ministerio de Educación, Cultura y Deporte (2015). Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico para la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato. *BOE*, 3, 169-546. Recuperado de <https://www.boe.es/eli/es/rd/2014/12/26/1105/con>
- Quintanilla, V. A. y Gallardo, J. (2017). Hacia una interpretación justa de la comprensión en matemáticas. Actas del *VIII Congreso Iberoamericano de Educación Matemática (CIBEM)*. Madrid, 10-14 de julio.
- Quintanilla, V. A. y Gallardo, J. (2021). Contribución del círculo hermenéutico de la comprensión al desarrollo de una interpretación ética en el aula de matemáticas. *BOLEMA: Boletim de Educação Matemática*, 35(69), 289-313. <http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v35n69a14>
- Radford, L. (2008). Connecting theories in mathematics education: challenges and possibilities. *ZDM-The International Journal on Mathematics Education*, 40(2), 317-327. <http://dx.doi.org/10.1007/s11858-008-0090-3>
- Sierpinska, A. (1994). *Understanding in mathematics*. London: The Falmer Press.
- Valdemoros, M. (2004). Lenguaje, fracciones y reparto. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 7(3), 235-256.